ΜΑΝΟΛΗ ΔΡΕΤΤΑΚΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΕΜΠΟΡΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΓΙΑ ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΑΘΗΝΑ 1975

ΜΑΝΟΛΗΣ ΔΡΕΤΤΑΚΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΗΣ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΕΜΠΟΡΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΓΙΑ ΣΠΟΥΔΑΣΤΕΣ ΤΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΑΘΗΝΑ 1975

Κάθε γνήσιο αντίτυπο έχει την υπογραφή τοῦ συγγραφέα

᾿Αφιερωμένο στὴ μνήμη
τῆς μητέρας μου ᾿Αρτεμησίας

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

'Ανάμεσα στούς κλάδους τῶν 'Ανώτερων Μαθηματικῶν πού χρησιμοποιεῖ ἡ Θεωρητική Οἰκονομετρία εἶναι ἡ Θεωρία τῶν Συνόλων, ὁ Διαφορικός καί 'Ολοκληρωτικός Λογισμός, οἱ 'Εξισώσεις Διαφορῶν, οἱ Διαφορικές 'Εξισώσεις καί, κυρίως, ἡ Γραμμική Ἄλγεβρα.

Μέχρι σήμερα τά ἐγχειρίδια ἐκεῖνα πού χρησιμοποιοῦν τή Γραμμική Ἄλγεβρα σάν τό κύριο μέσο ἐκθέσεως τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας (ὅπως π.χ. τῶν Goldberger (1964), Dhrymes (1970), Theil (1971), Johnston (1972) καί Rowley (1973)) ἀφιερώνουν ἕνα ἤ καί περισσότερα κεφάλαια ἤ παραρτήματα στήν ἔκθεση τῆς Γραμμικῆς Ἄλγεβρας πού χρειάζεται στό σπουδαστή γιά νά παρακολουθήση τήν Οἰκονομετρική Θεωρία. 'Η ἔκθεση ὅμως αὐτή εἶναι πολύ συνοπτική καί ἐκλεκτική ἀνάλογα μέ τά θέματα πού καλύπτει κάθε ἐγχειρίδιο. Τίς περισσότερες φορές προϋποθέτει ὅτι ὁ σπουδαστής ἔχει παρακολουθήσει μαθήματα Γραμμικῆς Ἄλγεβρας γιά ἕνα ἑξάμηνο ἤ χρόνο πρίν ἀρχίσει Οἰκονομετρία καί γι'αὐτό οἱ ἀποδείξεις τῶν περισσότερων προτάσεων καί θεωρημάτων παραλείπονται.

Τό βιβλίο αὐτό, στά μικρά περιθώρια πρωτοτυπίας πού ἀφήνει ἕνα ἐγχειρίδιο, προσπαθεῖ νά κάμη μιά σύνθεση πού, κατά τή γνώμη μας, δέν ὑπάρχει τή στιγμή αὐτή. Μέσα στήν περιορισμένη ἔκτασή του δίνει πρῶτα τίς βασικές ἀρχές καί μετά τά κυριότερα ειδικά θέματα τῆς Γραμμικῆς Ἄλγεβρας πού πρέπει νά γνωρίζη ὁ σπουδαστής τῆς Οἰκονομετρίας.

Τά δύο τρίτα περίπου τοῦ βιβλίου προορίζονται γιά φοιτητές πού ἔχουν παρακολουθήσει, στά πρῶτα χρόνια τῶν σπουδῶν τους σέ πανεπιστημιακοῦ ἐπιπέδου οἰκονομικές σχολές, μαθήματα Γενικῶν Μαθηματικῶν καί στούς ὁποίους διδάσκεται γιά πρώτη φορά τό μάθημα τῆς Οἰκονομετρίας. Τά πιό προχωρημένα τμήματα τῶν τελευταίων κεφαλαίων του καλύπτουν θέματα πού συνήθως διδάσκονται σέ μεταπτυχιακό ἐπίπεδο.

Τόσο Ἕλληνες, μαθηματικοί κυρίως, συγγραφεῖς (ὅπως,π.χ. οἱ Στεριώτης (1969),(1973) καί Κριτικός (1963) ὅσο καί ξένοι (ὅπως, π.χ. οἱ Allen (1938), (1963), (1964) καί Glaister (1972)σέ βιβλία πού καλύπτουν πολλούς κλάδους τῶν Ἀνώτερων Μαθηματικῶν ἀφιερώνουν ἕνα ἤ καί περισσότερα κεφάλαια στή Γραμμική Ἄλγεβρα. Τά κεφάλαια αὐτά εἶναι πολύ χρήσιμα στό σπουδαστή πού γιά πρώτη φορά μελετᾶ τόν κλάδο αὐτό.

Γιά μιά συστηματικότερη καί βαθύτερη μελέτη τῶν τμημάτων ἐκείνων τῆς Γραμμικῆς Ἄλγεβρας πού προσπαθεῖ νά καλύψη αὐτό τό βιβλίο καθώς καί ἐκείνων πού ἀφήνει ἀκάλυπτα παραπέμπουμε τό σπουδαστή σέ ειδικά βιβλία πού ὑπάρχουν τόσο στήν ἑλληνική βιβλιογραφία (ὅπως, π.χ. τά σχετικά πρόσφατα τῶν Ρόκου (1965), Κάππου (1967), (1970) καί τά πιό καινούργια τῶν Καζαντζίδη (1972), Γκλάβα (1973) καί Ἀνδρεαδάκη (1974) ὅσο καί τήν ξένη. Ἀπό τήν ξένη βιβλιογραφία τά βιβλία στά ὁποῖα χρωστᾶμε πολλά, ἐκτός ἀπό τά παραρτήματα ἤ τά κεφάλαια τῶν βιβλίων τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας πού ἀναφέραμε πιό πάνω, εἶναι τῶν Aitken(1949), Hadley(1961) καί Zurmuehl (1958).

Ἄλλα, περισσότερο ἤ λιγότερο προχωρημένα, βιβλία εἶναι τῶν Frisch(1960), Bourbaki (1973), Brauer et al. (1970), Chambadal et Ovaert (1968), Graeub (1958), Pernelle (1969), Godement (1966), Nef (1967), Cahen (1959), Fadder and Sominski (1965), Shilov (1971), Halmos (1958) καί Birkhoff and Mac Lane σέ ἑλληνική μετάφραση τῶν Κριτικοῦ καί Γκιόκα (1971).

Ἡ παρουσίαση τῆς ὕλης στό βιβλίο αὐτό γίνεται κατά τρόπο πού εἶναι περισσότερο προσιτός σέ σπουδαστές πού, ὅπως καί ὁ συγγραφέας του, δέν εἶναι μαθηματικοί. Εἶναι, κατά συνέπεια, φυσικό νά διαφέρη ἀπό τά περισσότερα βιβλία πού ἀναφέρονται στήν τελευταία καί προτελευταία παράγραφο. Στίς περισσότερες περιπτώσεις προσπαθοῦμε νά δώσουμε τίς ἀποδείξεις τῶν διαφόρων προτάσεων καί θεωρημάτων, ὥστε ὁ σπουδαστής νά καταλαβαίνη τόν τρόπο σκέψεως καί νά μπορῆ,ἀργότερα,μόνος του νά ἐρευνᾶ καί νά ἀποδεικνύη ἄλλες προτάσεις.

Σάν πηγές γιά τή συγγραφή τοῦ βιβλίου χρησίμεψαν μερικά ἀπό τά βιβλία πού ἀναφέρθηκαν πιό μπροστά καθώς καί τά ἄρθρα καί τά ἄλλα βιβλία στά ὁποῖα ἀναφερόμαστε στό κείμενο.

Ὁ συμβολισμός πού χρησιμοποιεῖται στό βιβλίο αὐτό εἶναι ὁ ἴδιος μέ τό συμβολισμό πού θά χρησιμοποιήσουμε στήν ἀνάπτυξη τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας. Ὁ τρόπος ἐκτυπώσεως τοῦ βιβλίου μᾶς ἀναγκάζει νά χρησιμοποιήσουμε μόνο τούς τύπους ἐκείνους πού διαθέτουν οἱ γραφομηχανές στίς ὁποῖες γίνεται ἡ δακτυλογράφησή του.

Ἡ ὕλη τοῦ βιβλίου διαιρεῖται σέ 6 κεφάλαια. Κάθε κεφάλαιο, μετά ἀπό μιά μικρή εἰσαγωγή, διαιρεῖται σέ τμήματα. Στό τέλος τοῦ κάθε κεφαλαίου δίνονται ἀσκήσεις πού σκοπό ἔχουν νά βοηθήσουν τόν σπουδαστή νά ἐμπεδώση τή σχετική ὕλη. Σ'ὁλόκληρο τό βιβλίο ἡ ἀνάλυσή μας ἀναφέρεται στούς πραγματικούς ἀριθμούς. Στό τέλος τοῦ βιβλίου δίνονται, χωριστά, ἡ ἑλληνική καί ξένη βιβλιογραφία καί ἀκολουθοῦν ἕνα ἀγγλοελληνικό γλωσσάριο ὅρων καί τό εὑρετήριο ὕλης.

Ἡ μορφή πού ἔχει σήμερα ἡ διάταξη τῆς ὕλης τοῦ βιβλίου αὐτοῦ ὀφείλεται, κατά ἕνα μεγάλο ποσοστό, τόσο στήν ἐπίδραση τοῦ καθηγητῆ J.D.Sargan πού δίδαξε τό συγγραφέα Οἰκονομετρία στήν London School of Economics and Political Science ὅσο καί τῶν φοιτητῶν πού παρακολούθησαν τά μαθήματα Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας πού ἔδωσε ὁ συγγραφέας τά τελευταῖα χρόνια στό Πανεπιστήμιο τοῦ Leeds στήν 'Αγγλία.

Ὁ ὁμότιμος καθηγητής τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου κ. Ν. Κριτικός καί ὁ καθηγητής τοῦ Πανεπιστημίου 'Αθηνῶν κ. Σ. 'Ανδρεαδάκης ἔκαναν χρήσιμες παρατηρήσεις στά τμήματα ἐκεῖνα τοῦ βιβλίου πού εἶχαν τό χρόνο νά διαβάσουν. Ἡ γλώσσα τοῦ κειμένου βελτιώθηκε σημαντικά μετά ἀπό σχετικές ὑποδείξεις τῶν κ.κ. Ν. Κριτικοῦ καί Γ. Σηφάκη, καθηγητῆ τοῦ Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Οἱ κ.κ. Κ. Κωστόπουλος καί Ι. Μαμούχας βοήθησαν στήν ἐπιλογή, ἀπό διάφορες πηγές, τῶν ἀσκήσεων πού δίνονται στό τέλος καθε κεφαλαίου. Τέλος ὁ κ. Ι. Μαμούχας καί ἡ δ/νίς Ε. Κανδηλώρου βοήθησαν στίς τελευταῖες διορθώσεις πού χρειάστηκε νά γίνουν πρίν τό βιβλίο σταλῆ στόν τυπογράφο.

Σ'ὅλους τούς παραπάνω ὀφείλω νά ἐκφράσω τίς εὐχαριστίες μου. Περιττό, βέβαια, νά τονίσω ὅτι κανείς ἀπ'αὐτούς δέν ἔχει καμιά εὐθύνη γιά ὅποια λάθη ἐξακολουθοῦν νά ὑπάρχουν στό κείμενο. Τήν εὐθύνη αὐτήν τήν ἔχω ἐξ'ὁλοκλήρου ἐγώ.

Μανόλης Δρεττάκης

'Αθήνα, Φεβρουάριος 1975

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΗΤΡΕΣ

Εἰσαγωγή

Σκοπός τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ εἶναι νά ἐκθέση, μέ πολλή συντομία, τίς βασικές ἔννοιες τῶν Διανυσμάτων καί τῶν Μητρῶν. Ἡ ἔκθεση αὐτή εἶναι σύντομη διότι, ὅπως ἀναφέραμε στόν Πρόλογο, ὑποθέτουμε ὅτι οἱ σπουδαστές τῆς Οἰκονομετρίας ἔχουν διδαχτῆ στοιχεῖα Γραμμικῆς Ἄλγεβρας στό Α΄ καί τό Β΄ ἔτος τῶν πανεπιστημιακῶν σπουδῶν τους. Στούς ἀναγνῶστες ἐκείνους πού εἴτε δέν ἔχουν διδαχτῆ εἴτε ἔχουν λησμονήσει τά βασικά αὐτά στοιχεῖα συνιστοῦμε νά μελετήσουν ἕνα ἤ περισσότερα ἀπό τά εἰσαγωγικά βιβλία πού παραθέτουμε στόν Πρόλογο. Ἕνας ἄλλος σκοπός τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ εἶναι νά εἰσαγάγη τόν ἀναγνώστη στό συμβολισμό πού θά χρησιμοποιήσουμε στά ἑπόμενα κεφάλαια καθώς καί στίς παραδόσεις τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας.

I. Διανύσματα

Δ ι ά ν υ σ μ α (Vector) διαστάσεως n εἶναι ἕνα διατεταγμένο σύνολο n πραγματικῶν ἀριθμῶν (συντεταγμένων τοῦ διανύσματος) πού θά τό γράφουμε σάν στήλη.

Πρέπει νά τονιστῆ ἀπό τήν ἀρχή ὅτι ἡ σειρά μέ τήν ὁποία γράφονται οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος εἶναι βασικῆς σημασίας καί ὅτι τό διάνυσμα δέν εἶναι ἕνας ἀριθμός.

Γιά ν'ἀποφεύγωνται συγχύσεις τά διανύσματα θά συμβολίζωνται μέ τά πρῶτα ἤ τά τελευταῖα γράμματα τοῦ Λατινικοῦ ἀλφαβήτου καί οἱ συντεταγμένες τους μέ τά ἴδια γράμματα καί μέ ἕνα δείχτη, ἐνῶ οἱ ἀριθμοί θά συμβολίζωνται μέ τά μεσαῖα γράμματα τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου. Π.χ. ὅταν ἀναφερόμαστε στά διανύσματα b , διαστάσεως n καί y , διαστάσεως T θά ἐννοοῦμε τά ἑξῆς:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} \text{ ἤ } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_T \end{bmatrix} \text{ ἤ } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_T \end{pmatrix}$$

Ἀ ν ά σ τ ρ ο φ ο (Transpose) Διάνυσμα. Ἄν υἱοθετήσουμε τόν παραπάνω συμβολισμό γιά τό διάνυσμα-στήλη, τό ἀνάστροφο διάνυσμα γράφεται σάν γραμμή καί συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$b' = (b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n)$$

$$y' = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_T)$$

Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ό ς Π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς (Scalar Multiplication) εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός ὅλων τῶν συντεταγμένων ἑνός διανύσματος μέ τόν ἴδιο ἀριθμό. Π.χ.

$$\lambda y' = (\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \lambda y_T)$$

Ἴ σ α καί Ἄ ν ι σ α Διανύσματα. Ἄν ἔχουμε δύο διανύσματα στῆλες a καί b μέ τήν ἴδια διάσταση n , τότε

$$\left.\begin{array}{lcl} a \geqslant b & \Leftrightarrow & a_i \geqslant b_i \\ a \leqslant b & \Leftrightarrow & a_i \leqslant b_i \end{array}\right) \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

ὅπου τό σύμβολο $\Leftrightarrow$ σημαίνει "ὅταν, καί μόνον ὅταν".

Π ρ ό σ θ ε σ η Διανυσμάτων. Ἄν ἔχουμε δυό διανύσματα μέ τήν ἴδια διάσταση n τότε τό ἄθροισμά τους εἶναι ἴσο μέ τό διάνυσμα πού ἔχει συντεταγμένες τά ἀθροίσματα τῶν ἀντίστοιχων συντεταγμένων τῶν δύο διανυσμάτων. Π.χ. τό ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων a καί b εἶναι :

$$a + b = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n+b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ . \\ . \\ . \\ g_n \end{bmatrix} = g$$

Ἄν $a = b$

τότε $a - b = \underline{o}$

ὅπου τό $\underline{o}$ εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα μέ διάσταση τήν ἴδια μέ τίς διαστάσεις τῶν διανυσμάτων a καί b .

Τά παραπάνω ἰσχύουν καί γιά τά διανύσματα-γραμμές.

Γιά τήν πρόσθεση τῶν διανυσμάτων ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἰδιότητες:

(i) $a + b = b + a$ (ἀντιμεταθετική)

(ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (προσεταιριστική)

(iii) $a - a = \underline{o}$

(iv) $a + \underline{o} = a$.

Ἐξάλλου γιά τόν ἀριθμητικό πολλαπλασιασμό σέ συνδυασμό μέ τήν πρόσθεση ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

(i) $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

(ii) $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$

(iii) $(\lambda+\mu)(a+b) = (\lambda+\mu)a + (\lambda+\mu)b = \lambda(a+b) + \mu(a+b)$

(iv) $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$

(v) $1a = a$

Διανυσματικός Χῶρος (Vector Space) (βλέπε Hadley (1961) σελ. 50) εἶναι ἕνα σύνολο διανυσμάτων πού εἶναι κλειστό ὅσον ἀφορᾶ τήν πρόσθεση καί τόν ἀριθμητικό πολλαπλασιασμό. Π.χ. ἄν τά διανύσματα a καί b ἀνήκουν στό σύνολο αὐτό, τότε τό διάνυσμα a+b καί τά διανύσματα λa καί λb ἀνήκουν στό ἴδιο σύνολο (Βλέπε ὅμως καί Ἀνδρεαδάκη (1974) σελ. 34 - 39 γιά ἕναν ἄλλο ὁρισμό πού συνδέεται μέ τίς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καί τοῦ ἀριθμητικοῦ πολλαπλασιασμοῦ πού παραθέσαμε στήν προηγούμενη σελίδα).

Ἐσωτερικό Γινόμενο (Scalar Product) δυό μή μηδενικῶν διανυσμάτων a καί b μέ τήν ἴδια διάσταση n εἶναι ὁ πραγματικός ἀριθμός πού εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων πού προκύπτουν ἀπό τόν πολλαπλασιασμό τῶν ἀντίστοιχων συντεταγμένων τους. Τό ἐσωτερικό γινόμενο τῶν διανυσμάτων a καί b εἶναι ἴσο μέ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots\dots\dots + a_n b_n$$

Μέ τό συμβολισμό τῶν διανυσμάτων πού υἱοθετήσαμε θά γράφουμε τό ἐσωτερικό γινόμενο ὡς ἑξῆς:

$$a'b \text{ ἤ } b'a$$

Παράδειγμα: Τό ἐσωτερικό γινόμενο τῶν διανυσμάτων:

$$a'=(2,1) \qquad b'=(1,2)$$

εἶναι ἴσο μέ

$$a'b = (2,1)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = b'a = (1,2)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 2+2 = 4$$

Ὀρθογώνια (Orthogonal) διανύσματα. Δυό μή μηδενικά διανύσματα c καί d λέγονται ὀρθογώνια ὅταν τό ἐσωτερικό τους γινόμενο εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν, ὅταν δηλαδή $c'd = d'c = o$.

Π.χ. τά διανύσματα

$$c' = (2,3) \qquad d' = (3,-2)$$

εἶναι ὀρθογώνια διότι τό ἐσωτερικό τους γινόμενο εἶναι ἴσο μέ

$$c'd = (2,3)\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} = 2.3 + 3.(-2) = 6-6 = o$$

Ἀπόσταση (Distance). Ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα στά διανύσματα a καί b πού έχουν τήν ίδια διάσταση n ορίζεται ώς έξής:

$$|a - b| = \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(a - b)'(a - b)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Π.χ. ή άπόσταση άνάμεσα στά διανύσματα

$a' = (2,1)$ $\qquad$ $b' = (1,2)$

είναι ίση μέ

$$\left[(2-1)^2 + (1-2)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Μ ῆ κ ο ς (Length). Τό μῆκος ένός διανύσματος a διαστάσεως n όρίζεται ώς

$$|a| = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[a'a\right]^{\frac{1}{2}}$$

Π.χ. τό μῆκος τοῦ διανύσματος $a' = (2,1)$ εἶναι ίσο μέ

$$\left[2^2 + 1^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}\ .$$

Γ ω ν ί α (Angle) . Ή γωνία δύο διανυσμάτων a καί b μέ τήν ίδια διάσταση n όρίζεται ώς

$$\text{συνθ} = \frac{a'b}{|a|\,|b|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$$

Όπως ξέρουμε συνθ $\leqslant 1$,άρα $a'b \leqslant |a|\,|b|$

Γιά τά διανύσματα $a'=(2,1)$ καί $b'=(1,2)$

$$\text{συνθ} = \frac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5} < 1$$

Ε ὐ κ λ ε ί δ ε ι ο ς Χῶρος. Ὅταν σ'ἕνα διανυσματικό χῶρο ὁ ὁρισμός τῆς ἀποστάσεως εἶναι αὐτός πού δόθηκε πιό πάνω τότε ὁ χῶρος ὀνομάζεται Εὐκλείδειος καί συμβολίζεται, ὅταν ἡ διάσταση τῶν διανυσμάτων εἶναι n , μέ E^n.

Γ ρ α μ μ ι κ ή 'Ε ξ ά ρ τ η σ η (Linear dependence). Ἄν ἕνα ἀπό τά διανύσματα πού ἀνήκουν σ' ἕνα σύνολο διανυσμάτων μέσα σ'ἕνα Εὐκλείδειο χῶρο εἶναι γραμμικός συνδυασμός τῶν ὑπόλοιπων διανυσμάτων τοῦ συνόλου, τότε τό διάνυσμα αὐτό λέγεται γραμμικά ἐξαρτημένο. 'Επιπλέον ὁλόκληρο τό σύνολο τῶν διανυσμάτων αὐτῶν λέγεται ὅτι εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένο. Τό σύνολο λέγεται γραμμικά ἀνεξάρτητο ἄν κανένα ἀπό τά διανύσματά του δέν μπορεῖ νά γραφτῆ σάν μιά γραμμική συνάρτηση τῶν ὑπόλοιπων διανυσμάτων πού ἀνήκουν στό σύνολο.

Ἡ ἔννοια τῆς γραμμικῆς ἐξαρτήσεως ἔχει βασική σημασία σ'ὁλόκληρη τή Γραμμική Ἄλγεβρα καί τή Θεωρητική Οἰκονομετρία γι'αὐτό χρειάζεται νά δώσουμε ἕναν πολύ ξεκάθαρο ὁρισμό της. 'Εδῶ θά δώσουμε τόν ὁρισμό πού δίνει ὁ Hadley (1961) σελ. 35 (βλέπε ὅμως καί 'Ανδρεαδάκη (1974) σελ. 40 καί Κάππο (1967) σελ. 90).

Γ ρ α μ μ ι κ ά 'Ε ξ α ρ τ η μ έ ν ο (Linearly dependent) εἶναι ἕνα σύνολο ἀπό m διανύσματα $a_{.j}$, $j=1,\ldots,m$,πού ἀνήκουν στόν Εὐκλείδειο χῶρο E^n ἄν ὑπάρχουν ἀριθμοί λ_j , πού δέν εἶναι ὅλοι ἴσοι μέ τό μηδέν, ὥστε νά ἰσχύη ἡ σχέση

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{.j} = \underline{o}$$

Στή σχέση αὐτή εἶναι ξεκάθαρο ὅτι καθένα ἀπό τά λ_j συμβολίζει κι'ἕναν ἀριθμό. 'Επειδή θέλουμε νά χρησιμοποιήσουμε τό ἴδιο γράμμα a τοῦ Λατινικοῦ ἀλφαβήτου γιά νά συμβολίσουμε τά διανύσματα-στῆλες πού ἀνήκουν στόν Εὐκλείδειο χῶρο E^n γι'αὐτό καί υἱοθετοῦμε τό συμβολισμό $a_{.j}$ ὅπου ἡ . δηλώνει ὅτι ἔχουμε ἕνα διάνυσμα-στήλη καί j εἶναι ὁ δείχτης πού δηλώνει τό διάνυσμα. Ὅταν θέλουμε νά ἀναφερθοῦμε στή συντεταγμένη i τοῦ διανύσματος j τότε γράφουμε a_{ij} .

Ἂν ἡ σχέση $\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a_{.j} = \underline{o}$ ἀληθεύει μόνον ὅταν ὅλοι οἱ ἀριθμοί $\lambda_j = o$ τότε τά διανύσματα εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητα.

Παράδειγμα 1.

Ἂν στήν παραπάνω σχέση $\lambda_1 \neq o$ τότε ἄν συμβολίσουμε τούς συντελεστές

$$-(\lambda_j/\lambda_1) = u_j \quad , \; j = 2,\ldots\ldots,m$$

τότε τό πρῶτο διάνυσμα $a_{.1}$ μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$a_{.1} = \sum_{j=2}^{m}\mu_j a_{.j}$$

δηλαδή τό διάνυσμα $a_{.1}$ εἶναι γραμμικός συνδυασμός τῶν διανυσμάτων $a_{.j}$, $j = 2,\ldots\ldots,m$.

Παράδειγμα 2.

Ἂν ἔχουμε τά διανύσματα

$$a_{.1} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad a_{.2} = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}, \quad a_{.3} = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}, \quad a_{.4} = \begin{bmatrix}8\\5\\9\end{bmatrix}$$

καί ἄν $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -1$ τότε

$$\sum_{j=1}^{4}\lambda_j a_{.j} = \underline{o}$$

Ἀφοῦ στή σχέση αὐτή ὅλα τά λ_j εἶναι διαφορετικά ἀπό τό μηδέν τά διανύσματα $a_{.j}$ εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένα. Ἐξάλλου τό πρῶτο διάνυσμα, στό παράδειγμα αὐτό, μπορεῖ νά γραφτῆ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν ὑπόλοιπων τριῶν ὡς ἑξῆς

$$a_{.1} = -2a_{.2} - a_{.3} + a_{.4}$$

Β ά σ η τοῦ Εὐκλείδειου χώρου E^n εἶναι ἕνα σύστημα ἀπό γραμμικά ἀνεξάρτητα διανύσματα μέ γραμμικούς συνδυασμούς τῶν ὁποίων μπορεῖ νά παραχθῆ ὁλόκληρος ὁ χῶρος.

Π.χ. μιά βάση γιά τό E^3 εἶναι τό σύστημα τῶν τριῶν διανυσμάτων: $e'_{.1}=(1,0,0)$, $e'_{.2}=(0,1,0)$ καί $e'_{.3}=(0,0,1)$.

Πολλά θεωρήματα μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν σχετικά μέ τή γραμμική ἐξάρτηση. Ἀρκούμαστε σ'ἕνα μόνο.

Θεώρημα: "Αν τό σύνολο τῶν r διανυσμάτων (διαστάσεως n) $a_{.1}, a_{.2}, \ldots, a_{.r}$ εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητο, τότε ὁποιοδήποτε ὑποσύνολο $a_{.1}, a_{.2}, \ldots, a_{.k}$ ($k < r$) ἀπό τά διανύσματα αὐτά εἶναι ἐπίσης γραμμικά ἀνεξάρτητο.

Ἀπόδειξη: "Ας ὑποθέσουμε ὅτι, ἀντίθετα μέ τό θεώρημα, τό ὑποσύνολο τῶν διανυσμάτων $a_{.1}, \ldots, a_{.k}$ εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένο, δηλαδή γιά τό ὑποσύνολο αὐτό ἰσχύει ἡ σχέση

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_{.j} = \underline{o}$$

στήν ὁποία μερικά ἀπό τά $\lambda_j \neq o$.

"Αν πάρουμε τό σύνολο τῶν r διανυσμάτων τότε

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{.j} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_{.j} + \sum_{j=k+1}^{r} \lambda_j a_{.j} = \underline{o}$$

"Αν ὑποθέσουμε ὅτι $\lambda_j=o$, $j=k+1, \ldots, r$, τότε, χρησιμοποιώντας τήν προηγούμενη σχέση, τό σύνολο τῶν r διανυσμάτων εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένο πράγμα πού εἶναι ἀντίθετο πρός τήν ὑπόθεση τοῦ θεωρήματος. Ἑπομένως τά $\lambda_j=o$, $j=1, \ldots, k$ καί τό ὑποσύνολο τῶν διανυσμάτων $a_{.1}, a_{.2}, \ldots, a_{.k}$ θά πρέπη νά εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητο.

Τά ὅσα ἀναφέραμε στό τμῆμα αὐτό τοῦ πρώτου κεφαλαίου σχετικά μέ τά διανύσματα ἀποτελοῦν μιά ἁπλή καί πολύ σύντομη ἀνασκόπηση τῶν βασικῶν ἐννοιῶν ἑνός μεγάλου καί σημαντικοῦ τομέα τῆς Γραμμικῆς Ἄλγεβρας. Γιά τούς σκοπούς ὅμως τοῦ βιβλίου αὐτοῦ καί ἰδιαίτερα τοῦ τμήματος πού ἀκολουθεῖ εἶναι ἀρκετά. Γιά τή διαγραμματική παράσταση τῶν διανυσμάτων καί, γενικότερα, γιά μιά πιό ἀναλυτική μελέτη τοῦ τομέα αὐτοῦ παραπέμπουμε τόν ἀναγνώστη στά βιβλία τῶν Στεριώτη (1969),(1970) καί Γκλάβα (1967).

II. Μῆτρες

Μ ή τ ρ α (ἤ Πίνακας, Matrix) εἶναι μιά ὀρθογώνια κατάταξη πραγματικῶν ἀριθμῶν σέ γραμμές καί στῆλες. Οἱ μῆτρες συμβολίζονται μέ διάφορους τρόπους. Ὁ πιό συνηθισμένος στή Θεωρητική Οἰκονομετρία εἶναι ὁ συμβολισμός μέ τά κεφαλαῖα γράμματα τοῦ Λατινικοῦ ἀλφαβήτου. Ἔτσι γιά μιά μήτρα X μέ T γραμμές καί n στῆλες γράφουμε

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots\cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots\cdots\cdots & x_{Tn} \end{bmatrix}$$

καί λέμε ὅτι ἡ μήτρα εἶναι διαστάσεων $T\mathrm{x}n$.

Οἱ ἀριθμοί x_{ij}, $i=1,\ldots\ldots,T$; $j=1,\ldots\ldots,n$ ὀνομάζονται στοιχεῖα τῆς μήτρας. Ὁ πρῶτος δείχτης $i=1,\ldots\ldots,T$ προσδιορίζει τή γραμμή καί ὁ δεύτερος $j=1,\ldots,n$ τή στήλη τῆς μήτρας στήν ὁποία βρίσκεται τό κάθε στοιχεῖο.

Ἄλλοι τρόποι συμβολισμοῦ (στούς ὁποίους χρησιμοποιεῖται τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο x_{ij}) τῶν μητρῶν εἶναι οἱ ἑξῆς:

$$X = \{x_{ij}\} = \| x_{ij} \|$$

Μιά μήτρα μπορεῖ νά γραφτῆ εἴτε σάν μιά γραμμή ἀπό διανύσματα-στῆλες εἴτε σάν μιά στήλη ἀπό διανύσματα-γραμμές. Ἀκολουθώντας τό συμβολισμό πού υἱοθετήσαμε γιά τήν περίπτωση τῆς γραμμικῆς ἐξαρτήσεως διανυσμάτων μποροῦμε νά γράφουμε τή μήτρα X ὡς ἑξῆς:

$$X = (x_{.1}, x_{.2}, \ldots\ldots, x_{.n}) = \begin{bmatrix} x_{1.} \\ x_{2.} \\ \vdots \\ x_{T.} \end{bmatrix}$$

ὅπου τά $x_{.j}$, $j=1,\ldots\ldots,n$ εἶναι τά n διανύσματα-στῆλες καί τά $x_{i.}$, $i=1,\ldots\ldots,T$ τά T διανύσματα-γραμμές πού ἀποτελοῦν τή μήτρα.

Τ ε τ ρ α γ ω ν ι κ ή (Square) εἶναι ἡ μήτρα ἐκείνη στήν ὁποία ὁ ἀριθμός τῶν γραμμῶν εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν στηλῶν.

Ἀ ν ά σ τ ρ ο φ η Μ ή τ ρ α εἶναι ἡ μήτρα στήν ὁποία τή θέση τῶν στηλῶν κατέχουν οἱ γραμμές καί τή θέση τῶν γραμμῶν οἱ στῆλες τῆς ἀρχικῆς μήτρας. Ἡ ἀνάστροφη μήτρα συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$X' = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{T1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{Tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{Tn} \end{bmatrix} = \{x_{ij}\}' = \{x_{ji}\} =$$

$$\begin{bmatrix} x'_{.1} \\ x'_{.2} \\ \vdots \\ x'_{.n} \end{bmatrix} = (x'_{1.}\,,\ x'_{2.}\,,\ \ldots\ldots, x'_{T.})$$

Ἑπομένως ἐνῶ ἡ μήτρα X εἶναι Txn διαστάσεων ἡ μήτρα X' εἶναι nxT διαστάσεων. Ἐδῶ πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι στίς διαστάσεις τό πρῶτο γράμμα θά ἀναφέρεται πάντα στόν ἀριθμό τῶν γραμμῶν καί τό δεύτερο στόν ἀριθμό τῶν στηλῶν τῆς μήτρας.

Ἀριθμητικός Πολλαπλασιασμός εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός ὅλων τῶν στοιχείων τῆς μήτρας μέ τόν ἴδιο ἀριθμό. Π.χ.

$$\lambda X = \begin{bmatrix} \lambda x_{11} & \cdots\cdots & \lambda x_{1n} \\ \lambda x_{21} & \cdots\cdots & \lambda x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda x_{T1} & \cdots\cdots & \lambda x_{Tn} \end{bmatrix} = \{\lambda x_{ij}\} = \| \lambda x_{ij} \|$$

Ἰσότητα (Equality) μητρῶν. Δυό μῆτρες X καί W λέγονται ἴσες ἄν ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις (ἄς ποῦμε Txn) καί ἄν ὅλα τά στοιχεῖα τους εἶναι ἴσα, δηλαδή

$$X = W \Leftrightarrow x_{ij} = w_{ij} \quad \forall \quad i,j$$

ὅπου τό σύμβολο $\forall$ σημαίνει "γιά καθένα".

Πρόσθεση Μητρῶν (Matrix Addition) Τό ἄθροισμα δύο μητρῶν πού ἔχουν τόν ἴδιο ἀριθμό γραμμῶν καί στηλῶν εἶναι ἴσο μέ μιά ἄλλη μήτρα (μέ ἐπίσης τόν ἴδιο ἀριθμό γραμμῶν καί στηλῶν) πού στοιχεῖα της ἔχει τό ἄθροισμα τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τῶν δύο μητρῶν.

Ἄν π.χ. P καί R εἶναι δυό μῆτρες διαστάσεων Txn τότε τό ἄθροισμά τους εἶναι ἡ Txn μήτρα

$$K = P + R = \{k_{ij}\} = \{p_{ij} + r_{ij}\}$$

Παράδειγμα: Ἄν

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{τότε} \quad K = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Ἂν $X = W$ τότε

$X - W = O$

Ὅπου τό O εἶναι ἡ μ η δ ε ν ι κ ή (null) μήτρα, δηλαδή ἡ μήτρα πού ἔχει ὅλα τά στοιχεῖα της ἴσα μέ τό μηδέν καί πού οἱ διαστάσεις της εἶναι οἱ ἴδιες μέ τίς διαστάσεις τῶν μητρῶν X καί W.

Π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς Μ η τ ρ ῶ ν (Matrix Multiplication). Ὁ πολλαπλασιασμός δύο μητρῶν τότε μόνο εἶναι δυνατός ὅταν ὁ ἀριθμός τῶν στηλῶν τῆς πρώτης μήτρας εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν γραμμῶν τῆς δεύτερης.

Ἂν ἔχουμε τή mxn μήτρα A καί τήν nxr μήτρα B τότε τό γινόμενο

$$C = AB$$

εἶναι μιά mxr μήτρα πού τά στοιχεῖα της ὑπολογίζονται μέ πολλαπλασιασμό τῶν στοιχείων τῶν μητρῶν A καί B σύμφωνα μέ τόν κανόνα

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

ὅπου c_{ij} εἶναι τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας-γινομένου C.

Τό γινόμενο δύο μητρῶν μπορεῖ νά ἐκφραστῆ σάν μιά μήτρα πού στοιχεῖα της ἔχει τά ἐσωτερικά γινόμενα τῶν διανυσμάτων στοιχείων τῶν δύο μητρῶν. Στήν περίπτωση τῶν μητρῶν A καί B ἔχουμε

$$AB = \begin{bmatrix} a_{1.} \\ a_{2.} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m.} \end{bmatrix} (b_{.1}, b_{.2}, \ldots, b_{.r}) = \begin{bmatrix} a_{1.}b_{.1} & \cdots\cdots & a_{1.}b_{.r} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m.}b_{.1} & \cdots\cdots & a_{m.}b_{.r} \end{bmatrix}$$

$$= C = \{c_{ij}\}$$

Μιά είδική περίπτωση πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἐκείνη στήν ὁποία πολλαπλασιάζαμε μιά μήτρα (ἔστω τήν Txn μήτρα X) μέ ἕνα διάνυσμα (ἔστω τό b διαστάσεως n , πού μπορεῖ νά θεωρηθῆ σάν μήτρα διαστάσεων nx1). Τότε τό γινόμενο εἶναι ἕνα διάνυσμα (ἔστω **y**) διαστάσεως T (πού μπορεῖ νά θεωρηθῆ καί σάν μήτρα διαστάσεων Tx1), δηλαδή

$$\mathbf{y} = Xb$$

Τό διάνυσμα αὐτό τό συναντᾶμε πολλές φορές στή Θεωρητική Οἰκονομετρία.

Παραδείγματα: Ἔστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

τότε

$$C = AB = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 11 & 10 & 17 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{y} = Xb = \begin{bmatrix} 11 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Ἐφόσον μποροῦμε νά γράφουμε τίς μῆτρες σάν διανύσματα-στῆλες ἤ διανύσματα-γραμμές ἐξυπακούεται ὅτι καί γι' αὐτές ἰσχύουν ἰδιότητες παρόμοιες μέ ἐκεῖνες πού παραθέσαμε στό προηγούμενο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ. Πιό συγκεκριμένα:

Ἄν ἔχουμε τίς μῆτρες

$$A \quad mxn , \quad B \quad nxr , \quad C \quad rxk$$

τότε ἰσχύει, γιά τόν πολλαπλασιασμό τους, ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα. Δηλαδή

$$(AB)C = A(BC)$$

καί τοῦτο διότι τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τοῦ γινομένου μπορεῖ νά γραφτῆ κατά δυό τρόπους:

$$\sum_r \left(\sum_k a_{ik} b_{kr}\right) c_{rj} = \sum_k a_{ik} \left(\sum_r b_{kr} c_{rj}\right)$$

Ἐπιπλέον ἄν ἔχουμε τή nxr μήτρα G τότε

$$A(B + G) = AB + AG$$

διότι

$$\sum_k a_{ik}(b_{kj} + g_{kj}) = \sum_k a_{ik} b_{kj} + \sum_k a_{ik} g_{kj}$$

Μετά τόν όρισμό τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν ἀποδείχνονται εὔκολα τά ἀκόλουθα:

"Αν $K = P + R$ τότε $K' = P' + R'$

διότι

$$k_{ji} = p_{ji} + r_{ji} = p'_{ij} + r'_{ij} = k'_{ij}$$

"Αν $C = AB$ τότε $C' = B'A'$

διότι $c'_{ij} = c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k a'_{kj} b'_{ik} = \sum_k b'_{ik} a'_{kj}$

Τέλος πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι γενικά

$$AB \neq BA .$$

Ἐκτός ἀπό τή μηδενική καί τήν τετραγωνική ἔχουμε ἀκόμα καί τίς ἑξῆς ειδικές μῆτρες:

Τ α υ τ ο τ ι κ ή (Identity) ἤ μοναδιαία μήτρα εἶναι ἡ τετραγωνική μήτρα πού ὅλα τά στοιχεῖα τῆς κύριας διαγωνίου της εἶναι ἴσα μέ τή μονάδα ἐνῶ ὅλα τά ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν. Ἡ ταυτοτική μήτρα παριστάνεται μέ τούς ἑξῆς τρόπους:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 & 1 \end{bmatrix} = (e_{.1}, e_{.2}, \ldots\ldots, e_{.n})$$

$$= \{\delta_{ij}\} = \|\delta_{ij}\|$$

ὅπου τό δ_{ij} εἶναι τό δέλτα τοῦ Kronecker καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ὅταν } & i=j \\ 0 \text{ ὅταν } & i \neq j \end{cases} \; ; \; i,j = 1,\ldots\ldots,n$$

καί τά $e_{.j}$ εἶναι τά διανύσματα πού μόνο ἡ συντεταγμένη στή θέση j εἶναι ἴση μέ τή μονάδα ἐνῶ ὅλες οἱ ἄλλες συντεταγμένες τους εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν. Ὁ δείχτης n (πού συνήθως παραλείπεται) δηλώνει τή διάσταση τῶν διανυσμάτων $e_{.j}$.

Ἡ mxn μήτρα A δέν ἀλλάζει ὅταν πολλαπλασιαστῆ ἀπό τά δεξιά μέ τήν ταυτοτική μήτρα I_n καί ἀπό τά ἀριστερά μέ τήν ταυτοτική μήτρα I_m.

Δ ι α γ ώ ν ι α (diagonal) μήτρα εἶναι ἡ τετραγωνική μήτρα πού ὅλα τά στοιχεῖα της εἶναι μηδενικά ἐκτός ἀπό τά στοιχεῖα τῆς κύριας διαγωνίου της. Ἡ nxn διαγώνια μήτρα D γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$D = \{d_i \delta_{ij}\} = (d_1 e_{.1}, \ d_2 e_{.2}, \ \ldots\ldots, \ d_n e_{.n})$$

Β α θ μ ω τ ή (Scalar) μήτρα εἶναι ἡ διαγώνια μήτρα πού ὅλα τά μή μηδενικά στοιχεῖα της εἶναι ἴσα. Ἡ μήτρα αὐτή γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$S = \{\lambda \delta_{ij}\} = (\lambda e_{.1}, \lambda e_{.2}, \ldots\ldots\ldots, \lambda e_{.n}) = \lambda I_n$$

Δ υ ν ά μ ε ι ς Μητρῶν. Ἄν ἔχουμε μιά τετραγωνική μήτρα A τότε γράφουμε

$$A^n = AA\ldots\ldots\ldots A \quad (n \text{ φορές})$$

Ἄν ἡ τετραγωνική μήτρα εἶναι καί διαγώνια τότε

$$D^n = \{d_i^n \delta_{ij}\}$$

Ὅταν ἔχουμε τετραγωνικές μῆτρες μποροῦμε νά ὁρίσουμε τό πολυώνυμο-μήτρα

$$\lambda_n A^n + \lambda_{n-1} A^{n-1} + \ldots\ldots + \lambda_o I \equiv \sum_{j=o}^{n} \lambda_j A^j$$

ὅπου $A^o \equiv I$.

Ἐπιπλέον μποροῦμε νά ὁρίσουμε τή μήτρα

$$(I + A)^n = I + nA + \frac{n(n-1)}{2!} A^2 + \ldots\ldots + A^n$$

Ταυτοδύναμη (Idempotent) μήτρα εἶναι ἡ τετραγωνική μήτρα Q πού ἄν πολλαπλασιαστῆ μέ τόν ἑαυτό της παραμένει ἀμετάβλητη, δηλαδή

$$QQ = Q^2 = Q$$

Π.χ. Μιά ταυτοδύναμη μήτρα εἶναι ἡ ἑξῆς

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Στίς μῆτρες αὐτές θά ἐπανέλθουμε στό τέταρτο κεφάλαιο.

Συμμετρική Μήτρα εἶναι ἡ μήτρα πού εἶναι ἴση μέ τήν ἀνάστροφή της, δηλαδή

$$A = A' \text{ ή } \{a_{ij}\} = \{a_{ji}\}$$

Τό μέγιστο πλῆθος τῶν διαφορετικῶν στοιχείων μιᾶς συμμετρικῆς μήτρας εἶναι ἴσο μέ

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Π.χ. ἡ μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

εἶναι συμμετρική καί ὁ ἀριθμός τῶν διαφορετικῶν στοιχείων της εἶναι ἴσος μέ

$$5 < \frac{3x4}{2} = 6$$

διότι ἡ πρώτη καί δεύτερη θέση τῆς διαγωνίου τῆς μήτρας αὐτῆς καταλαμβάνονται ἀπό τή μονάδα.

Ἀντισυμμετρική (Skew Symmetric) μήτρα εἶναι ἐκείνη γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἡ σχέση

$$A = -A'$$

Ἡ ἀντισυμμετρική μήτρα εἶναι ἐπίσης καί τετραγωνική καί ἐφόσον $a_{ij}=-a_{ij}$ τά στοιχεῖα τῆς κύριας διαγωνίου της a_{ii} εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν.

Μιά ἀντισυμμετρική μήτρα εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 6 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Κ ά τ ω Τ ρ ι γ ω ν ι κ ή(Lower Triangular) εἶναι ἡ τετραγωνική ἐκείνη μήτρα πού ἔχει τά στοιχεῖα $a_{ij}=0$ γιά $j > i$, ὅπως π.χ. ἡ μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ἄ ν ω τ ρ ι γ ω ν ι κ ή (Upper Triangular) εἶναι ἡ τετραγωνική ἐκείνη μήτρα πού ἔχει τά στοιχεῖα $a_{ij}=0$ γιά $i > j$, ὅπως π.χ. ἡ μήτρα

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ὑ π ο μ ῆ τ ρ ε ς (Submatrices). Ἄν ἀνάμεσα σέ δυό γραμμές μιᾶς μήτρας σύρουμε μιά διακεκομένη ὁριζόντια γραμμή καί ἀνάμεσα σέ δυό στῆλες μιά διακεκομένη κάθετη γραμμή ,ἡ (ἄς ποῦμε 4x5) μήτρα A ἐμφανίζει τήν ἑξῆς μορφή

$$A = \left[\begin{array}{cc:ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]$$

Ἄν θέσουμε

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}$$

Τότε ή μήτρα A μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Οἱ μῆτρες A_{ij} ὀνομάζονται ὑπομῆτρες. Οἱ ὑπομῆτρες μπορεῖ νά θεωρηθοῦν σάν στοιχεῖα τῆς μήτρας A καί γι'αὐτές ἰσχύουν κανόνες παρόμοιοι μέ ἐκείνους πού δώσαμε πιό πάνω. Εἰδικότερα:

"Αν ἔχουμε μιά ἄλλη μήτρα

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

καί ἐφόσον οἱ διαστάσεις τῶν B_{ij} εἶναι οἱ ἴδιες μέ τίς διαστάσεις τῶν A_{ij} τότε

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix}$$

ὅπου γιά τά ἀθροίσματα $A_{ij}+B_{ij}$ ἰσχύουν τά ὅσα εἴπαμε γιά τήν πρόσθεση τῶν μητρῶν.

Γιά τόν πολλαπλασιασμό μητρῶν πού ἔχουν σάν στοιχεῖα τους ὑπομῆτρες στό συνηθισμένο κανόνα θά πρέπη νά προσθέσουμε ὅτι οἱ ὑπομῆτρες πρέπει νά ἔχουν τέτοιες διαστάσεις ὥστε νά εἶναι δυνατός ὁ πολλαπλασιασμός τους. Π.χ. ἄν ἔχουμε τή μήτρα

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ \hdashline g_{31} & g_{32} & g_{33} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} \end{array}\right]$$

Τότε τό γινόμενο AG μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$AG = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}G_{11}+A_{12}G_{21} \\ A_{21}G_{11}+A_{22}G_{21} \end{bmatrix}$$

Τέλος ή ἀνάστροφη τῆς μήτρας A εἶναι ή

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} \\ A'_{12} & A'_{22} \end{bmatrix}$$

Παραδείγματα: "Αν ἔχουμε τίς μήτρες

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{array}\right], \quad G = \left[\begin{array}{cc} 5 & 4 \\ \hline 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{array}\right]$$

τότε

$$AG = \begin{bmatrix} A_{11}G_{11}+A_{12}G_{21} \\ A_{21}G_{11}+A_{22}G_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(5,4) + (1,2)\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}(5,4) + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 29 \\ 93 & 1o1 \\ 126 & 137 \end{bmatrix}$$

καί

$$A' = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{array}\right]' = \left[\begin{array}{c|c} (1)' & \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}' \\ \hline (1,2)' & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}' \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Οἱ ὁρισμοί πού δώσαμε γιά τίς βαθμωτές, διαγώνιες, ἄνω τριγωνικές καί κάτω τριγωνικές μῆτρες ἐπεκτείνονται καί στίς μῆτρες μέ στοιχεῖα ὑπομῆτρες.

Τόν σπουδαστή πού θέλει νά μελετήση ἀναλυτικότερα καί βαθύτερα τίς ἔννοιες πού ἐκθέτουμε στό κεφάλαιο τοῦτο παραπέμπουμε στά σχετικά κεφάλαια τῆς ἑλληνικῆς καί ξένης βιβλιογραφίας πού παραθέσαμε στόν πρόλογο τοῦ βιβλίου.

Στό κεφάλαιο τοῦτο δέν γίνεται κανένας λόγος γιά τήν ἀντίστροφη μήτρα, τή μήτρα δηλαδή ἐκείνη μέ τήν ὁποία ἄν πολλαπλασιαστῆ μιά ἄλλη μήτρα δίνουν γινόμενο τήν ταυτοτική μήτρα. Τό ἑπόμενο κεφάλαιο εἶναι ἀφιερωμένο στό θέμα αὐτό.

'Ασκήσεις

1.1 Ἔστω τά διανύσματα:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

'Αφοῦ βρῆτε τά

$$a'b \quad \text{καί} \quad a'c$$

ἐπαληθεῦστε ὅτι

$$a'b + a'c = a'(b + c)$$

1.2 Βρῆτε τό ἐσωτερικό γινόμενο, τά μήκη καί τή γωνία τῶν διανυσμάτων:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1.3 Δεῖξτε ἀναλυτικά ὅτι:

$$|a'b| \leq |a|\,|b|$$

Ἡ ἀνισότητα αὐτή εἶναι γνωστή σάν ἀνισότητα τοῦ Schwarz.

Ἐπαληθεῦστε τήν ἀνισότητα τοῦ Schwarz γιά τήν περίπτωση :

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

1.4 Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα σέ δυό διανύσματα ἔχει τίς παρακάτω ἰδιότητες:

(i) $|a - b| \geqslant 0$, καί $|a - b| = 0$ ἄν $a = b$

(ii) $|a - b| = |b - a|$

(iii) $|a - c| \leqslant |a - b| + |b - c|$

ὅπου a, b, c εἶναι διανύσματα μέ τήν ἴδια διάσταση.

1.5 Δίνονται μετρήσεις σέ δυό οἰκονομικές μεταβλητές μέ τή μορφή τῶν διανυσμάτων

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τό διάνυσμα (μέ n συντεταγμένες)

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}$$

βρῆτε

(i) Τούς ἀριθμητικούς μέσους τῶν x_i καί y_i

(ii) Τά μήκη καί τή γωνία τῶν διανυσμάτων πού ἔχουν σάν συντεταγμένες τους τίς ἀποκλίσεις τῶν τιμῶν ἀπό τούς ἀντίστοιχους μέσους, δηλαδή τῶν διανυσμάτων

$$x - \bar{x}i \quad \text{καί} \quad y - \bar{y}i$$

ὅπου $\bar{x}$ καί $\bar{y}$ εἶναι οἱ ἀριθμητικοί μέσοι τῶν x_i καί y_i.

(iii) Τό συντελεστή συσχετίσεως r.

Ποιά εἶναι ή σχέση ἀνάμεσα στή γωνία θ τῶν διανυσμάτων $x - \bar{x}i$ καί $y - \bar{y}i$ καί τοῦ r ;

Ἄν $\theta = \pi/2$ τί παρατηρήσεις ἔχετε νά κάνετε;

1.6 Βρῆτε τό k ὥστε τά διανύσματα:

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ k \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 2k \end{bmatrix}$$

νά εἶναι ὀρθογώνια.

Ὅταν προσδιορίσετε τό k βρῆτε τά μοναδιαῖα διανύσματα πού ἀντιστοιχοῦν στά διανύσματα a καί b.

Σημ. Μοναδιαῖο λέγεται ἕνα διάνυσμα ὅταν ἔχη μῆκος ἴσο μέ 1. π.χ. ἄν ἔχουμε τό διάνυσμα

$$a' = (a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n)$$

τότε τό διάνυσμα

$$a^{*\prime} = \frac{1}{|a|} a'$$

εἶναι μοναδιαῖο διότι

$$(a^{*\prime}a^*)^{\frac{1}{2}} = 1$$

1.7 Ἄν τά διανύσματα a,b καί c μέ τήν ἴδια διάσταση n εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητα, δεῖξτε ὅτι

(i) Τά διανύσματα

a+b-2c, a-b-c καί a+c

εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητα , καί ὅτι

(ii) Τά διανύσματα

$$a+b-3c, \quad a+3b-c \quad \text{καί} \quad b+c$$

εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένα.

1.8(i) Ἔστω τά διανύσματα

$$e_{.1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_{.2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_{.3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε διάνυσμα

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

στόν E^3 ἰσχύουν οἱ συνθῆκες

(α) $x = x_1 e_{.1} + x_2 e_{.2} + x_3 e_{.3}$

(β) $x' e_{.i} = x_i \, , \; i = 1,2,3$

(ii) Γενικότερα δεῖξτε ὅτι τά διανύσματα

$$e_{.j} \, , \; j = 1,2,\dots\dots,n$$

εἶναι μιά βάση στόν E^n.

1.9 Ἔστω οἱ μῆτρες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Νά βρεθοῦν τά παρακάτω

(i) $3A + 4B - 2C$

(ii) AB'

(iii) $AB'C$

1.10 Προσδιορίστε ὅλες τίς 2x2 μῆτρες πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση

$$A^2 = I$$

1.11 Ἄν ἔχουμε τίς μῆτρες A καί B κάτω ἀπό ποιές συνθῆκες ἰσχύουν οἱ παρακάτω ἰσότητες:

(i) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ii) $(A-B)(A+B)=(A+B)(A-B)=A^2 - B^2$

1.12 Ἔστω οἱ μῆτρες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Βρῆτε (i) Τίς μῆτρες A^2 καί B^2

Τί συμπέρασμα βγάζετε γιά τίς μῆτρες A^n καί B^n ;

(ii) Τή μήτρα C^n (C εἶναι ἡ παραπάνω $p \times p$ μήτρα)

1.13 Βρῆτε τίς δυνάμεις

A^2, A^3, A^4, A^5 καί B^2, B^3, B^4, B^5

ὅπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

Τί συμπέρασμα βγάζετε γιά τίς δυνάμεις A^r καί B^r ὅπου r εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ἀκέραιος ἀριθμός;

1.14 Δεῖξτε ὅτι κάθε τετραγωνική μήτρα A εἶναι τό ἄθροισμα μιᾶς συμμετρικῆς μήτρας S καί μιᾶς ἀντισυμμετρικῆς μήτρας T.

Ἐφαρμογή: Ποιές εἶναι οἱ μῆτρες S καί T στήν περίπτωση τῆς μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

1.15 Δεῖξτε ὅτι ἄν $AB = A$ καί $BA = B$ τότε οἱ μῆτρες A καί B εἶναι ταυτοδύναμες.

1.16 Προσδιορίστε τίς 2x2 μήτρες πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση

$$A^2 = A$$

1.17 Δεῖξτε ὅτι ἡ μήτρα

$$A = I_n - \frac{1}{n}\iota\iota'$$

(ὅπου τό διάνυσμα ι ὁρίστηκε στήν ἄσκηση 1.5) εἶναι ταυτοδύναμη.

"Αν ἔχουμε μετρήσεις γιά τρεῖς οἰκονομικές μεταβλητές x_i, y_i καί z_i πού σχηματίζουν τή μήτρα

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}$$

Τί ἀποτελέσματα δίνουν τά γινόμενα:

(i) AB
(ii) (AB)'(AB)

1.18 "Εστω ἡ μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Βρῆτε τήν A^n

(i) μέ τήν κλασσική μέθοδο, καί
(ii) μέ τή μέθοδο χωρισμοῦ σέ κατάλληλες ὑπομῆτρες

1.19 Οἱ μῆτρες A καί B χωρίζονται σέ ὑπομῆτρες ὡς ἑξῆς

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 0 \\ \hdashline 7 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 7 \\ 0 & 6 \\ \hdashline 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{array}\right]$$

Χρησιμοποιώντας τίς ὑπομῆτρες βρῆτε τό γινόμενο AB.

1.20 Ἔστω ἡ μήτρα

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 6 & 7 \\ \hdashline 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{array}\right]$$

Χρησιμοποιώντας τίς ὑπομῆτρες βρῆτε τήν A' .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΜΗΤΡΕΣ

Εἰσαγωγή

Πρίν ἀσχοληθοῦμε μέ τό πρόβλημα πού θέσαμε στό τέλος τοῦ πρώτου κεφαλαίου εἶναι ἀναγκαῖο νά ἐξετάσουμε ἀναλυτικά τήν ἔννοια τῆς ὁρίζουσας καθώς καί τίς ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν. Ὕστερα ἀπό τήν ἐξέταση αὐτή ἡ εὕρεση τῆς ἀντίστροφης μήτρας εἶναι σχετικά εὔκολη.

I. Ὁρίζουσες

Ἄν ἔχουμε τό σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

μποροῦμε νά τό γράψουμε, χρησιμοποιώντας τό συμβολισμό τοῦ προηγούμενου κεφαλαίου, ὡς ἑξῆς:

$$Ax = b$$

ὅπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Στό ἑπόμενο κεφάλαιο θά ἀσχοληθοῦμε διεξοδικά μέ τά συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων τοῦ τύπου αὐτοῦ. Ὅπως θά δοῦμε ἐκεῖ γιά τή λύση τοῦ παραπάνω συστήματος μᾶς χρειάζεται ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας A πού, ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τήν Ἄλγεβρα, γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

῾Η ὁρίζουσα, ἑπομένως, εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός πού ὑπολογίζεται ἀπό τά στοιχεῖα μιᾶς τετραγωνικῆς μήτρας. Ὅπως εἶναι φανερό ἡ ὁρίζουσα εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα γινομένων ἀπό στοιχεῖα τῆς μήτρας. Κάθε γινόμενο ἀποτελεῖται ἀπό τόσους παράγοντες ὅσους καί ἡ διάσταση τῶν διανυσμάτων τῆς τετραγωνικῆς μήτρας καί οἱ παράγοντες αὐτοί προέρχονται ἀπό διαφορετικές στῆλες καί διαφορετικές γραμμές τῆς μήτρας.

Στό παραπάνω παράδειγμα, καί στά δύο γινόμενα, ὁ πρῶτος δείχτης βρίσκεται στή φυσική του τάξη, ὁ δεύτερος στό πρῶτο γινόμενο εἶναι στή φυσική του τάξη ἐνῶ στό δεύτερο ἔχει γίνει ἐναλλαγή τοῦ 1 μέ τό 2. Μέ τήν ἐναλλαγή αὐτή ἔχει γίνει μιά παράβαση τῆς φυσικῆς τάξεως τῶν ἀριθμῶν 1 καί 2 (σχετικά μέ τίς παραβάσεις βλέπε καί Κριτικοῦ (1962) σελ.13-14). Ὅταν ὁ ἀριθμός τῶν παραβάσεων στό δεύτερο δείχτη τῶν ὅρων ἑνός γινομένου εἶναι ἄρτιος (τό μηδέν θεωρεῖται ἄρτιος ἀριθμός) τότε τό γινόμενο (πού εἶναι ἕνας ὅρος τοῦ ἀθροίσματος πού ἀποτελεῖ τήν ὁρίζουσα) ἔχει πρόσημο σύν ἐνῶ ὅταν ὁ ἀριθμός τῶν παραβάσεων αὐτῶν εἶναι περιττός τότε τό γινόμενο ἔχει πρόσημο πλήν. Μέ βάση τίς παρατηρήσεις αὐτές μποροῦμε νά δώσουμε ἕνα γενικό ὁρισμό τῆς ὁρίζουσας μιᾶς μήτρας.

῾Ο ρ ί ζ ο υ σ α (Determinant) μιᾶς μήτρας

$$A = \{a_{ij}\} = \| a_{ij} \|$$

nxn εἶναι ὁ ἀριθμός πού προκύπτει ἀπό τό ἀκόλουθο ἄθροισμα

$$\Sigma(\pm)a_{1i}a_{2j}\cdots\cdots\cdots a_{ns}$$

ὅπου τό πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος εἶναι ἴσο μέ τόν ἀριθμό n! τῶν μεταθέσεων τοῦ δεύτερου δείχτη i,j,.......s . Τό πρόσημο ἑνός ὅρου εἶναι σύν ὅταν ὁ ἀριθμός τῶν παραβάσεων στή μετάθεση τῶν δεύτερων δειχτῶν εἶναι ἄρτιος καί πλήν ὅταν εἶναι περιττός.

Γιά τήν ὁρίζουσα τῆς μήτρας A χρησιμοποιοῦνται τά ἑξῆς σύμβολα:

$$|A| = \det A = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ὁ συμβολισμός πού θά χρησιμοποιοῦμε τόσο στό βιβλίο αὐτό ὅσο καί στή Θεωρητική Οἰκονομετρία θά εἶναι κυρίως $|A|$ ἤ $\det A$.

Ἰ δ ι ό τ η τ ε ς τ ῶ ν Ὁ ρ ι ζ ο υ σ ῶ ν.

(i) Ἄν ἐναλλάξουμε τή θέση δύο στηλῶν μιᾶς μήτρας τότε ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας αὐτῆς ἀλλάζει πρόσημο.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἐναλλάσουμε τίς στῆλες r καί k $(r>k)$. Ἡ τοποθέτηση τῆς στήλης r στή θέση τῆς στήλης k δημιουργεῖ $r-k$ παραβάσεις ἐνῶ ἡ τοποθέτηση τῆς στήλης k στή θέση τῆς στήλης r δημιουργεῖ $r-k-1$ παραβάσεις. Τό σύνολο ἐπομένως τῶν νέων παραβάσεων πού δημιουργοῦνται εἶναι

$$(r-k) + (r-k-1) = 2(r-k)-1$$

δηλαδή ἕνας ἀριθμός πού εἶναι πάντα περιττός. Αὐτό σημαίνει ὅτι κάθε ὅρος τοῦ ἀθροίσματος πού ἀποτελεῖ τήν ὁρίζουσα τῆς μήτρας μετά τήν ἐναλλαγή τῶν στηλῶν r καί k ἀλλάζει πρόσημο καί ἐπομένως ὅλη ἡ ὁρίζουσα ἀλλάζει πρόσημο. Τά ἴδια ἰσχύουν ἄν ἐναλλάξουμε τή θέση δύο γραμμῶν μιᾶς μήτρας.

(ii) Ἄν δυό στῆλες (ἤ δυό γραμμές) μιᾶς μήτρας εἶναι ἴσες (δηλαδή τά διανύσματα εἶναι ἴσα) τότε ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας αὐτῆς εἶναι ἴση μέ τό μηδέν.

Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα(i) ἄν ἐναλλάξουμε τή θέση τῶν δύο αὐτῶν (ἴσων) στηλῶν (ἤ γραμμῶν) τό σημεῖο τῆς ὁρίζουσας ἀλλάζει. Οἱ δυό ὅμως αὐτές στη-λες (ἤ γραμμές) εἶναι ἴσες καί ἑπομένως

$$\det A = -\det A \text{ ἤ } 2\det A = 0 \text{ ἤ } \det A = 0.$$

(iii) Ἡ ὁρίζουσα τῆς ἀνάστροφης μήτρας εἶναι ἴση μέ τήν ὁρίζουσα τῆς ἀρχικῆς μήτρας, δηλαδή $\det A' = \det A$.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ὁρίζουσας πού δώσαμε

$$\det A' = \Sigma(\pm)a_{i1}a_{j2}\cdots\cdots a_{sn} = \det A$$

διότι ὁ ἀριθμός τῶν ὅρων τῆς $\det A'$ εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν ἀριθμό τῶν ὅρων τῆς $\det A$ καί τά πρόσημα τῶν ὅρων τῆς $\det A'$ εἶναι τά ἴδια μέ ἐκεῖνα τῆς $\det A$ ἀφοῦ στήν περίπτωση μιᾶς συγκεκριμένης μεταθέσεως τῶν δεικτῶν $i,j,\ldots,s$ ὁ ἀριθμός τῶν παραβάσεων τῶν πρώτων δεικτῶν τοῦ ὅρου τῆς $\det A'$ εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν παραβάσεων τῶν δεύτερων δεικτῶν τοῦ ὅρου τῆς $\det A$.

(iv) Ἄν πολλαπλασιάσουμε μιά $n\times n$ μήτρα A μέ ἕνα ἀριθμό λ τότε ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας λA πού προκύπτει εἶναι ἴση μέ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ ἀριθμητικοῦ πολλαπλασιασμοῦ μητρῶν ὁ ἀριθμός λ πολλαπλασιάζει ὅλα τά στοιχεῖα τῆς μήτρας A καί ἀφοῦ κάθε ὅρος τοῦ ἀθροίσματος πού ἀποτελεῖ τήν ὁρίζουσα περιλαμβάνει ἕνα στοιχεῖο ἀπό τήν κάθε γραμμή καί τήν κάθε στήλη τῆς μήτρας ἕπεται ὅτι, ἐφόσον ἡ μήτρα εἶναι $n\times n$, κάθε ὅρος τῆς ὁρίζουσας (καί ἑπομένως καί ἡ ἴδια ἡ ὁρίζουσα) πολλαπλασιάζεται μέ λ^n.

Ἄν $\lambda=-1$ τότε $\det(-A) = (-1)^n \det A$.

Ἐκτός ἀπό τίς παραπάνω, οἱ ὁρίζουσες ἔχουν καί ἄλλες ἰδιότητες στίς ὁποῖες θά ἀναφερθοῦμε πιό κάτω.

Ὑπολογισμός μιᾶς Ὁρίζουσας.

Ὑπάρχουν πολλοί τρόποι μέ τούς ὁποίους μποροῦμε νά βροῦμε τήν τιμή μιᾶς ὁρίζουσας. Ἕνας ἀπό τούς πιό συνηθισμένους εἶναι μέ προσημασμένες ἐλάσσονες ὁρίζουσες.

Ἐ λ ά σ σ ο ν α Ὁ ρ ί ζ ο υ σ α (Minor), πού ἀντιστοιχεῖ στό στοιχεῖο a_{ij}, εἶναι ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας ἐκείνης πού προκύπτει μετά τήν ἀπάλειφη τῆς γραμμῆς i καί τῆς στήλης j ἀπό τήν ἀρχική μήτρα καί θά τή συμβολίζουμε μέ τά γράμματα m_{ij} , $i,j = 1,\ldots$ $\ldots,n$.

Π.χ. ἡ ἐλάσσονα ὁρίζουσα πού ἀντιστοιχεῖ στό στοιχεῖο a_{11} εἶναι ἡ

$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Π ρ ο σ η μ α σ μ έ ν η Ἐ λ ά σ σ ο ν α (Cofactor), ἡ ἀντίστοιχη στό στοιχεῖο a_{ij}, εἶναι ἡ ἐλάσσονα m_{ij} πολλαπλασιασμένη μέ τόν ἀριθμό $(-1)^{i+j}$. Τίς προσημασμένες ἐλάσσονες θά τίς συμβολίζουμε μέ

$$a^{+}_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij} \;;\; i,j = 1,\ldots,n.$$

Χρησιμοποιώντας τούς ὁρισμούς αὐτούς μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν τιμή μιᾶς ὁποιασδήποτε ὁρίζουσας.

Ἡ ὁρίζουσα τῆς nxn μήτρας A εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν στοιχείων μιᾶς στήλης (ἤ μιᾶς γραμμῆς) μέ τίς ἀντίστοιχες προσημασμένες ἐλάσσονες. Δηλαδή

$$\det A = \sum_j a_{ij} a^{+}_{ij} = \sum_i a_{ij} a^{+}_{ij}$$

Στό πρῶτο ἄθροισμα χρησιμοποιοῦμε τά στοιχεῖα τῆς γραμμῆς i ἐνῶ στό δεύτερο τά στοιχεῖα τῆς στήλης j. Μέ τόν τρόπο αὐτό ὑπολογίζαμε μιά ὁρίζουσα τάξεως n χρησιμοποιώντας ὁρίζουσες τάξεως $n-1$.

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 15 \\ 6 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Ἄν χρησιμοποιήσουμε τά στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς τότε οἱ προσημασμένες ἐλάσσονες εἶναι:

$$a^{+}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 33, \quad a^{+}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 15 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 42$$

$$a^{+}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -34$$

καί ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας A εἶναι ἴση μέ

$$\det A = 1(33) + 2(42) + 3(-34) = 33+84-102 = 15$$

Ἐξάλλου ἄν χρησιμοποιήσουμε τά στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης οἱ προσημασμένες ἐλάσσονες εἶναι

$$a^{+}_{11} = 33 \ , \quad a^{+}_{21} = -9 \ , \quad a^{+}_{31} = 3$$

καί ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας A εἶναι ἴση μέ

$$\det A = 1(33) + 4(-9) + 6(3) = 15$$

Μετά τήν ἀνάπτυξη τοῦ τρόπου αὐτοῦ ὑπολογισμοῦ τῆς τιμῆς μιᾶς ὁρίζουσας, μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τίς ἑξῆς ἐπιπλέον ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν:

(v) Ἄν πολλαπλασιάσουμε τά στοιχεῖα τῆς γραμμῆς i τῆς $n\mathrm{x}n$ μήτρας A μέ τίς προσημασμένες ἐλάσσονες μιᾶς ἄλλης γραμμῆς (ἄς ποῦμε τῆς γραμμῆς $k \neq i$) καί προσθέσουμε τά γινόμενα, τότε τό ἄθροισμα πού προκύπτει εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν.

Ἡ ὁρίζουσα πού προκύπτει στήν περίπτωση αὐτή μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$\sum_j a_{ij} a^{+}_{kj}$$

αὐτό ὅμως εἶναι τό ἀνάπτυγμα μιᾶς ὁρίζουσας πού προέρχεται ἀπό μιά μήτρα στήν ὁποία οἱ γραμμές i καί k εἶναι ἴσες καί, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (ii) , ἡ ὁρίζουσα αὐτή εἶναι ἴση μέ τό μηδέν.

(vi) Ἄν στή γραμμή i μιᾶς μήτρας προσθέσουμε τό γινόμενο μιᾶς ἄλλης γραμμῆς (ἄς ποῦμε τῆς $k \neq i$) μέ ἕναν ἀριθμό λ ἡ τιμή τῆς ὁρίζουσας τῆς νέας μήτρας εἶναι ἴση μέ τήν τιμή τῆς ὁρίζουσας τῆς ἀρχικῆς μήτρας.

Γιά νά ἀποδείξουμε τήν ἰδιότητα αὐτή ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἀναπτύσουμε τήν ὁρίζουσα μέ τά στοιχεῖα τῆς νέας γραμμῆς. Ἡ ὁρίζουσα τότε εἶναι ἴση μέ

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + \lambda a_{kj})a^{+}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a^{+}_{ij} + \lambda\sum_{j=1}^{n} a_{kj}a^{+}_{ij} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a^{+}_{ij} = \det A$$

διότι, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (v),

$$\lambda\sum_{j=1}^{n} a_{kj}a^{+}_{ij} = 0$$

Οἱ ἰδιότητες (v) καί (vi) ἰσχύουν καί ὅταν, ἀντί γιά γραμμές, χρησιμοποιήσουμε στῆλες.

Μέ τή βοήθεια τῶν νέων αὐτῶν ἰδιοτήτων μποροῦμε νά ἁπλοποιήσουμε τόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς μιᾶς ὁρίζουσας τάξεως n . Ἀντί νά χρησιμοποιήσουμε, στήν πρώτη φάση γιά τήν εὕρεση τῆς τιμῆς τῆς ὁρίζουσας, n προσημασμένες ἐλάσσονες ὁρίζουσες τάξεως n-1 μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε μόνο μιά. Αὐτό μπορεῖ νά γίνη ὡς ἑξῆς:

Πρῶτα διαιροῦμε μιά γραμμή (ἄς ποῦμε τήν πρώτη) μέ τό πρῶτο στοιχεῖο της (πού ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδέν), δηλαδή γράφουμε

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots\cdots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Μετά ἀφαιροῦμε ἀπό ὅλες τίς στῆλες (ἐκτός ἀπό τήν πρώτη) πολλαπλάσια τῆς πρώτης στήλης ὥστε τά στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς (ἐκτός ἀπό τό πρῶτο) νά μηδενιστοῦν. Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (vi) αὐτή ἡ ἐνέργεια δέν μεταβάλλει τήν τιμή τῆς ὁρίζουσας. Μετά τό μηδενισμό ὅλων τῶν στοιχείων (ἐκτός ἀπό τό πρῶτο) τῆς πρώτης στήλης ἡ ὁρίζουσα εἶναι ἴση μέ

$$a_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

ὅπου

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{i1} \quad ; i,j = 2,\ldots,n$$

Μέ τόν τρόπο αὐτό ἔχουμε νά ἀναπτύξουμε μιά μόνο ὁρίζουσα τάξεως n-1 . Μέ τήν ἴδια μέθοδο μποροῦμε νά προχωρήσουμε σέ μιά ὁρίζουσα τάξεως n-2 κ.ο.κ. Ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι γνωστή στά ἀγγλικά σάν Pivotal Condensation καί μπορεῖ νά ἀποδοθῆ στά ἑλληνικά σάν μέθοδος τῆς διαδοχικῆς συμπτύξεως.

Παράδειγμα: Γιά νά ὑπολογίσουμε τήν ὁρίζουσα τῆς μήτρας τοῦ προηγούμενου παραδείγματος, δηλαδή τήν ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 15 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

μέ τήν παραπάνω μέθοδο διαιροῦμε πρῶτα τή πρώτη γραμμή μέ τό πρῶτο στοιχεῖο της πού εἶναι ὁ ἀριθμός 1 , πράξη πού ἀφήνει τή γραμμή αὐτή ἀμετάβλητη. Μετά γιά νά μηδενίσουμε τό δεύτερο καί τρίτο στοιχεῖο τῆς πρώτης γραμμῆς ἀφαιροῦμε ἀπό τή δεύτερη στήλη τό διπλάσιο τῆς πρώτης καί ἀπό τήν τρίτη τό τριπλάσιο τῆς πρώτης, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3-3 \\ 4 & 9-8 & 15-12 \\ 6 & 5-12 & 12-18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & -6 \end{vmatrix}$$

Μέ τόν τρόπο αὐτό ἀντί γιά μιά ὁρίζουσα τρίτης ἔχομε μιά ὁρίζουσα δεύτερης τάξεως. Μετά ἐφαρμόζουμε καί πάλι τήν ἴδια μέθοδο, δηλαδή μηδενίζουμε τό δεύτερο στοιχεῖο τῆς πρώτης γραμμῆς τῆς παραπάνω ὁρίζουσας δεύτερης τάξεως, δηλαδή

$$1\begin{vmatrix} 1 & 3-3 \\ -7 & -6+21 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 15 \end{vmatrix} = 15$$

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό εἶναι τό ἴδιο πού βρήκαμε καί μέ τήν πρώτη μέθοδο.

Ἐκτός ἀπό τίς μεθόδους ὑπολογισμοῦ τῆς τιμῆς μιᾶς ὀρίζουσας πού ἀναφέραμε μέχρι τώρα ὑπάρχει καί μιά πιό γενική. Αὐτή εἶναι ἡ

Μέθοδος τοῦ Laplace. Μέ τή μέθοδο αὐτή, ἀντί νά ἀναπτύσουμε τήν ὀρίζουσα χρησιμοποιώντας μιά μόνο γραμμή ἤ μιά μόνο στήλη, ὅπως κάναμε μέχρι τώρα, χρησιμοποιοῦμε πολλές ταυτόχρονα γραμμές ἤ στῆλες. Ἐπομένως ἡ πρώτη μέθοδος πού ἐξετάσαμε μπορεῖ νά θεωρηθῆ σάν μιά εἰδική περίπτωση τῆς μεθόδου τοῦ Laplace.

Στή μέθοδο αὐτή ἀναφέρονται ἀναλυτικά οἱ Γκλάβας(1973), Aitken (1947) καί Hadley (1961). Στά συγγράμματα αὐτά παραπέμπουμε τόν ἀναγνώστη γιά μιά πλήρη ἀνάπτυξη τῆς μεθόδου τοῦ Laplace. Ἐδῶ θά περιοριστοῦμε σέ μιά ἁπλή σκιαγράφηση τῆς μεθόδου αὐτῆς.

Στή μέθοδο τοῦ Laplace χρησιμοποιοῦμε τίς ἔννοιες:

Συμπληρωματική ἐλάσσονα ὀρίζουσα (Complementary Minor) σέ μιά nxn μήτρα A εἶναι ἡ ὀρίζουσα τῆς ὑπομήτρας P πού απομένει ὅταν ἀπαλείψουμε m γραμμές ($i_1, \ldots, i_m$) καί m στῆλες($j_1, \ldots, j_m$). Οἱ γραμμές $i_1, \ldots, i_m$ καί οἱ στῆλες $j_1, \ldots, j_m$ καθορίζουν μέ τά κοινά τους στοιχεῖα μιά ὑπομήτρα N στήν ὁποία ἀντιστοιχεῖ ἡ ὀρίζουσα τῆς ὑπομήτρας P.

Προσημασμένη συμπληρωματική ἐλάσσονα (Complementary Cofactor) εἶναι ἡ ὀρίζουσα

$$\det M = (-1)^{\sum_{k=1}^{m}(i_k+j_k)} \det P$$

ὅπου ὁ δείχτης k ἀναφέρεται στίς γραμμές καί στῆλες πού ἀπαρτίζουν τή μήτρα N στήν ὁποία ἀντιστοιχεῖ ἡ detM.

Ἡ μέθοδος τοῦ Laplace δίνει τήν τιμή τῆς detA ὡς ἑξῆς

$$\det A = \sum_r (\det N_r)(\det M_r)$$

ὅπου τό σύνολο τῶν $\det N_r$ καί $\det M_r$ εἶναι ἴσο μέ τούς συνδυασμούς τῶν n στηλῶν τῆς μήτρας A ἀνά m, δηλαδή

$$\frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Παράδειγμα. Γιά νά γίνη σαφέστερη ἡ μέθοδος τοῦ Laplace παίρνουμε ἕνα ἁπλό παράδειγμα. Ἔστω ἡ μήτρα

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B & O \\ -I & D \end{bmatrix}$$

Ἄν ἀναπτύξουμε τήν ὁρίζουσα detA μέ τή μέθοδο τοῦ Laplace παίρνοντας τίς δυό τελευταῖες γραμμές (m=2) τότε r=1,....,6 διότι ὁ ἀριθμός τῶν συνδυασμῶν τῶν 4 στηλῶν τῆς μήτρας A ἀνά 2 εἶναι ἴσος μέ

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

Δίνουμε τώρα τίς ὁρίζουσες $\det N_r$ καί $\det M_r$

$$\det N_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \det M_1 = (-1)^{(3+1)+(4+2)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det N_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det M_2 = (-1)^{(3+1)+(4+3)} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det N_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \det M_3 = (-1)^{(3+1)+(4+4)} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det N_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \det M_4 = (-1)^{(3+2)+(4+3)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det N_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \quad \det M_5 = (-1)^{(3+2)+(4+4)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det N_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \det M_6 = (-1)^{(3+3)+(4+4)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Μιά ἁπλή ἐξέταση τῶν $\det N_r$ καί $\det M_r$ δείχνει ὅτι μόνο τό γινόμενο $\det N_6 \det M_6$ δέν εἶναι ἴσο πρός τό μηδέν. Ἑπομένως

$$\det A = \det N_6 \det M_6 = \det B \det D = (-2)(1) = -2$$

Χρησιμοποιώντας τή μέθοδο τοῦ Laplace μποτοῦμε νά ἀποδείξουμε μιά ἀκόμα ἰδιότητα τῶν ὁριζουσῶν:

(vii) Ἡ ὁρίζουσα ἑνός γινομένου μητρῶν εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τῶν ὁριζουσῶν τῶν μητρῶν πού ἀποτελοῦν τούς παράγοντες τοῦ γινομένου. Στήν περίπτωση τοῦ γινομένου δύο μητρῶν ἔχουμε

$$\det(BD) = (\det B)(\det D)$$

Ἡ ἀπόδειξη ξεκινᾶ ἀπό τή $2n \times 2n$ μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} B & O \\ -I & D \end{bmatrix}$$

καί ὅπως εἴδαμε στό παράδειγμα πού δώσαμε πιό πάνω

$$\det A = (\det B)(\det D)$$

ἐφόσον οἱ ὑπομῆτρες B, I καί D ἔχουν τίς ἴδιες διαστάσεις $n \times n$.

Ἄν τώρα πάρουμε τήν ὑπομήτρα

$$\begin{bmatrix} B \\ -I \end{bmatrix}$$

καί τήν πολλαπλασιάσουμε μέ τήν πρώτη στήλη τῆς μήτρας D καί προσθέσουμε τό γινόμενο στή στήλη $n+1$ τῆς μήτρας A καί συνεχίσουμε τήν ἴδια διαδικασία μέ τίς ὑπόλοιπες στῆλες τῆς μήτρας D προσθέτοντας τά γινόμενα διαδοχικά στίς στῆλες $n+2, n+3, \ldots, 2n$ ἔχουμε τελικά τή μήτρα:

$$\begin{bmatrix} B & BD \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

πού ή όρίζουσά της εἶναι, σύμφωνα μέ τήν ίδιότητα (vi) τῶν όριζουσῶν, ἴση μέ τήν όρίζουσα τῆς μήτρας A.

'Εφαρμόζοντας τή μέθοδο τοῦ Laplace ἔχουμε

$$\det \begin{vmatrix} B & BD \\ -I & 0 \end{vmatrix} = \det BD$$

έπομένως

$$\det A = \det(BD) = (\det B)(\det D)$$

πού εἶναι τό άποτέλεσμα πού θέλαμε νά άποδείξουμε.

'Η ίδιότητα αὐτή τῶν όριζουσῶν ίσχύει, ὅπως άναφέραμε πιό πάνω, καί γιά γινόμενα περισσοτέρων τῶν δύο μητρῶν.

Π.χ.

$$\det(A_1 A_2 \ldots\ldots\ldots A_m) = \det A_1 \det A_2 \ldots\ldots \det A_m =$$
$$= \prod_{j=1}^{m} \det A_j$$

Μέ βάση τίς μεθόδους ὑπολογισμοῦ τῆς τιμῆς μιᾶς όρίζουσας εἶναι εὔκολο νά ὑπολογίσουμε τίς όρίζουσες τῶν είδικῶν μητρῶν πού όρίσαμε στό τέλος τοῦ πρώτου κεφαλαίου. Σ'ὅλες τίς περιπτώσεις ὑποθέτουμε ὅτι οί μῆτρες εἶναι nxn.

'Η όρίζουσα τῆς ταυτοτικῆς μήτρας εἶναι ἴση μέ τή μονάδα, δηλαδή

$$\det I = 1$$

'Η όρίζουσα μιᾶς βαθμωτῆς μήτρας S εἶναι ἴση μέ

$$\det S = \lambda^n$$

"Αν μιά διαγώνια μήτρα D ἔχει γιά στοιχεῖα της τά d_i, i = 1,.....,n τότε

$$\det D = \prod_{i=1}^{n} d_i$$

"Αν ἔχουμε μιά ἄνω τριγωνική μήτρα R μέ στοιχεῖα r_{ii} στήν κύρια διαγώνιό της τότε

$$\det R = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$$

Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά μιά κάτω τριγωνική μήτρα.

Ἄν ἀντί γιά ἀριθμούς οἱ παραπάνω μῆτρες ἔχουν σάν στοιχεῖα τους ὑπομῆτρες τετραγωνικές τότε ἀνάλογοι κανόνες ἰσχύουν γιά τόν ὑπολογισμό τῶν ὁριζουσῶν τους μέ τήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τοῦ Laplace.

Π.χ. ἄν ἔχουμε τή μήτρα

$$L = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \Lambda \end{bmatrix}$$

τότε

$$\det L = (\det \Lambda)^n$$

Γιά τή μήτρα

$$P = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & D_n \end{bmatrix}$$

ἔχουμε

$$\det P = \prod_{i=1}^{n} \det D_i$$

Καί τέλος γιά τή μήτρα

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{n1} & \ldots & \ldots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

ἔχουμε

$$\det B = \prod_{i=1}^{n} \det B_{ii} \quad .$$

II. Ἀντίστροφες Μῆτρες

Ἄν ἔχουμε μιά τετραγωνική nxn μήτρα A ἀναζητοῦμε μιά ἄλλη μήτρα A^{-1}

τέτοια ὥστε
$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

Ἡ μήτρα A^{-1} ὀνομάζεται ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ η (Inverse) τῆς A καί ὑπάρχει ὅταν καί μόνο ὅταν $\det A \neq 0$, ὅταν δηλαδή ἡ μήτρα A δέν εἶναι ἰδιάζουσα. (Ὅταν $\det A = 0$ τότε ἡ μήτρα A λέγεται ἰ δ ι ά ζ ο υ σ α (singular) καί δέν εἶναι ἀντιστρέψιμη).

Γιά τόν ὑπολογισμό μιᾶς ἀντίστροφης μήτρας χρειαζόμαστε τήν προσαρτημένη μήτρα.

Π ρ ο σ α ρ τ η μ έ ν η Μ ή τ ρ α (Adjoint Matrix) εἶναι ἡ ἀνάστροφη τῆς μήτρας ἐκείνης πού σάν στοιχεῖα της ἔχει τίς προσημασμένες ἐλάσσονες ὀρίζουσες a^+_{ij}. Γιά τή μήτρα αὐτή χρησιμοποιοῦνται τά σύμβολα

$$A^+ = \operatorname{adj}A = \begin{bmatrix} a^+_{11} & a^+_{21} & \cdots\cdots & a^+_{n1} \\ a^+_{12} & a^+_{22} & \cdots\cdots & a^+_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a^+_{1n} & a^+_{2n} & \cdots\cdots & a^+_{nn} \end{bmatrix}$$

Ἄν τώρα πολλαπλασιάσουμε τή μήτρα A μέ τή μήτρα A^+ τό γινόμενό τους εἶναι ἴσο μέ

$$AA^+ = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^+_{11} & \cdots\cdots & a^+_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a^+_{1n} & \cdots\cdots & a^+_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}a^{+}_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}a^{+}_{2j} & \cdots\cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}a^{+}_{nj} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}a^{+}_{1j} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}a^{+}_{nj} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \det A & o & \cdots\cdots & o \\ o & \det A & \cdots\cdots & o \\ \vdots & & & \vdots \\ o & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I_n$$

Τό γινόμενο AA^{+} παίρνει τήν τελευταία αὐτή μορφή διότι, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (ν) τῶν ὁριζουσῶν

$$\sum_j a_{ij}a^{+}_{kj} = o \text{ ἄν } k \neq i$$

ἐπομένως ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ γινομένου πού βρίσκονται πάνω καί κάτω ἀπό τήν κύρια διαγώνιο εἶναι μηδενικά.

Τό ἀποτέλεσμα εἶναι τό ἴδιο ἄν ὑπολογίσουμε τό γινόμενο

$$A^{+}A = AA^{+} = I_n(\det A)$$

Ἐφόσον detA εἶναι ἕνας ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τό μηδέν μποροῦμε νά πολλαπλασιάσουμε τή μήτρα A^{+} καί τή μήτρα $I_n(\det A)$ μέ $\frac{1}{\det A}$

Ἄν γίνη αὐτό τότε

$$\left(\frac{A^{+}}{\det A}\right)A = A\left(\frac{A^{+}}{\det A}\right) = I_n$$

καί ἑπομένως ἡ ἀντίστροφη μήτρα πού ἀναζητούσαμε εἶναι ἡ

$$A^{-1} = \frac{A^{+}}{\det A}$$

Σάν παράδειγμα θά πάρουμε τή μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Μέ τή μέθοδο τοῦ Laplace βρήκαμε ὅτι

$$\det A = -2$$

Ἐκτός ἀπό τή $\det A$ πρέπει νά ὑπολογίσουμε, κατά τά γνωστά, τίς προσημασμένες ἐλάσσονες ὀρίζουσες a^{+}_{ij}. Μέ τίς ὀρίζουσες αὐτές σχηματίζουμε τή μήτρα

$$A^{+} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -7 & -6 & 2 \\ -11 & 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Ἑπομένως ἡ ἀντίστροφη τῆς μήτρας A εἶναι ἴση μέ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{+} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & -7 & -6 & 2 \\ -11 & 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{15}{2} & \frac{7}{2} & 3 & -1 \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Γιά νά ἐλέγξουμε τό ἀποτέλεσμα αὐτό πολλαπλασιάζουμε τή μήτρα A μέ τήν ἀντίστροφή της A^{-1} καί βρίσκουμε ὅτι

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

'Ι δ ι ό τ η τ ε ς τ ῶ ν ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ω ν μ η τ ρ ῶ ν.

(a) Γιά κάθε ἀντιστρέψιμη μήτρα ὑπάρχει μιά καί μόνο μιά ἀντίστροφη μήτρα.

"Ας ὑποθέσουμε ὅτι γιά τή μήτρα A ὑπάρχει ἐκτός ἀπό τήν A^{-1} καί μιά ἄλλη ἀντίστροφη μήτρα B πού εἶναι διαφορετική ἀπό τήν A^{-1}. Τότε σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς ἀντίστροφης μήτρας

$$BA = AB = I$$

"Αν τώρα πάρουμε τήν ἐξίσωση

$$BA = I$$

καί τήν πολλαπλασιάσουμε ἀπό τά δεξιά μέ τήν A^{-1} ἤ τήν ἐξίσωση

$$AB = I$$

καί τήν πολλαπλασιάσουμε ἀπό τά ἀριστερά μέ τήν A^{-1} ἔχουμε

$$BAA^{-1} = A^{-1}AB = B = A^{-1}$$

'Επομένως δέν ὑπάρχει ἄλλη ἀντίστροφη μήτρα τῆς A ἐκτός ἀπό τήν A^{-1} .

(b) 'Η ἀντίστροφη μήτρα μιᾶς ἀνάστροφης μήτρας εἶναι ἴση μέ τήν ἀνάστροφη μήτρα τῆς ἀντίστροφης μήτρας.

'Η ἀντίστροφη μήτρα τῆς ἀνάστροφης μήτρας A' εἶναι ἡ $(A')^{-1}$ δηλαδή

$$A'(A')^{-1} = I$$

"Αν τώρα ἀναστρέψουμε καί τίς δυό πλευρές τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς καί λάβουμε ὑπόψη ὅτι $I = I'$ καί ὅτι $(A')' = A$ τότε

$$\left[(A')^{-1}\right]' A = I$$

῎Αν πολλαπλασιάσουμε καί τίς δυό πλευρές τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἀπό τά δεξιά μέ A^{-1} ἔχουμε

$$\left[(A')^{-1}\right]' = A^{-1}$$

Τέλος ἄν ἀναστρέψουμε καί τίς δυό πλευρές τῆς τελευταίας ἐξισώσεως ἔχουμε τό ζητούμενο ἀποτέλεσμα, δηλαδή

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

(c) Τό ἀντίστροφο τοῦ γινομένου δυό ἀντιστρέψιμων μητρῶν εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς ἀντίστροφης τῆς δεύτερης μήτρας μέ τήν ἀντίστροφη τῆς πρώτης, δηλαδή

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό μιᾶς ἀντίστροφης μήτρας

$$(AB)(AB)^{-1} = I = (AB)^{-1}(AB)$$

῎Αν τώρα ἀντικαταστήσουμε τή μήτρα $(AB)^{-1}$ μέ $B^{-1}A^{-1}$ ἔχουμε

$$ABB^{-1}A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}= I \text{ καί } B^{-1}A^{-1}AB=B^{-1}IB=B^{-1}B = I$$

῎Αρα $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(d) Ἡ ἀντίστροφη μιᾶς ἀντίστροφης μήτρας εἶναι ἴση μέ τήν ἀρχική μήτρα, δηλαδή

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Ἡ ἰδιότητα αὐτή εἶναι συνέπεια τοῦ γεγονότος ὅτι

$$(A^{-1})(A^{-1})^{-1} = I = (A^{-1})A$$

᾿Αφοῦ ἡ μήτρα A^{-1} ὑπάρχει στά ἀριστερά τόσο τοῦ πρώτου ὅσο καί τοῦ τελευταίου γινομένου ἕπεται ὅτι

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(e) Τό γινόμενο δυό μητρῶν πού δέν εἶναι ἰδιάζουσες δέν μπορεῖ νά εἶναι ἴσο μέ τή μηδενική μήτρα.

῎Ας ὑποθέσουμε ὅτι, ἀντίθετα μέ τήν πρότασή μας, τό γινόμενο δυό μητρῶν A καί B πού δέν εἶναι ἰδιάζουσες εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν, δηλαδή

$$AB = O$$

'Εφόσον οἱ μῆτρες δέν εἶναι ἰδιάζουσες θά εἶναι ἀντιστρέψιμες. Πολλαπλασιάζοντας ἀπό τά ἀριστερά τήν παραπάνω ἐξίσωση μέ A^{-1} ἔχουμε

$$A^{-1}AB = B = O$$

δηλαδή ἡ μήτρα B εἶναι μηδενική καί ἄρα ἰδιάζουσα, ἀποτέλεσμα πού προσκρούει στήν ἀρχική μας ὑπόθεση.

'Α ν τ ί σ τ ρ ο φ η μ ή τ ρ α ς μ έ σ τ ο ι χ ε ῖ α ὑ π ο μ ῆ τ ρ ε ς (Inverse of a Partitioned Matrix).

Σέ πολλές περιπτώσεις στή Θεωρητική Οἰκονομετρία χρησιμοποιοῦμε μῆτρες πού στοιχεῖα τους ἔχουν ὑπομῆτρες. Π.χ. ἡ nxn μήτρα A μπορεῖ νά γραφτῆ

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

ὅπου ἡ A_{11} εἶναι n_1xn_1 , ἡ A_{12} n_1xn_2, ἡ A_{21} n_2xn_1 , ἡ A_{22} n_2xn_2 καί $n_1+n_2=n$. Τό πρόβλημα εἶναι νά βροῦμε τήν ἀντίστροφη μήτρα

$$B = A^{-1}$$

μέ στοιχεῖα πάλι ὑπομῆτρες, δηλαδή

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

ὅπου ἡ B_{11} εἶναι n_1xn_1, ἡ B_{12} n_1xn_2 , ἡ B_{21} n_2xn_1 καί ἡ B_{22} n_2xn_2 καί, ἐφόσον ἡ B εἶναι ἀντίστροφη τῆς A

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

ὅπου ἡ μήτρα O στό ἄνω δεξιά τμῆμα τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ γινομένου εἶναι n_1xn_2 καί ἡ μήτρα O στό κάτω ἀριστερά n_2xn_1.

"Αν προχωρήσουμε στόν πολλαπλασιασμό τῶν ὑπομητρῶν A_{ij} καί B_{ij} τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων $AB=I_n$

δίνει τά ἀκόλουθα ὑποσυστήματα ἐξισώσεων

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_{n_1}$$
$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$$
$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = 0$$
$$A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I_{n_2}$$

Ἄν λύσουμε τό σύστημα τῶν ὑποσυστημάτων αὐτῶν θά μπορέσουμε νά δώσουμε τίς ὑπομῆτρες B_{ij} σάν συναρτήσεις τῶν A_{ij}. Γιά νά γίνη αὐτό ὑποθέταμε ὅτι οἱ ὑπομῆτρες A_{11} καί A_{22} δέν εἶναι ἰδιάζουσες. Μέ βάση τήν ὑπόθεση αὐτή παίρνουμε τό τρίτο ἀπό τά παραπάνω ὑποσυστήματα καί τό πολλαπλασιάζουμε ἀπό τά ἀριστερά μέ A_{22}^{-1} καί τό λύνουμε ὡς πρός B_{21} Αὐτό μᾶς δίνει

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$$

Μετά ἀντικαθιστοῦμε στό πρῶτο ἀπό τά ὑποσυστήματα τή B_{21} μέ τήν ἴση της καί ἔχουμε

$$A_{11}B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})B_{11} = I_{n_1}$$

Τήν ἐξίσωση αὐτή τή λύνουμε ὡς πρός B_{11} πολλαπλασιάζοντάς την ἀπό τά ἀριστερά μέ

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

καί βρίσκουμε

$$B_{11} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

Ἀντικαθιστώντας τή B_{11} μέ τήν ἴση της στή B_{21} ἔχουμε

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}$$

Προχωρώντας κατά τόν ἴδιο τρόπο λύνουμε τό δεύτερο ἀπό τά τέσσερα ὑποσυστήματα ὡς πρός B_{12} καί ἔχουμε

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}$$

Μετά άντικαθιστοῦμε στό τέταρτο ὑποσύστημα τή B_{12} μέ τήν ἴση της καί λύνουμε ὡς πρός B_{22}

$$B_{22} = (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$

καί τέλος άντικαθιστώντας στήν προηγούμενη ἐξίσωση τή B_{22} μέ τήν ἴση της ἔχουμε

$$B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}$$

Ὅπως εἶναι φανερό οἱ ὑπομῆτρες B_{ij} εἶναι ὅλες συναρτήσεις τῶν ὑπομητρῶν A_{ij} ἀκριβῶς ὅπως τά στοιχεῖα μιᾶς ἀντίστροφης μήτρας εἶναι συναρτήσεις τῶν στοιχείων τῆς ἀρχικῆς μήτρας.

Σάν παράδειγμα θά πάρουμε πάλι τή μήτρα

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Στή μήτρα αὐτή παρατηροῦμε ὅτι $A_{12}=0$ ἐπομένως ἀπό τούς τύπους τῶν στοιχείων B_{ij} τῆς ἀντίστροφης μήτρας ἔχουμε ἀμέσως

$$B_{12} = 0$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1}$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1}$$

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

Χρειάζεται ἐπομένως νά βροῦμε τίς μῆτρες A_{11}^{-1} καί A_{22}^{-1} πρῶτα καί μετά νά ὑπολογίσουμε τή B_{21}. Οἱ ὑπομῆτρες αὐτές ὑπολογίζονται εὔκολα ἀφοῦ τόσο ἡ A_{11} ὅσο καί ἡ A_{22} εἶναι 2x2

$$B_{11} = A_{11}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ καί } B_{22} = A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Μέ τίς ὑπομῆτρες αὐτές καθώς καί τήν ὑπομήτρα A_{21} , ἐφαρμόζοντας τό σχετικό τύπο, βρίσκουμε τή

$$B_{21} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Ἀντικαθιστώντας τίς ὑπομῆτρες B_{ij} στή μήτρα $B = A^{-1}$ ἔχουμε

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{15}{2} & \frac{7}{2} & 3 & -1 \\ \frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἄν συγκρίνουμε τή μήτρα αὐτή μ'ἐκείνη πού βρήκαμε μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν προσημασμένων ἐλασσόνων ὁριζουσῶν θά δοῦμε ὅτι εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια.

Ἕνας ἄλλος τρόπος (πού χρησιμοποιεῖται στή Θεωρητική Οἰκονομετρία) γιά νά βροῦμε τήν ὁρίζουσα τῆς μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

εἶναι νά τήν πολλαπλασιάσουμε ἀπό τά ἀριστερά μέ τή μήτρα

$$C = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$$

τότε ἔχουμε

$$CA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τήν ἰδιότητα (vi) τῶν μητρῶν ἔχουμε

$$\det(CA) = (\det C)(\det A)$$

Μέ τή μέθοδο τοῦ Laplace βρίσκουμε

$$\det(CA) = (\det A_{11})\{\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\}$$

$$\det C = \det I = 1$$

'Επομένως

$$(\det C)(\det A) = \det A = \det(CA) =$$

$$(\det A_{11})\{\det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\}$$

Παράδειγμα: Γιά τή μήτρα τοῦ προηγούμενου παραδείγματος ἔχουμε

$$\det A_{11} = -2 \quad \text{καί} \quad \det(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) = \det A_{22} = 1$$

'Επομένως

$$\det A = (\det A_{11})(\det A_{22}) = (-2)(1) = -2$$

δηλαδή τό ἴδιο ἀποτέλεσμα ὅπως καί μέ τίς προηγούμενες μεθόδους.

Γιά τόν πολλαπλασιασμό τῆς μήτρας A ἀπό τά ἀριστερά θά μπορούσαμε νά χρησιμοποιήσουμε ἀντί γιά τή μήτρα C τή μήτρα

$$D = \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

ὁπότε

$$DA = \begin{bmatrix} A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

'Ακολουθώντας τήν ἴδια διαδικασία ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς μήτρας CA ἔχουμε

$$\det DA = \det A = (\det A_{22})\{\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\}$$

Καί γιά τό παράδειγμα τό ἀποτέλεσμα εἶναι τό ἴδιο.

Τά τελευταῖα αὐτά ἀποτελέσματα χρησιμοποιοῦνται πολύ καί στή Στατιστική (βλέπε, π.χ. Anderson(1958) σελ. 19 καί Rao(1967) σελ. 493).

'Ασκήσεις

2.1 'Υπολογίστε μέ τόν πιό σύντομο τρόπο τίς ὀρίζουσες τῶν μητρῶν

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 30 & 38 & 12 \\ 37 & 50 & 15 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 16 & 24 & 33 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{bmatrix}$$

2.2 'Υπολογίστε τήν ὀρίζουσα τῆς μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 & b_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

2.3 Δεῖξτε ὅτι

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & b_1^2 & b_1^3 \\ 1 & c_1^2 & c_1^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1c_1 & a_1 & a_1^2 \\ c_1a_1 & b_1 & b_1^2 \\ a_1c_1 & c_1 & c_1^2 \end{vmatrix}$$

2.4 'Υπολογίστε τήν ὀρίζουσα τῆς nxn μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.5 Ὑπολογίστε τίς ὀρίζουσες:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Τί συμπεραίνετε γιά τήν ὀρίζουσα τῆς μήτρας

$$D = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & . & . & . & . & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & . & . & . & . & x_2 & 1 \\ . & . & & & & & . & . \\ . & . & & & & & . & . \\ . & . & & & & & . & . \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & . & . & . & . & x_n & 1 \end{bmatrix}$$

2.6 Βρῆτε τό γινόμενο:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

καί δεῖξτε ὅτι :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\alpha_1 + c_1\alpha_2 & b_1\beta_1 + c_1\beta_2 \\ a_2 & b_2\alpha_1 + c_2\alpha_2 & b_2\beta_1 + c_2\beta_2 \\ a_3 & b_3\alpha_1 + c_3\alpha_2 & b_3\beta_1 + c_3\beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 & c_1 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_1 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 & c_2 \\ a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 & a_3\beta_1 + b_3\beta_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2.7 Χρησιμοποιώντας τήν πρώτη καί τρίτη γραμμή ἀναπτύξτε τήν ὁρίζουσα τῆς μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ 9 & 9 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

μέ τή μέθοδο τοῦ Laplace .

Ἐλέγξτε τό ἀποτέλεσμα ἀναπτύσσοντας τήν ὁρίζουσα τῆς ἴδιας μήτρας μέ τή μέθοδο τῆς διαδοχικῆς συμπτύξεως.

2.8 Ἔστω τά διανύσματα

$$x' = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$$
$$y' = (y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_n)$$

Ὑπολογίστε τά γινόμενα $y'x$ καί xy'

Ὑπάρχει ἡ μήτρα $(xy')^{-1}$;

2.9 Ἔστω ἡ 2x2 μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

Βρῆτε τήν adjA καί δεῖξτε ὅτι

$$\text{adj}(\text{adj}A) = A$$

2.10 Δεῖξτε ὅτι

(i) Ἡ ἀντίστροφη μιᾶς μή ἰδιάζουσας συμμετρικῆς μήτρας εἶναι συμμετρική.

(ii) Ἡ ἀντίστροφη μιᾶς μή ἰδιάζουσας ἀντισυμμετρικῆς μήτρας εἶναι ἀντισυμμετρική.

(iii) οἱ μῆτρες

$$A^{-1}B\ ,\ AB^{-1},\ A^{-1}B^{-1}$$

εἶναι συμμετρικές ἄν εἶναι δεδομένο ὅτι οἱ μῆτρες A καί B εἶναι μή ἰδιάζουσες συμμετρικές μῆτρες καί $AB = BA$.

2.11 Ἔστω οἱ nxn μή ἰδιάζουσες μῆτρες A καί B. Δεῖξτε ὅτι

(i) $|A^{+}| = |A|^{n-1}$

(ii) $(AB)^{+} = B^{+}A^{+}$

(iii) $(A^{+})^{+} = |A|^{n-2}A$

2.12 Δεῖξτε ὅτι ἡ μήτρα

$$M = I - X(X'X)^{-1}X'$$

εἶναι συμμετρική καί ταυτοδύναμη.

Ὑπολογίστε τήν M καί διαπιστῶστε ὅτι

$$M' = M \quad \text{καί} \quad M^2 = M$$

στήν περίπτωση πού

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.13 Βρῆτε τίς ἀντίστροφες τῶν παρακάτω μητρῶν:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.14 Ἄν

$$a_1 \neq b_1 \neq c_1$$

δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφη τῆς μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & b_1 & b_1^2 \\ 1 & c_1 & c_1^2 \end{bmatrix}$$

καί ὑπολογίστέ την.

2.15 Ἔστω οἱ μῆτρες

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(i) Νά βρεθῆ ἡ P^{-1}
(ii) ὑπολογίστε τά γινόμενα AP καί PA καί σχολιάστε τά ἀποτελέσματα. Τί συμπεραίνετε γιά τά γινόμενα

$$AP^3 \quad \text{καί} \quad P^3A$$

2.16 Βρῆτε τίς ἀντίστροφες τῶν παρακάτω μητρῶν μέ τή μέθοδο τοῦ χωρισμοῦ σέ ὑπομῆτρες

$$A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] , \quad B = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ \hdashline 2 & -3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

2.17 Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι οἱ μῆτρες

$$K = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} , \quad L = \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} , \quad M = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$$

εἶναι ἀντιστρέψιμες (ὅπου A nxn, B pxp, C pxn καί $C \neq O$) βρῆτε τίς ἀντίστροφές τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Εἰσαγωγή

Οἱ ἔννοιες καί τά θέματα πού ἐξετάσαμε στά δύο πρῶτα κεφάλαια ὁδηγοῦν κατά τρόπο ἐντελῶς φυσικό στήν ἐξέταση τῶν συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καί τή διερεύνηση τοῦ ἄν τά συστήματα αὐτά ἔχουν πολλές, μιά ἤ καμιά λύση. Ἡ διερεύνηση αὐτή γίνεται στό κεφάλαιο τοῦτο ἀφοῦ εἰσαχθοῦν ὁρισμένες νέες ἀπαραίτητες ἤ χρήσιμες ἔννοιες. Μετά ἀναλύονται μερικοί ἀπό τούς περισσότερο γνωστούς τρόπους λύσεως συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων καί στό τέλος τοῦ κεφαλαίου ἐξετάζονται τά ὁμογενῆ γραμμικά συστήματα.

I. Βαθμὸς Μήτρας

Ὁ Β α θ μ ό ς σ τ η λ ῶ ν (στηλοβαθμός, column rank) μιᾶς mxn μήτρας A, πού γράφεται r(A) εἶναι τό μέγιστο πλῆθος τῶν γραμμικά ἀνεξάρτητων στηλῶν τῆς μήτρας.

Παραδείγματα:

(i) Ὁ βαθμός στηλῶν τῆς ταυτοτικῆς μήτρας I_n εἶναι $r(I_n) = n$.

(ii) Ὁ βαθμός στηλῶν τῆς μήτρας

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = (b_{.1}, b_{.2}, b_{.3})$$

εἶναι μικρότερος ἀπό 3 διότι

$$3b_{.1} + b_{.2} = b_{.3}$$

δηλαδή τό μέγιστο πλῆθος τῶν γραμμικά ἀνεξάρτητων στηλῶν της εἶναι μικρότερο ἀπό 3. Ἐξετάζοντας τίς στῆλες τῆς μήτρας B ἀνά δύο βλέπουμε ὅτι ἡ πρώτη καί ἡ δεύτερη εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες, ἄρα r(B)=2.

Ἕνας ἄλλος ὁρισμός τοῦ βαθμοῦ μιᾶς μήτρας εἶναι ὁ ἑξῆς: Μιά mxn μήτρα A ἔχει βαθμό k ὅταν καί μόνον ὅταν ὅλες οἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσες τάξεως k+1 εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν ἀλλά μιά τουλάχιστον ἐλάσσονα ὁρίζουσα τάξεως k εἶναι διαφορετική ἀπό τό μηδέν.

Γιά νά δείξουμε τό ἀναγκαῖο τῆς συνθήκης αὐτῆς ἄς ὑποθέσουμε ὅτι r(A) = k. Ἄν συμβαίνη αὐτό τότε ὁποιεσδήποτε k+1 στῆλες τῆς μήτρας A εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένες καί ὁποιαδήποτε στήλη μπορεῖ νά γραφτῆ σάν συνάρτηση k γραμμικά ἀνεξάρτητων στηλῶν. Ἐπομένως ὁποιαδήποτε ἐλάσσονα ὁρίζουσα τάξεως k+1 πού περιλαμβάνει καί τή στήλη αὐτή εἶναι ἴση μέ τό μηδέν διότι ἡ ὁρίζουσα αὐτή μπορεῖ νά γραφτῆ σάν ἄθροισμα ὁριζουσῶν πού ἔχουν δυό στῆλες ἴδιες (γιά πλήρεις ἀποδείξεις παραπέμπουμε τόν ἀναγνώστη στά σχετικά κεφάλαια τῶν Ἀνδρεαδάκη (1974) καί Hadley (1961)).

Παίρνοντας τό παράδειγμα (ii) βλέπουμε ὅτι μποροῦμε νά γράφουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ἀφοῦ ἰσχύει ἡ σχέση $3b_{.1}+b_{.2}=b_{.3}$ Ἄρα detB = o.

Μιά ὅμως τουλάχιστον ἐλάσσονα ὁρίζουσα τάξεως 2, ἄς ποῦμε ἡ

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

ἐπομένως r(B)=2.

Παρόμοιος μέ τόν ὁρισμό τοῦ βαθμοῦ στηλῶν εἶναι καί ὁ ὁρισμός τοῦ βαθμοῦ γραμμῶν (γραμμοβαθμός, row rank) μιᾶς μήτρας.

Ἰδιότητες τοῦ βαθμοῦ μητρῶν

(i) Ὁ βαθμός στηλῶν μιᾶς μήτρας εἶναι ἴσος μέ τό βαθμό τῶν γραμμῶν της.

Γιά ν'ἀποδείξουμε τήν πρόταση αὐτή ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ βαθμός στηλῶν τῆς μήτρας A εἶναι k καί ὁ βαθμός γραμμῶν τῆς ἴδιας μήτρας εἶναι s. Ὁ βαθμός ὅμως γραμμῶν τῆς A εἶναι ἴσος μέ τό βαθμό στηλῶν τῆς A' καί, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεσή μας, ὁ βαθμός αὐτός εἶναι ἴσος μέ s . Ἑπομένως ὅλες οἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσες τάξεως s+1 τῆς A' (καί τῆς A) εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν. Ἄρα $k \leqslant s$. Ἀλλά ὁ βαθμός στηλῶν τῆς A εἶναι k . Ἄρα οἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσες τάξεως k+1 τῆς A (καί τῆς A') εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν. Ἑπομένως $k \geqslant s$. Κατά συνέπεια $k=s$.
Μέ βάση τήν ἰδιότητα αὐτή μποροῦμε νά ἀναφερόμαστε γενικά στό βαθμό μιᾶς μήτρας παραλείποντας τή διευκρίνιση "γραμμῶν" ἤ "στηλῶν".

(ii) Ὁ βαθμός μιᾶς μήτρας A mxn ὅπου $m<n$ εἶναι

$$r(A) \leqslant m$$

Αὐτό εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητας (i).

(iii) Ὁ βαθμός τῆς μήτρας $C = AB$ δέν μπορεῖ νά εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό μικρότερο τῶν βαθμῶν τῶν μητρῶν A καί B , δηλαδή

$$r(C) = r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$$

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε τήν mxk μήτρα A καί τήν kxn μήτρα B . Ἄν πάρουμε ἕνα διάνυσμα x, nx1 καί τό πολλαπλασιάσουμε ἀπό τά ἀριστερά μέ τή μήτρα B ἔχουμε τό kx1 διάνυσμα

$$z = Bx$$

Ἑπομένως τό mx1 διάνυσμα

$$y = ABx$$

μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς

$$y = A(Bx) = Az$$

δηλαδή ὅλα τά διανύσματα y εἶναι γραμμικοί συνδυασμοί τῆς μήτρας A , ἄρα r(AB) δέν μπορεῖ νά εἶναι μεγαλύτερος ἀπό r(A). Κατά παρόμοιο τρόπο μποροῦμε νά δοῦμε ὅτι r(AB) δέν μπορεῖ νά εἶναι μεγαλύτερος ἀπό r(B) (βλέπε καί Fisk(1967) καί Hadley(1961)) .
Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ βαθμοῦ μιᾶς μήτρας μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε, ὅπως εἴδαμε καί στό παράδειγμα πού δώσαμε, εἴτε τόν ἕνα εἴτε τόν ἄλλο

ὁρισμό τοῦ βαθμοῦ τῆς μήτρας. Ἕνας ἄλλος τρόπος βασίζεται στούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς.

Σ τ ο ι χ ε ι ώ δ ε ι ς Μ ε τ α σ χ η μ α τ ι σ μ ο ί (Elementary transformations) εἶναι οἱ μετασχηματισμοί ἐκεῖνοι πού μποροῦν νά γίνουν στίς γραμμές ἤ τίς στῆλες μιᾶς μήτρας χωρίς νά ἀλλάξη ὁ βαθμός της.

Οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί (σέ παρένθεση σημειώνεται ὁ συμβολισμός γιά τόν καθένα) εἶναι:

Α. Ἐναλλαγή δύο γραμμῶν (R_{ij}) ἤ δύο στηλῶν (C_{ij}).

Β. Πολλαπλασιασμός τῆς γραμμῆς i μέ ἕναν ἀριθμό $\lambda \neq 0$ ($R_i(\lambda)$) ἤ τῆς στήλης j μέ ἕναν ἀριθμό $\mu \neq 0$ ($C_j(\mu)$).

Γ. Πρόσθεση στή γραμμή i τῆς γραμμῆς r πολλαπλασιασμένης μέ ἕναν ἀριθμό λ ($R_i(\lambda|r)$) ἤ πρόσθεση στή στήλη j τῆς στήλης s πολλαπλασιασμένης μέ τόν ἀριθμό μ ($C_j(\mu|s)$).

Ὁποιοσδήποτε στοιχειώδης μετασχηματισμός τῶν γραμμῶν μιᾶς μήτρας μπορεῖ νά γίνη μέ τόν πολλαπλασιασμό της ἀπό τά ἀριστερά μέ τήν ταυτοτική μήτρα στίς γραμμές τῆς ὁποίας ἔχει γίνει ὁ μετασχηματισμός πού θέλουμε.

Ἄν πάρουμε, π.χ., τή μήτρα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

μποροῦμε νά κάνουμε ὡς ἑξῆς ὁρισμένους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς τῶν γραμμῶν της:

R_{12}
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_1(3)$
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$R_2(3|1)$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$

Ἐξάλλου ἕνας στοιχειώδης μετασχηματισμός τῶν στηλῶν μιᾶς μήτρας μπορεῖ νά γίνη μέ τόν πολλαπλασιασμό της ἀπό τά δεξιά μέ τήν ταυτοτική μήτρα στίς στῆλες τῆς ὁποίας ἔχει γίνει ὁ μετασχηματισμός πού θέλουμε.

Ἄν πάρουμε τή μήτρα τοῦ προηγούμενου παραδείγματος τότε:

C_{12} $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$C_1(3)$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

$C_2(3\ 1)$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

Ἄν συμβολίσουμε τό γινόμενο μιᾶς σειρᾶς ἀπό στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμῶν μέ R καί στηλῶν μέ C τότε μποροῦμε νά μετασχηματίσουμε τή μήτρα B στή μήτρα A πού θά ἔχη τή μορφή

$$A = RBC = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ἡ μήτρα A ὀνομάζεται ἰσοδύναμη τῆς μήτρας B. Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τή μορφή πού ἔχει ἡ μήτρα

$$\det A = \det(RBC) = 0$$

Ἀφοῦ ὅμως οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στίς γραμμές καί στῆλες μιᾶς μήτρας ἀφήνουν τό βαθμό της ἀμετάβλητο ἕπεται ὅτι ὁ βαθμός τῆς μήτρας B εἶναι ἴσος μέ τό βαθμό τῆς μήτρας A καί ὁ βαθμός τῆς τελευταίας εἶναι ἴσος μέ

$$r(I_k) = k$$

δηλαδή ἴσος μέ τό βαθμό τῆς ταυτοτικῆς μήτρας πού βρίσκεται στό ἄνω ἀριστερά τμῆμα τῆς μήτρας A.

Παράδειγμα: Ἄν πάρουμε τή μήτρα

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

κι'ἐκτελέσουμε διαδοχικά τούς ἑξῆς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στίς στῆλες της

$$C_3(-3|1) \;,\quad C_3(-1|2) \text{ καί } C_2(-3|1)$$

δηλαδή πολλαπλασιάσουμε τή μήτρα ἀπό τά δεξιά μέ τή μήτρα

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

καί μετά ἐκτελέσουμε τούς ἑξῆς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμῶν

$$R_2(-3|3),\ R_3(2|2)\ ,\ R_3(1|1) \text{ καί } R_2(1|1)$$

δηλαδή πολλαπλασιάσουμε τό γινόμενο BC ἀπό τά ἀριστερά μέ τή μήτρα

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A = RBC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

καί

$$r(A) = r(I_2) = 2 = r(B)$$

πού εἶναι τό ἀποτέλεσμα πού βρήκαμε καί προηγουμένως γιά τή μήτρα B.

Οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί, ὅπως θά δοῦμε πιό κάτω, μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν καί γιά τή λύση συστημάτων γραμμικῶν ἐξισώσεων.

II. Συστήματα Γραμμικῶν Ἐξισώσεων

Τό γενικό γραμμικό σύστημα πού θά ἐξετάσουμε ἐδῶ εἶναι τό ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Μέ τό συμβολισμό τῶν μητρῶν καί τῶν διανυσμάτων τό σύστημα γράφεται

$$Ax = b$$

ὅπου A εἶναι μιά mxn μήτρα, x ἕνα nx1 διάνυσμα καί b ἕνα mx1 διάνυσμα. Μέ ἄλλα λόγια ἔχουμε ἕνα σύστημα ἀπό m ἐξισώσεις μέ n ἀγνώστους. Σ' αὐτό τό σημεῖο δέν προσδιορίζαμε ἄν τό m εἶναι μεγαλύτερο, ἴσο ἤ μικρότερο ἀπό τό n.

Ὅπως εἴδαμε στό πρῶτο κεφάλαιο μποροῦμε νά γράφουμε τή μήτρα A σάν μιά γραμμή μέ στοιχεῖα διανύσματα-στῆλες. Ἑπομένως τό σύστημα μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$(a_{.1}, a_{.2}, \ldots\ldots, a_{.n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{.j} x_j = b$$

Μ'αὐτό τό διαφορετικό συμβολισμό μποροῦμε νά δοῦμε ὅτι τό διάνυσμα b εἶναι γραμμικός συνδυασμός τῶν διανυσμάτων $a_{.j}$, j= 1,......,n.

Τό βασικό ἐρώτημα πού γεννᾶται εἶναι ἄν τό γενικό σύστημα τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων ἔχει πολλές, μιά ἤ καμιά λύση. Γιά ν'ἀπαντήσουμε στό ἐρώτημα αὐτό (βλέπε καί 'Ανδρεαδάκη (1974) καί Hadley(1961) χρειαζόμαστε τόν ὁρισμό τῆς ἐπαυξημένης μήτρας:

'Επαυξημένη μήτρα (Augmented matrix) ἑνός συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων Ax=b εἶναι ἡ μήτρα ἐκείνη πού περιέχει τόσο τή μήτρα A ὅσο καί τό διάνυσμα b , δηλαδή ἡ mx(n+1) μήτρα

$$A^* = (A,b) .$$

'Η ἀπάντηση στό ἐρώτημα πού θέσαμε πιό πάνω ἐξαρτᾶται ἀπό τό βαθμό τῆς μήτρας A^*.

'Εφόσον ἡ μήτρα A εἶναι ὑπομήτρα τῆς μήτρας A^* ὅλες οἱ ὁρίζουσες πού προκύπτουν ἀπό τά στοιχεῖα τῆς μήτρας A εἶναι καί ὁρίζουσες τῆς μήτρας A^* 'Επομένως ἔχομε δυό περιπτώσεις

εἴτε $r(A^*) > r(A)$ εἴτε $r(A^*) = r(A)$

Εἶναι αὐτονόητο ὅτι $r(A^*)$ δέν μπορεῖ νά εἶναι μεγαλύτερη τῆς $r(A)+1$.

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τίς δυό περιπτώσεις χωριστά:

1. $r(A^*) = s > r(A)$

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἐλάσσονα ὁρίζουσα τῆς μήτρας A^* μέ τή μεγαλύτερη τάξη πού δέν εἶναι ἴση μέ τό μηδέν θά πρέπη νά περιλαμβάνη καί τά στοιχεῖα τοῦ διανύσματος b . 'Επομένως οἱ s στῆλες πού ἀπαρτίζουν τή μήτρα,στήν ὁποία ἀντιστοιχεῖ ἡ μή μηδενική αὐτή ἐλάσσονα ὁρίζουσα,εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες. Ἐπομένως τό διάνυσμα b δέν μπορεῖ νά γραφτῆ σάν γραμμική συνάρτηση τῶν στηλῶν τῆς μήτρας A καί κατά συνέπειαν τό σύστημα δέν ἔχει λύση.

2. $r(A^*) = r(A) = s$

Τό ὅτι $r(A)=s$ σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν s γραμμικά ἀνεξάρτητες στῆλες στή μήτρα A οἱ ὁποῖες μποροῦν νά "παράγουν" ὅλες τίς στῆλες τῆς μήτρας A^* καί ἐπομένως καί τή στήλη b . Κατά συνέπεια στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε μιά τουλάχιστο λύση στό σύστημα τῶν ἐξισώσεων $Ax = b$.

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

(i) $s = m = n$

Στήν περίπτωση αὐτή ὑπάρχει μιά καί μόνο μιά λύση στό σύστημα. Αὐτό μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ κατά δυό τρόπους:

Ὁ πρῶτος τρόπος βασίζεται στό γεγονός ὅτι $m = n$ σημαίνει ὅτι ἡ μήτρα A εἶναι τετραγωνική καί ἐφόσον $r(A)=n$ ἡ μήτρα εἶναι ἀντιστρέφιμη. Ἄν ἐπομένως πολλαπλασιάσουμε τό σύστημα

$$Ax = b$$

μέ A^{-1} ἀπό τά ἀριστερά βρίσκουμε τή λύση

$$x = A^{-1}b$$

καί ἡ λύση αὐτή εἶναι ἡ μόνη πού ὑπάρχει διότι ἡ ἀντίστροφη μήτρα, ὅπως εἴδαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο, εἶναι μοναδική.

Ὁ δεύτερος τρόπος ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἐφόσον $r(A)=n$,σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ βαθμοῦ μιᾶς μήτρας πού δώσαμε σέ τοῦτο τό κεφάλαιο καί τόν ὁρισμό τῆς γραμμικῆς ἐξαρτήσεως πού δώσαμε στό πρῶτο κεφάλαιο, στήν ἐξίσωση

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{.j} = \underline{o}$$

ὅλα τά λ_j εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν. Ἐπιπλέον,ἐφόσον $r(A^*)=n$,στήν ἐξίσωση

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{.j} - \lambda_{n+1} b = \underline{o}$$

τό $\lambda_{n+1} \neq o$.

Διαιρώντας τήν τελευταία ἐξίσωση διά λ_{n+1} ἔχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}} \right) a_{.j} - b = \underline{o}$$

δηλαδή

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}} \right) a_{.j} = b$$

Ἄν θέσουμε

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}} = x_j^*$$

τότε ἡ ἐξίσωση γίνεται

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* a_{.j} = b$$

Ἡ πρόταση πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε εἶναι ὅτι δέν ὑπάρχει λύση μέ στοιχεῖα διαφορετικά ἀπό τά x_j^*. Γιά νά ἀποδείξουμε τή πρόταση αὐτή ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μιά τέτοια ἄλλη λύση ὑπάρχει καί τά στοιχεῖα της εἶναι x_j^{**} , δηλαδή θά ἔχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^{**} a_{.j} = b$$

Ἄν ἀφαιρέσουμε τήν τελευταία ἀπό τήν προτελευταία ἐξίσωση ἔχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j^* - x_j^{**}) a_{.j} = \underline{o}$$

Ἀλλά οἱ στῆλες $a_{.j}$, $j=1,\ldots\ldots,n$ εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες. Ἑπομένως ὅλα τά

$$x_j^* - x_j^{**} = o$$

δηλαδή

$$x_j^* = x_j^{**} , \ j = 1,........,n$$

καί επομένως δέν υπάρχει λύση διαφορετική από έκείνη πού στοιχεῖα της ἔχει τά x_j^* .

(ii) $s = n < m$

Στήν περίπτωση αὐτή ὁ βαθμός τῶν μητρῶν A καί A* εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν στηλῶν τῆς μήτρας A (τῶν ἀγνώστων) καί ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι μικρότερος ἀπό τῶν ἀριθμό τῶν γραμμῶν τῆς ἴδιας μήτρας (τῶν ἐξισώσεων).

Ὅπως εἶναι φανερό m-n ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι περιττές. Ὁποιοδήποτε διάνυσμα x πού ἀποτελεῖ λύση s ἐξισώσεων πού ἀντιστοιχοῦν σέ s γραμμικά ἀνεξάρτητες γραμμές στή μήτρα A θά ἀποτελῆ λύση ὅλων τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος καί τοῦτο διότι, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς βάσεως πού δώσαμε στό πρῶτο κεφάλαιο, οἱ s αὐτές γραμμές ἀπό τή μήτρα A θά ἀποτελοῦν τή βάση πού θά παράγη ὅλες τίς ὑπόλοιπες γραμμές.

(iii) $s = m < n$

Στήν περίπτωση αὐτή ὁ βαθμός τῶν μητρῶν A καί A* εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν γραμμῶν τῆς μήτρας A (τῶν ἐξισώσεων) καί ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι μικρότερος ἀπό τόν ἀριθμό τῶν στηλῶν τῆς ἴδιας μήτρας (τῶν ἀγνώστων).

Γιά νά προχωρήσουμε στήν περίπτωση αὐτή γράφουμε τό σύστημα ὡς ἑξῆς:

$$Ax = (A_1 \vdots A_2)\begin{bmatrix}\underline{x}_1 \\ \underline{x}_2\end{bmatrix} = A_1\underline{x}_1 + A_2\underline{x}_2 = b$$

ὅπου ἡ A_1 εἶναι μιά mxm ὑπομήτρα τῆς μήτρας A μέ $\det A_1 \neq o$ καί ἡ A_2 μιά mx(n-m) ὑπομήτρα, $\underline{x}_1$

ἕνα ὑποδιάνυσμα-στήλη μέ m συντεταγμένες καί $\underline{x}_2$ ἕνα ὑποδιάνυσμα-στήλη μέ n-m συντεταγμένες.

Ἐφόσον $\det A_1 \neq o$ ἡ μήτρα A_1 εἶναι ἀντιστρέψιμη κι'ἑπομένως μποροῦμε νά πολλαπλασιάσουμε τό σύστημα

$$A_1\underline{x}_1 = b - A_2\underline{x}_2$$

ἀπό τά ἀριστερά μέ A_1^{-1} ὁπότε ἔχομε τή λύση

$$\underline{x}_1 = A_1^{-1}b - A_1^{-1}A_2\underline{x}_2$$

Ἐπειδή μποροῦμε νά δώσουμε μιά ὁποιαδήποτε τιμή στό ὑποδιάνυσμα $\underline{x}_2$ ὁ ἀριθμός τῶν λύσεων πού ἔχει τό σύστημα $Ax=b$ εἶναι ἄπειρος.

Ἄν θέσουμε $\underline{x}_2=\underline{o}$ τότε ἡ λύση

$$\underline{x}_1 = A_1^{-1}b$$

ὀνομάζεται βασική λύση.

Ἄν ὅλα τά δυνατά συστήματα τῶν m ἐξισώσεων μέ m ἀγνώστους πού μποροῦν νά σχηματιστοῦν ἀπό τίς n στῆλες τοῦ συστήματος $Ax = b$ ἔχουν γραμμές γραμμικά ἀνεξάρτητες τότε ὁ ἀριθμός τῶν βασικῶν λύσεων πού μποροῦμε νά βροῦμε εἶναι

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

(iv) $s < m < n$

Ἡ περίπτωση αὐτή εἶναι συνδυασμός τῶν δύο προηγούμενων. Γιά νά βροῦμε ὅλες τίς δυνατές λύσεις ἐπιλέγομε μιά ὑπομήτρα μέ s γραμμές ἀπό τή μήτρα A καί ἀγνοοῦμε τίς ὑπόλοιπες γραμμές. Μετά προχωροῦμε ὅπως στήν περίπτωση (iii).

Παραδείγματα: Σ'ὅλα τά παραδείγματα πού ἀκολουθοῦν γιά συντομία θά ἀναφερόμαστε στή μήτρα τῶν συντελεστῶν σάν μήτρα A καί στήν ἐπαυξημένη μήτρα σάν μήτρα A*.

1. Ἄν πάρουμε τό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε ὅτι

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ἑπομένως $r(A) < 2$.

Ἐφόσον τά στοιχεῖα τῆς μήτρας A (πού μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν ἐλάσσονες ὁρίζουσες πρώτης τάξεως) δέν εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν ἕπεται ὅτι $r(A) = 1$.

Ἀπό τήν ἄλλη μεριά ἄν πάρουμε ὁποιαδήποτε ὑπομήτρα 2x2 ἀπό τή μήτρα

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

πού νά ἔχη σάν μιά ἀπό τίς στῆλες της τό διάνυσμα-στήλη

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε ὅτι ἡ ὁρίζουσά της δέν εἶναι ἴση μέ τό μηδέν. Π.χ. ἄν πάρουμε τήν ἐλάσσονα ὁρίζουσα

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Ἑπομένως $r(A^*) = 2 > r(A) = 1$.

Ἄρα τό σύστημα δέν ἔχει καμιά λύση. Αὐτό φαίνεται καί ἀπό τό γεγονός ὅτι ἄν πολλαπλασιάσουμε τήν πρώτη γραμμή τῆς μήτρας A^* μέ τόν ἀριθμό 3 ἡ γραμμή πού προκύπτει ἔχει μέν τά δυό πρῶτα στοιχεῖα της ἴσα μέ τά στοιχεῖα τῆς δεύτερης γραμμῆς ἀλλά δέν συμβαίνει τό ἴδιο καί μέ τό τρίτο στοιχεῖο ($9 \neq 4$). Ἔχουμε δηλαδή μιά ἀσυνέπεια στίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

2.

(i) Στό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{ἄρα}$$

'Εφόσον

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

εἶναι φανερό ὅτι $r(A^*) = 2$.

"Εχουμε ἐπομένως τήν περίπτωση:

$$r(A^*) = s = 2 = r(A) = 2 = m = n$$

καί κατά συνέπεια τό σύστημα αὐτό (μέ τούς τρόπους λύσεως τῶν συστημάτων αὐτῶν ἀσχολούμαστε στό ἑπόμενο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ) ἔχει μιά καί μόνο μιά λύση. 'Η λύση αὐτή εἶναι τό διάνυσμα

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ii)"Αν πάρουμε τό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

βλέπουμε ἀμέσως ὅτι $r(A) = 2$.

'Η ἐπαυξημένη μήτρα

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

δίνει $\det A^* = 0$.

'Επομένως ἔχουμε τήν περίπτωση:

$$r(A^*) = s = 2 = r(A) = 2 = n < m = 3$$

Κατά συνέπεια ἡ τρίτη ἐξίσωση εἶναι περιττή ἀφοῦ, ὅπως φαίνεται ἀπό τό σύστημα, εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων. Τήν περιττή αὐτή ἐξίσωση τήν παραλείπουμε καί μᾶς ἀπομένουν οἱ δυό πρῶτες πού ἔχουν λύση ἐκείνη πού βρήκαμε στό παράδειγμα 2(i). Τό διάνυσμα $x'=(1,1)$ ἀποτελεῖ καί τή λύση τῆς τρίτης ἐξισώσεως.

(iii) Μιά άπλή έξέταση τοῦ συστήματος

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

δείχνει ὅτι

$r(A^*)=s=2=r(A)=m=2 < n=3$

'Επομένως θά πρέπη νά ἀκολουθήσουμε τή μέθοδο πού ἀναπτύξαμε στήν περίπτωση 2(ii): Πρῶτα γράφουμε τό σύστημα ὡς ἑξῆς

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} x_3$$

Μετά θέτουμε

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

καί βρίσκαμε τήν ἀντίστροφη τῆς A_1 δηλαδή

$$A_1^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τό σύστημα ἀπό τά ἀριστερά μέ A_1^{-1} ἔχουμε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} x_3$$

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ τιμές πού μποροῦν νά πάρουν οἱ x_1 καί x_2 ἐξαρτιῶνται ἀπό τίς τιμές πού θά δώσουμε στήν x_3 . Ἄν θέσουμε $x_3 = 0$ τότε

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Αὐτή εἶναι μιά ἀπό τίς βασικές λύσεις τοῦ συστήματος. Συνολικά ὑπάρχουν

$$\frac{3!}{2!1!} = 3$$

βασικές λύσεις διότι τά συστήματα πού προκύπτουν ἀπό τίς στῆλες τῆς μήτρας A καί πού ἔχουν γραμμές γραμμικά ἀνεξάρτητες εἶναι τρία. Ἕνα ἀπ'αὐτά εἶναι τό παραπάνω(ὅπου θέσαμε $x_3 = 0$). Τά δύο ἄλλα ἀπό τά ὁποῖα μποροῦμε νά βροῦμε τίς ὑπόλοιπες βασικές λύσεις εἶναι τό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ὅπου θέσαμε τό $x_2=0$, καί τό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ὅπου θέσαμε τό $x_1 = 0$.

Γιά τήν περίπτωση (iv) δέν δίνουμε κανένα παράδειγμα ἀφοῦ, ὅπως εἴπαμε πιό πάνω, εἶναι συνδυασμός τῶν περιπτώσεων (ii) καί (iii) τίς ὁποῖες ἐξετάσαμε ἀναλυτικά στά παραπάνω παραδείγματα.

III. Μέθοδοι Λύσεως Συστημάτων Γραμμικῶν Ἐξισώσεων

Σέ τοῦτο τό τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ θά πάρουμε τό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

γιά τό ὁποῖο ὑπάρχει μιά καί μόνη μιά λύση ἀφοῦ $r(A^*) = s = 3 = r(A) = m = n$

καί θά δείξουμε μερικές ἀπό τίς πιό γνωστές μεθόδους πού μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τή λύση του.

A. Μέθοδος τοῦ Gauss

Τό σύστημα μέ τό όποῖο θά ἀσχοληθοῦμε στό τμῆμα τοῦτο μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3\\
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4\\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 7
\end{aligned}
$$

Ἡ μέθοδος τοῦ Gaussἀποτελεῖται ἀπό τά ἑξῆς στάδια:

Ἐπιλύνουμε τήν πρώτη ἐξίσωση ὡς πρός

$$x_1 = 3 - 3x_2 + x_3$$

Ἀντικαθιστοῦμε τήν x_1 μέ τό ἴσον της στή δεύτερη καί τρίτη ἐξίσωση,ὁπότε τό σύστημα γίνεται

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3\\
- x_2 + 2x_3 &= 1\\
- 7x_2 + 5x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

Ἐπιλύναμε τή δεύτερη ἐξίσωση ὡς πρός

$$x_2 = -1 + 2x_3$$

Ἀντικαθιστοῦμε τήν x_2 μέ τό ἴσον της στήν τρίτη ἐξίσωση κι'ἔχαμε τελικά τό σύστημα

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3\\
x_2 - 2x_3 &= -1\\
-9x_3 &= -9
\end{aligned}
$$

Ἀρχίζοντας ἀπό τήν τρίτη καί προχωρώντας στή δεύτερη καί τήν πρώτη ἐξίσωση βρίσκουμε τή λύση

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Β. Μέθοδος τῶν Gauss-Jordan

Ἡ μέθοδος αὐτή διαφέρει ἀπό τή μέθοδο τοῦ Gauss μόνο στό τελευταῖο στάδιο, δηλαδή ἀντί νά ἀντικαταστήσουμε τήν x_2 μέ τό ἴσον της μόνο στήν τρίτη ἐξίσωση τοῦ δεύτερου σταδίου, τήν ἀντικαθιστοῦμε καί στήν πρώτη ὁπότε προκύπτει τό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 5x_3 &= 6 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ἀπό τό ὁποῖο, κατά τόν ἴδιο τρόπο μέ τή μέθοδο τοῦ Gauss βρίσκουμε τίς τιμές τῶν x_2 καί x_1 ἀπό τή δεύτερη καί πρώτη ἐξίσωση ἀντιστοίχως.

Γ. Μέθοδος τῶν Στοιχειωδῶν Μετασχηματισμῶν

Ὅπως εἴδαμε ἡ μέθοδος αὐτή μπορεῖ νά μᾶς δώση ἀπευθείας τό βαθμό μιᾶς μήτρας. Στήν περίπτωση μιᾶς nxn μήτρας A μέ $r(A)= n$, ἡ ἰσοδύναμη μήτρα πού προκύπτει μέ μιά σειρά ἀπό στοιχειώδεις μετασχηματισμούς εἶναι ἴση μέ τήν I_n. Ἑπομένως ἄν στό σύστημα

$$Ax = b$$

ἐφαρμόσουμε μιά σειρά ἀπό στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμῶν καί τό γινόμενο τῶν μετασχηματισμῶν αὐτῶν τό συμβολίσουμε μέ $\mathbf{R}$ τότε

$$\mathbf{R}Ax = Ix = x = \mathbf{R}b$$

δηλαδή βρίσκουμε τή λύση τοῦ συστήματος.

Στό παράδειγμά μας ἡ σειρά τῶν στοιχειωδῶν αὐτῶν μετασχηματισμῶν εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\mathbf{R}_2(-1|1),\ \mathbf{R}_3(-3|1),\ \mathbf{R}_3(-7|2),\ \mathbf{R}_1(3|2),\ \mathbf{R}_3(-\tfrac{1}{9})$$
$$\mathbf{R}_1(-5|3),\ \mathbf{R}_2(-2|3) \text{ καί } \mathbf{R}_2(-1)$$

Οἱ στοιχειώδεις αὐτοί μετασχηματισμοί γραμμῶν στήν ταυτοτική μήτρα (πού, ὅπως καί προηγουμένως, ἐπειδή ὁ πολλαπλασιασμός γίνεται ἀπό τά ἀριστερά, ἀκολουθοῦν τήν ἑξῆς σειρά: ὁ τελευταῖος μετασχηματισμός γίνεται μέ τήν πρώτη μήτρα τοῦ γινομένου, ὁ προτελευταῖος μέ τή δεύτερη κ.ο.κ.) δίνουν τό γινόμενο:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \\ -4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τό σύστημα $Ax = b$ μέ R ἔχουμε

$$RAx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Rb = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

πού εἶναι ἡ λύση πού βρήκαμε καί μέ τίς μεθόδους Α καί Β.

Δ. Μέθοδος μέ τήν ἀντίστροφη μήτρα

Ἐφόσον στό σύστημα πού ἐξετάζουμε $r(A)=3$ ἕπεται ὅτι $\det A \neq 0$ καί ὅτι ἡ A^{-1} ὑπάρχει. Κατά συνέπεια ἄν βροῦμε τήν A^{-1} μποροῦμε νά πολλαπλασιάσουμε τό σύστημα $Ax=b$ μέ τή μήτρα A^{-1} καί νά βροῦμε τή λύση

$$A^{-1}Ax = x = A^{-1}b$$

Γιά νά βροῦμε τήν A^{-1} βρίσκουμε πρῶτα

$$\det A = 9$$

καί μετά τήν προσαρτημένη μήτρα

$$A^{+} = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \\ -4 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

καί ἡ λύση εἶναι

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -8 & 5 \\ 1 & 5 & -2 \\ -4 & 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

δηλαδή ἡ ἴδια ὅπως καί μέ τίς προηγούμενες μεθόδους.

Μιά ἁπλή σύγκριση δείχνει ὅτι τό γινόμενο R στή μέθοδο Γ εἶναι ἴσο μέ τήν A^{-1} στή μέθοδο Δ. Ἡ διαφορά εἶναι ὅτι στή μέθοδο Γ καταλήγαμε στήν ἀντίστροφη μήτρα ὕστερα ἀπό μιά σειρά ἀπό στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμῶν ἐνῶ στή μέθοδο Δ ὑπολογίζαμε ἀπευθείας τή μήτρα A^{-1}.

Ε. Μέθοδος τοῦ Cramer

Ἄν πάρουμε τό γενικό σύστημα $Ax = b$ καί ἐφαρμόσουμε τήν μέθοδο Δ ἡ λύση του μπορεῖ νά γραφτῆ πιό ἀναλυτικά ὡς ἑξῆς

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A} A^{+}b = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a^{+}_{11} & a^{+}_{21} & \cdots & a^{+}_{n1} \\ a^{+}_{12} & a^{+}_{22} & \cdots & a^{+}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{+}_{1n} & a^{+}_{2n} & \cdots & a^{+}_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Δηλαδή

$$x_i = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ji} b_j \quad , \quad i=1,\ldots,n$$

Σύμφωνα όμως μέ τόν ορισμό τῶν ὁριζουσῶν τό ἄθροισμα

$$\sum_{j=1}^{n} a^{+}_{ji} b_j = \sum_{j=1}^{n} b_j a^{+}_{ji}$$

εἶναι ἡ ὁρίζουσα πού προκύπτει ἄν τή στήλη i ἀντικαταστήσουμε μέ τό διάνυσμα b καί ἀναπτύξουμε τήν ὁρίζουσα μέ τίς προσημασμένες ἐλάσσονες ὁρίζουσες τῆς στήλης i.

Αὐτή ἡ διαπίστωση μᾶς δίνει τή μέθοδο τοῦ Cramer σύμφωνα μέ τήν ὁποία ἡ τιμή τῆς x_i εἶναι ἴση μέ τό κλάσμα πού ἔχει ἀριθμητή τήν ὁρίζουσα τῆς μήτρας A, στήν ὁποία ἡ στήλη i ἔχει ἀντικατασταθῆ μέ τό διάνυσμα b καί παρανομαστή τήν detA.

Στό παράδειγμά μας detA = 9. Ἐπομένως

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{9} = 1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}}{9} = 1, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}}{9} = 1$$

δηλαδή ἡ λύση εἶναι ἡ ἴδια μέ ἐκείνη πού βρήκαμε μέ τίς προηγούμενες μεθόδους.

IV. Ὁμογενῆ Συστήματα Γραμμικῶν Ἐξισώσεων

569

Ἄν στό σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων

$$Ax = b$$

τό διάνυσμα $b = \underline{o}$, ἄν δηλαδή τό σύστημα εἶναι

$$Ax = \underline{o}$$

τότε λέγεται ὁμογενές. Στή γενική περίπτωση τῶν ὁμογενῶν συστημάτων πού ἐξετάζομε ἐδῶ ἡ μήτρα A ὑποτίθεται ὅτι εἶναι mxn.

Τό ὁμογενές σύστημα μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{.i} = \underline{o}$$

ὅπου τό $\underline{o}$ εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα μέ διάσταση m.

Ἀπό τή μορφή πού ἔχουν τά ὁμογενῆ συστήματα εἶναι φανερό πώς ὑπάρχει πάντα γι'αὐτά ἡ λύση

$$x_i = o \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots, n$$

Ἡ λύση αὐτή λέγεται τ ε τ ρ ι μ μ έ ν η (trivial).

Αὐτό πού μᾶς ἐνδιαφέρει νά ἐρευνήσουμε στά ὁμογενῆ συστήματα εἶναι ἄν καί κατά πόσον ὑπάρχουν μή τετριμμένες (non-trivial) λύσεις.

Πρῶτα ἀπ'ὅλα παρατηροῦμε ὅτι, ἐπειδή $b=\underline{o}$, ἔχουμε

$$r(A^*) = r(A)$$

σ'ὅλα τά ὁμογενῆ συστήματα. Κατά συνέπεια μποροῦμε νά περιοριστοῦμε στήν ἐξέταση τῆς $r(A)$. Διακρίναμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις

(a) $r(A) = s = n = m$

Στήν περίπτωση αὐτή οἱ στῆλες (ἤ γραμμές) τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες κι' ἑπομένως δέν ὑπάρχει ἄλλη λύση ἐκτός ἀπό τήν τετριμμένη.

(b) $r(A) = s < n$

Στήν περίπτωση αὐτή, σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε γιά τά μή ὁμογενῆ συστήματα (δηλαδή τά συστήματα στά ὁποῖα $b \neq \underline{o}$) ὑπάρχει πάντα μιά λύση (στήν πραγματικότητα ὑπάρχει ἕνα ἄπειρο πλῆθος λύσεων) πού ἐξαρτᾶται ἀπό τίς τιμές πού θά δοθοῦν σέ n-s συντεταγμένες τοῦ διανύσματος x.

Ἄν ἡ μή τετριμμένη λύση εἶναι, π.χ., ἡ x^o τότε καί ἡ μx^o εἶναι ἐπίσης μιά μή τετριμμένη λύση, ὅπου μ εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε πραγματικός ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τό μηδέν. Αὐτό συμβαίνει διότι, ἐφόσον

$$Ax^o = \underline{o}$$

έπεται ότι

$$A(\mu x^o) = \mu(Ax^o) = \mu . \underline{o} = \underline{o}$$

"Αν εξετάσουμε τόν αριθμό τῶν γραμμῶν (ἐξισώσεων) διακρίνουμε τίς ἑξῆς ὑποπεριπτώσεις στήν περίπτωση (b)

(i) $m < n$

Δηλαδή ὁ ἀριθμός τῶν ἐξισώσεων εἶναι μικρότερος ἀπό τόν ἀριθμό τῶν ἀγνώστων. Στήν ὑποπερίπτωση αὐτή τό ὁμογενές σύστημα ἔχει ὁπωσδήποτε μή τετριμμένες λύσεις ἀφοῦ ὁ βαθμός τῶν γραμμῶν μιᾶς μήτρας εἶναι ἴσος μέ τό βαθμό τῶν στηλῶν της. Ἑπομένως ἔχουμε

$$r(A) = s \leqslant m < n$$

(ii) $m = n$ καί $\det A = o$

Στήν ὑποπερίπτωση αὐτή, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ βαθμοῦ μιᾶς μήτρας, ἔχουμε

$$r(A) = s \leqslant n-1 < m = n$$

καί κατά συνέπεια ὑπάρχουν, καί πάλι, μή τετριμμένες λύσεις.

(iii) $m > n$ καί $r(A) = s < n$

Στήν ὑποπερίπτωση αὐτή ἰσχύουν, κατ'ἀναλογίαν, τά ὅσα ἀναφέρθηκαν στήν περίπτωση 2(iv)τῶν μή ὁμογενῶν συστημάτων.

Μιά εἰδική περίπτωση, πού ἔχει ἰδιαίτερη σημασία στή Θεωρητική Οἰκονομετρία, εἶναι τοῦ συστήματος (βλέπε καί Goldberger(1964) σελ 21):

$$Ax = \underline{o}$$

ὅπου

$$m \geqslant n \quad \text{καί} \quad r(A) = n-1$$

Στήν περίπτωση αὐτή ὅλες οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι πολλαπλάσια μιᾶς λύσεως.

Ἀπόδειξη: "Ας ὑποθέσουμε ὅτι οἱ πρῶτες n-1 στῆλες τῆς μήτρας A εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες κι' ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ μή τετριμμένη λύση τοῦ συστήματος εἶναι ἡ x^o, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^o a_{.i} = \underline{o}$$

ὅπου $x_n^o \neq o$ ἀφοῦ οἱ πρῶτες n-1 στῆλες τῆς μήτρας A εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες καί ἡ x^o εἶναι μιά μή τετριμμένη λύση.

Ἐφόσον $x_n^o \neq o$ διαιροῦμε τήν παραπάνω ἐξίσωση διά x_n^o καί ἔχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^o}{x_n^o} \right) a_{.i} = \underline{o}$$

Λύνοντας ὡς πρός $a_{.n}$ ἔχουμε

$$a_{.n} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(- \frac{x_i^o}{x_n^o} \right) a_{.i}$$

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἡ x^* εἶναι μιά ἄλλη λύση. Τότε, ἀκολουθώντας τήν ἴδια σκέψη, ἔχουμε

$$a_{.n} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(- \frac{x_i^*}{x_n^*} \right) a_{.i}$$

Ἄν τώρα ἀφαιρέσουμε τήν προτελευταία ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση ἔχουμε

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{x_i^o}{x_n^o} - \frac{x_i^*}{x_n^*} \right) a_{.i} = \underline{o}$$

Ἐφόσον ὑποθέσαμε ὅτι οἱ πρῶτες n-1 στῆλες εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες ἕπεται ὅτι

$$\frac{x_i^o}{x_n^o} - \frac{x_i^*}{x_n^*} = o, \quad i=1,\ldots\ldots\ldots,n-1$$

Δηλαδή

$$x_i^* = \left(\frac{x_n^*}{x_n^o} \right) x_i^o \;, \quad i=1,\ldots\ldots\ldots,n-1$$

Θέτοντας

$$\mu = \frac{x_n^*}{x_n^o}$$

μποροῦμε νά γράψουμε τήν προηγούμενη σχέση ὡς ἑξῆς

$$x_i^* = \mu x_i^o \quad , \; i=1,\dots\dots\dots,n-1$$

Δηλαδή οἱ x_i^*, $i=1,..,n-1$ εἶναι ἴσες μέ τίς x_i^o πολλαπλασιασμένες μέ μ.

"Αν $\mu = 1$ τότε

$$x_i^* = x_i^o \quad , \; i=1,\dots\dots\dots\dots,n$$

"Αν

$$r(A) < n-1$$

τότε οἱ λύσεις ἑνός ὁμογενοῦς συστήματος δέν μπορεῖ νά εἶναι πολλαπλάσια μιᾶς ἄλλης.

'Απόδειξη: "Ας ὑποθέσουμε ὅτι $r(A)=n-2$ καί ὅτι οἱ πρῶτες $n-2$ στῆλες τῆς μήτρας A εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες. Στήν περίπτωση αὐτή τόσο τό διάνυσμα $a_{.n-1}$ ὅσο καί τό διάνυσμα $a_{.n}$ μποροῦν νά γραφτοῦν σάν γραμμικές συναρτήσεις τῶν $n-2$ γραμμικά ἀνεξάρτητων στηλῶν. "Αν συμβολίσουμε τά ἀντίστοιχα διανύσματα μέ x^{**} καί x^{***} τότε

$$a_{.n-1} = x_1^{**}a_{.1} + x_2^{**}a_{.2} + \dots\dots\dots + x_{n-2}^{**}a_{.n-2}$$

$$a_{.n} = x_1^{***}a_{.1} + x_2^{***}a_{.2} + \dots\dots + x_{n-2}^{***}a_{.n-2}$$

Οἱ σχέσεις αὐτές μποροῦν νά γραφτοῦν καί ὡς ἑξῆς

$$x_1^{**}a_{.1} + x_2^{**}a_{.2} + \dots\dots\dots + x_{n-2}^{**}a_{.n-2} - a_{.n-1} + o = \underline{o}$$

$$x_1^{***}a_{.1} + x_2^{***}a_{.2} + \dots + x_{n-2}^{***}a_{.n-2} + o \quad -a_{.n} = \underline{o}$$

'Απ'αὐτές τίς σχέσεις φαίνεται ὅτι τά διανύσματα

$$x^{**\prime} = (x_1^{**}, x_2^{**}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, x_{n-2}^{**}, -1 \quad o)$$

$$x^{***\prime} = (x_1^{***}, x_2^{***}, \dots\dots\dots\dots\dots, x_{n-2}^{***}, \; o \quad -1)$$

δέν μποροῦν ποτέ νά προέλθουν τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο μέ τόν πολλαπλασιασμό μιᾶς σταθερᾶς μ.

Μέ τά παραπάνω ἀποδείξαμε τήν ἀκόλουθη πρόταση:

Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ὑπάρξη μιά μή τετριμμένη λύση σ᾽ἕνα ὁμογενές σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων(μέ n ἀγνώστους) πολλαπλάσια τῆς ὁποίας νά εἶναι ὅλες οἱ ἄλλες λύσεις εἶναι $r(A) = n-1$.

Παραδείγματα:

(a) Στό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r(A)=s=2=m=n$ κι᾽ἐπομένως οἱ στῆλες (καί οἱ γραμμές) τῆς μήτρας A εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητες κι᾽ἐπομένως ἡ μόνη λύση εἶναι ἡ τετριμμένη $x = \underline{0}$.

(b) Στό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r(A)=s=2=m<n$ κι᾽ἐπομένως ὑπάρχει λύση. Τό σύστημα μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} x_3$$

Ὅπως εἶναι φανερό ἡ λύση ἐξαρτᾶται ἀπό τίς τιμές πού θά δώσουμε στήν x_3 . Ἀφοῦ οἱ τιμές αὐτές εἶναι ἄπειρες σέ πλῆθος, ἄπειρες σέ πλῆθος εἶναι καί οἱ λύσεις τοῦ συστήματος στό παράδειγμα αὐτό.

Ἄν π.χ. θέσουμε $x_3=1$τότε ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τῆς ἀντίστροφης μήτρας γιά τήν ἐπίλυση γραμμικῶν συστημάτων βρίσκουμε

$$x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

κι᾽ ἐπομένως μιά λύση τοῦ συστήματος εἶναι ἡ

$$x^{0\prime} = (-3,\ 1,\ 1)$$

Ἄν θέσουμε $x_3=3$ τότε ἡ λύση πού βρίσκουμε, ἐφαρμόζοντας τήν ἴδια μέθοδο εἶναι

$$x^{*\prime} = (-9,\ 3,\ 3)$$

Συγκρίνοντας τίς δυό αὐτές λύσεις βλέπουμε ὅτι

$$x^{*\prime} = 3x^{o\prime}$$

δηλαδή ἡ λύση $x^{*\prime}$ εἶναι ἴση μέ τό τιπλάσιο τῆς x^{o}!.

'Ασκήσεις

3.1 Ποιός εἶναι ὁ βαθμός τῆς μήτρας A^k ὅπου ἡ nxn μήτρα A εἶναι τῆς μορφῆς

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \quad \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

καί $k \leq n$ (Σημ. ἀρχίστε μέ n=3 καί k=2).

3.2 Ἔστω ἡ μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & -2 \\ -2 & 7 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Βρῆτε:

(i) τή μήτρα πού ἐναλλάσσει τίς γραμμές 1 καί 3, 2 καί 4 τῆς μήτρας A.

(ii) τή μήτρα πού προσθέτει 6 φορές τήν τρίτη γραμμή στήν πρώτη, πολλαπλασιάζει τή δεύτερη γραμμή μέ 10 καί, τέλος, ἐναλλάσει τή δεύτερη καί τρίτη γραμμή.

Χρησιμοποιώντας τίς μῆτρες πού βρήκατε στά (i) καί (ii) ἐκτελέστε τούς ἀναγκαίους πολλαπλασιασμούς μέ τή μήτρα A καί ἐξακριβῶστε ὅτι πραγματικά γίνονται οἱ ἐπιθυμητές μεταβολές στίς γραμμές τῆς μήτρας A.

3.3 Μετασχηματίστε τή μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

στή μήτρα

$$[I_3 \vdots \underline{o}]$$

3.4 Μετατρέψτε τή μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

σέ γινόμενο στοιχειωδῶν μητρῶν(σημ. στοιχειώδης μήτρα λέγεται ή ταυτοτική μήτρα στίς στῆλες ή τίς γραμμές τῆς όποίας ἔχουν γίνει στοιχειώδεις μετασχηματισμοί).

3.5 Ἐξετάστε ἄν στό παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 3 \\ x_1 + 17x_2 &= 0 \end{aligned}$$

ὑπάρχει λύση καί, σέ περίπτωση πού ὑπάρχει, λύστέ το.

3.6 Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 &= 0 \end{aligned}$$

'Εξετάστε ἄν ἔχη λύση. Στή περίπτωση πού ἔχει λύ-
στέ το.

3.7 'Επιλύστε τό παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

3.8 'Επιλύστε τό παρακάτω σύστημα μέ τή μέθοδο τοῦ Gauss

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

3.9 Γράψτε τό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

μέ τή μορφή $Ax = b$

καί ἐπιλύστέ το μέ τή μέθοδο τῆς ἀντίστροφης μή-
τρας.

3.10 'Επιλύστε τό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$$

μέ τή μέθοδο τῶν Gauss-Jordan.

3.11 Ἐπιλύστε τό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 17 \end{aligned}$$

μέ τή μέθοδο τοῦ Cramer.

3.12 Ἐπιλύστε τό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

μέ τή μέθοδο τῶν στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν.

3.13 Ἐξετάστε ἄν τό παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ἔχει μή τετριμμένη λύση. Στή περίπτωση πού ἔχει ἐπιλύστέ το.

3.14 Ἐξετάστε ἄν τό παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

ἔχει μή τετριμμένη λύση. Στή περίπτωση πού ἔχει ἐπιλύστέ το.

3.15 Ἐξετάστε ἄν τά παρακάτω συστήματα ἔχουν λύσεις (στήν περίπτωση τῶν ὁμογενῶν συστημάτων, μή τετριμμένες)

(i)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ x_1 + 7x_2 &= 0 \end{aligned}$$

3.16 Ἐπιλύστε καί διερευνῆστε τό παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} 9x_1 + \mu x_2 - x_3 &= 4 \\ 4\mu x_1 - 2x_2 + (\mu-1)x_3 &= \mu \\ 5x_1 + (2\mu-1)x_2 - 3x_3 &= 3(\mu+2) \end{aligned}$$

3.17 Ἐπιλύστε καί διερευνῆστε τό παρακάτω σύστημα

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda x_1 + x_3 + x_4 & = & 1 \\
\lambda x_2 + x_3 - x_4 & = & 1 \\
\lambda x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = & 2 \\
\lambda x_3 - x_4 & = & 0
\end{array}
$$

Ἐπιλύστε τό ἀντίστοιχο ὁμογενές σύστημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΜΗΤΡΩΝ

Εἰσαγωγή

Στά ἑπόμενα κεφάλαια θά χρειαστῆ νά ἀναφερθοῦμε στίς χαρακτηριστικές ρίζες μιᾶς μήτρας. Οἱ χαρακτηριστικές ρίζες χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης σέ ὁρισμένα κεφάλαια τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας. Ὕστερα ἀπό τήν ἐξέταση τῶν ὁμογενῶν γραμμικῶν συστημάτων μποροῦμε τώρα νά ἐρευνήσουμε τό θέμα τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν (ἤ ἰδιοτιμῶν) τῶν μητρῶν καί εἰδικότερα τῶν συμμετρικῶν καί ταυτοδύναμων μητρῶν. Στό κεφάλαιο τοῦτο ἀναφερόμαστε ἐπίσης στήν ἔννοια τοῦ ἴχνους μιᾶς μήτρας.

I. Χαρακτηριστικὲς Ρίζες Μητρῶν

Τό πρόβλημα μπορεῖ νά τεθῆ κατά διάφορους τρόπους. Ἕνας ἀπ'αὐτούς εἶναι ὁ ἑξῆς:

Ζητεῖται ἕνα διάνυσμα h τέτοιο πού ἄν πολλαπλασιαστῆ ἀπό τά ἀριστερά μέ μιά $n \times n$ μήτρα A, πολλαπλασιάζεται τό ἴδιο μέ ἕνα ἀριθμό λ, δηλαδή

$$Ah = \lambda h$$

Μέ ἄλλα λόγια ὁ πολλαπλασιασμός τοῦ διανύσματος μέ τή μήτρα A ἔχει σάν ἀποτέλεσμα τήν ἀλλαγή τοῦ μήκους (ὄχι ὅμως καί τῆς διευθύνσεως) τοῦ διανύσματος.

Ἡ παραπάνω ἐξίσωση μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$Ah - \lambda h = (A - \lambda I)h = \underline{o}$$

Εἶναι φανερό πώς ἔχαμε ἕνα ὁμογενές σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων πού μπορεῖ νά γραφτῆ πιό αναλυτικά ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots\cdots & & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o \\ o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ o \end{bmatrix}$$

Τό ὁμογενές αὐτό σύστημα θά ἔχη μή τετριμμένες λύσεις (δηλαδή $h \neq \underline{o}$) μόνο ἄν

$$r(A - \lambda I) < n$$

συνθήκη πού συνεπάγεται ὅτι ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας $A - \lambda I$ θά πρέπη νά εἶναι ἴση μέ τό μηδέν, δηλαδή

$$\det(A - \lambda I) = o$$

Ἄν ἀναπτύξουμε τήν ὁρίζουσα αὐτή βρίσκαμε ἕνα πολυώνυμο τῆς μορφῆς

$$(-\lambda)^n + c_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \cdots\cdots + c_1(-\lambda) + c_o$$

ὅπου οἱ συντελεστές c_j εἶναι συναρτήσεις τῶν στοιχείων τῆς μήτρας A. Τό πολυώνυμο αὐτό λέγεται χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ό π ο λ υ ώ ν υ μ ο (characteristic polynomial) καί ἡ ἐξίσωση

$$\det(A - \lambda I) = o$$

χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ή ἐ ξ ί σ ω σ η (characteristic equation) τῆς μήτρας A.

Τό πρόβλημα ἐπομένως εἶναι νά βρεθοῦν οἱ ρίζες, πραγματικοί ἤ μιγαδικοί ἀριθμοί, τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου πού τό πλῆθος τους εἶναι n . Οἱ n αὐτές ρίζες δέν εἶναι ἀναγκαστικά ἡ μιά διαφορετική ἀπό τήν ἄλλη. Οἱ ρίζες αὐτές ὀνομάζονται χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ έ ς ρ ί ζ ε ς (characteristic roots) ἤ ἰ δ ι ο τ ι μ έ ς (eigenvalues) τῆς μήτρας A καί συμβολίζονται μέ

$$\lambda_i \ , \ i=1,\ldots\ldots,n$$

Σέ κάθε μιά χαρακτηριστική ρίζα άντιστοιχεῖ ἕνα ἤ περισσότερα (γραμμικά ἀνεξάρτητα) χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ά δ ι α ν ύ σ μ α τ α (characteristic vectors) ἤ ἰ δ ι ο δ ι α ν ύ σ μ α τ α (eigenvectors)

$$h_{.i} \ , \ i=1,\ldots\ldots,n$$

Ἐφόσον τά διανύσματα αὐτά εἶναι λύσεις ἑνός ὁμογενοῦς συστήματος γραμμικῶν ἐξισώσεων, ἔπεται ὅτι τό μῆκος τους δέν εἶναι καθορισμένο. Γιά νά τό καθορίσουμε κατά τρόπο μοναδικό μποροῦμε νά πάρουμε τό μῆκος αὐτό ἴσο πρός τό τετράγωνο ἑνός ἀριθμοῦ $\sqrt{\mu_i}$ δηλαδή

$$h'_{.i}h_{.i} = \sum_{k=1}^{n} h_{ik}^2 = \mu_i^2$$

Μετά μποροῦμε νά εἰσάγουμε νέα διανύσματα

$$v_{.i} = \frac{1}{\mu_i} h_{.i}$$

ὁπότε

$$v'_{.i}v_{.i} = \frac{1}{\mu_i} h'_{.i} \frac{1}{\mu_i} h_{.i} = \frac{\mu_i^2}{\mu_i^2} = 1$$

Σάν παράδειγμα γιά τόν ὑπολογισμό χαρακτηριστικῶν ριζῶν καί διανυσμάτων θά πάρουμε τή 2x2 μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τῆς μήτρας αὐτῆς εἶναι

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 1o = o$$

καί οἱ χαρακτηριστικές ρίζες της οἱ

$$\lambda = \frac{7 + \sqrt{49-40}}{2} = 5 \ , \ \lambda_2 = \frac{7 - \sqrt{49-40}}{2} = 2$$

Γιά νά βροῦμε τά χαρακτηριστικά διανύσματα πού ἀντιστοιχοῦν στίς ρίζες αὐτές παίρνουμε τήν ἐξίσωση

$$(A - \lambda_i I)h_{.i} = \underline{o}$$

καί ἀντικαθιστοῦμε τά λ_i , $i=1, 2$ μέ τά ἴσα τους. Ἀρχίζοντας μέ τό $\lambda_1=5$ ἔχουμε τό σύστημα

$$\left\{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ὅπως εἶναι φανερό τό σύστημα αὐτό δίνει μιά μόνο ἐξίσωση δηλαδή τήν

$$2h_{11} - h_{21} = 0 \quad ἤ \quad h_{21} = 2h_{11}$$

Γιά νά καθορίσουμε μιά μοναδική τιμή στό διάνυσμα $h_{.1}$ ἐπιβάλλουμε τή συνθήκη τό μῆκος του νά εἶναι ἴσο πρός τή μονάδα, δηλαδή τή συνθήκη

$$h_{11}^2 + h_{21}^2 = 1$$

Ἀντικαθιστώντας στή συνθήκη αὐτή τό h_{21} μέ τό ἴσο του, ἔχουμε

$$h_{11}^2 + 4h_{11}^2 = 5h_{11}^2 = 1$$

ἐξίσωση πού δίνει

$$h_{11} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

Ἀπό τίς δυό ρίζες παίρνουμε τή θετική κι'ἔχουμε

$$h_{11} = \sqrt{\frac{1}{5}} \quad , \quad h_{21} = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

Γιά νά βροῦμε τό δεύτερο χαρακτηριστικό διάνυσμα προχωροῦμε κατά τόν ἴδιος τρόπο: Ἀπό τό σύστημα

$$(A - 2I)h_{.2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{12} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

καταλήγουμε στήν ἐξίσωση

$$h_{12} + h_{22} = 0 \quad ἤ \quad h_{22} = - h_{12}$$

'Επιβάλλοντας τή συνθήκη

$$h_{12}^2 + h_{22}^2 = 1$$

καί άντικαθιστώντας σ'αύτήν τήν h_{22} μέ τό ἴσον της ἔχουμε

$$h_{12}^2 + h_{12}^2 = 1$$

ἐξίσωση πού δίνει

$$h_{12} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Παίρνοντας πάλι τή θετική ρίζα ἔχουμε τελικά

$$h_{12} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad , \quad h_{22} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Στή γενική περίπτωση μιᾶς nxn μήτρας A ὅταν βροῦμε ὅλες τίς χαρακτηριστικές ρίζες καί τά χαρακτηριστικά διανύσματα μποροῦμε νά τά γράφουμε ὡς ἑξῆς:

$$A(h_{.1}, h_{.2}, \ldots, h_{.n}) = (\lambda_1 h_{.1}, \lambda_2 h_{.2}, \ldots \lambda_n h_{.n})$$

"Αν θέσουμε

$$H = (h_{.1}, h_{.2}, \ldots\ldots, h_{.n})$$

καί

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdot & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & & \ddots & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

τότε ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ τύπου

$$Ah_{.i} = \lambda_i h_{.i}$$

μποροῦν νά γραφτοῦν ὡς ἑξῆς:

$$AH = H\Lambda$$

Πρίν προχωρήσουμε χρειαζόμαστε τόν ὁρισμό τῶν ὅμοιων μητρῶν.

"Ο μ ο ι ε ς μ ῆ τ ρ ε ς (Similar matrices)

"Αν ὑπάρχη μιά ἀντιστρέψιμη μήτρα K τέτοια ὥστε

$$B = K^{-1}AK$$

τότε οἱ τετραγωνικές μῆτρες B καί A ὀνομάζονται ὅμοιες.

Οἱ ὅμοιες μῆτρες ἔχουν τίς ἴδιες χαρακτηριστικές ρίζες. Γιά ν'ἀποδείξουμε τήν πρόταση αὐτή ἀρκεῖ ν'ἀποδείξουμε ὅτι ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση τῆς μήτρας B εἶναι ἡ ἴδια μέ ἐκείνη τῆς μήτρας A.

Πρῶτα ἀποδεικνύαμε ὅτι

$$\det(K^{-1}) = (\det K)^{-1}$$

'Από τίς ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν γνωρίζαμε ὅτι

$$\det(KK^{-1}) = \det(K^{-1}K) = \det(K^{-1})\det K = \det I = 1$$

'Επομένως

$$\det(K^{-1}) = \frac{1}{\det K} = (\det K)^{-1}.$$

'Η χαρακτηριστική ἐξίσωση τῆς μήτρας B εἶναι

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

'Αντικαθιστώντας τή μήτρα B μέ τήν ἴση της καί χρησιμοποιώντας τό παραπάνω ἀποτέλεσμα ἔχαμε

$$\det(B-\lambda I) = \det(K^{-1}AK-\lambda I) = \det\{K^{-1}(A - \lambda I)K\}$$

$$\det(K^{-1})\det(A-\lambda I)\det K = (\det K)^{-1}\det(A-\lambda I)(\det K) =$$

$$\det(A-\lambda I) = 0$$

ἀποτέλεσμα πού ἀποδεικνύει τήν πρότασή μας.

"Αν ἡ $n x n$ μήτρα A ἔχει n διαφορετικές χαρακτηριστικές ρίζες τότε μπορεῖ νά βρεθῆ μιά ἀντιστρέψιμη μήτρα K τέτοια ὥστε ἡ ὅμοια μήτρα μέ τήν A νά εἶναι ἡ διαγώνια μήτρα μέ στοιχεῖα τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς A, δηλαδή

$$K^{-1}AK = \Lambda$$

'Εφόσον οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A εἶναι διαφορετικές,τά χαρακτηριστικά διανύσματα $h_{.i}$ πού ἀποτελοῦν τή μήτρα **H** εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητα (βλέπε Acher καί Gardelle(1970)),ἄρα

$$\det \mathbf{H} \neq 0$$

καί κατά συνέπεια ἡ $\mathbf{H}^{-1}$ ὑπάρχει. "Αν πολλαπλασιάσουμε τήν ἐξίσωση

$$AH = H\Lambda$$

μέ H^{-1} ἀπό τά ἀριστερά ἔχουμε τό ἀποτέλεσμα

$$H^{-1}AH = \Lambda$$

δηλαδή μποροῦμε νά πάρουμε τή μήτρα $K = H$ μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τά διανύσματα πού ἀποτελοῦν τήν τελευταία αὐτή μήτρα εἶναι γραμμικά ἀνεξάρτητα.

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό μπορεῖ νά χρησιμοποιηθῆ γιά ν'ἀποδειχτῆ ἡ πρόταση ὅτι: "Ἄν οἱ (διαφορετικές) χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A εἶναι λ_i τότε οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A^r εἶναι λ_i^r ὅπου r εἶναι θετικός ἀκέραιος ἀριθμός".

Ἀπόδειξη: Εἴδαμε ὅτι ἄν ἡ μήτρα A ἔχει διαφορετικές χαρακτηριστικές ρίζες τότε ἡ διαγώνια μήτρα πού στοιχεῖα της εἶναι οἱ ρίζες αὐτές μπορεῖ νά γραφτῆ (πάντα μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $\det H \neq 0$) ὡς ἑξῆς:

$$\Lambda = H^{-1}AH$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν ἐξίσωση αὐτή ἀπό τά ἀριστερά μέ H καί ἀπό τά δεξιά μέ H^{-1} ἔχουμε

$$A = H\Lambda H^{-1}$$

Ἄρα

$$A^2 = AA = H\Lambda H^{-1}H\Lambda H^{-1} = H\Lambda I\Lambda H^{-1} = H\Lambda^2 H^{-1}$$

καί γενικότερα

$$A^r = H\Lambda^r H^{-1}$$

Ἡ χαρακτηριστική ἐξίσωση τῆς μήτρας A εἶναι

$$\det(A - \mu I) = \det(H\Lambda^r H^{-1} - \mu I) = \det\{H(\Lambda^r - \mu I)H^{-1}\}$$

$$\det(\Lambda - \mu I) = 0$$

Ἐφόσον ἡ Λ εἶναι διαγώνια μήτρα μέ στοιχεῖα λ_i ἔπεται ὅτι καί ἡ μήτρα Λ^r εἶναι διαγώνια μέ στοιχεῖα λ_i^r. Ἀναπτύσσοντας τήν τελευταία ὁρίζουσα ἔχουμε:

$$\det(\Lambda^r - \mu I) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i^r - \mu_i) = 0$$

'Επομένως

$$\mu_i = \lambda_i^r \quad , \; i = 1, \ldots\ldots, n$$

ἀποτέλεσμα πού ἀποδεικνύει τήν παραπάνω πρόταση.

Μέ βάση τήν πρόταση αὐτή ἀποδεικνύουμε ὅτι:
"Αν ὅλες οἱ (διαφορετικές) χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A ἔχουν ἀπόλυτη τιμή μικρότερη ἀπό τή μονάδα, δηλαδή ἄν

$$|\lambda_i| < 1 \quad , \; i=1, \ldots\ldots, n$$

τότε ἡ μήτρα-σειρά

$$\Xi = I + A + A^2 + A^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

εἶναι ἴση μέ

$$(I - A)^{-1}$$

'Εφόσον μποροῦμε νά γράφουμε τή μήτρα $A = H\Lambda H^{-1}$ ἕπεται ὅτι ἡ μήτρα-σειρά Ξ μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς

$$\Xi = I + H\Lambda H^{-1} + H\Lambda^2 H^{-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Πολλαπλασιάζοντας (καί τίς δυό πλευρές) τῆς σειρᾶς αὐτῆς ἀπό τά ἀριστερά μέ H^{-1} καί ἀπό τά δεξιά μέ H ἔχουμε

$$H^{-1}\Xi H = I + \Lambda + \Lambda^2 + \ldots\ldots\ldots = \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda^s$$

ὅπου

$$\Lambda^0 = I$$

'Η μήτρα $H^{-1}\Xi H$ εἶναι διαγώνια μέ στοιχεῖα τίς σειρές

$$1 + \lambda_i + \lambda_i^2 + \ldots\ldots\ldots = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_i^s \quad , \; i=1, \ldots\ldots\ldots, n$$

πού συγκλίνουν στά κλάσματα $(1-\lambda_i)^{-1}$ ἄν $|\lambda_i| < 1$ δηλαδή ἄν ἡ ἀπόλυτη τιμή κάθε μιᾶς ἀπό τίς χαρακτηριστικές ρίζες λ_i εἶναι μικρότερη ἀπό τή μονάδα. Στήν περίπτωση πού τό $s \longrightarrow \infty$ ἔχουμε

$$H^{-1}\Xi H = (I - \Lambda)^{-1}$$

ἀντιστρέφοντας τίς μῆτρες καί τῶν δύο πλευρῶν τῆς παραπάνω ἐξισώσεως ἔχουμε

$$H^{-1}\Xi^{-1}H = I - \Lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν τελευταία ἐξίσωση ἀπό τά ἀριστερά μέ H καί ἀπό τά δεξιά μέ H^{-1} βρίσκουμε τήν ἀντίστροφη μήτρα τῆς Ξ, δηλαδή

$$\Xi^{-1} = HH^{-1} - H\Lambda H^{-1} = I - H\Lambda H^{-1} = I - A$$

'Αντιστρέφοντας καί πάλι τίς μῆτρες καί τῶν δύο πλευρῶν τῆς τελευταίας ἐξισώσεως καταλήγουμε κάτω ἀπό τίς προϋποθέσεις πού ἀναφέραμε πιό πάνω, στό ζητούμενο ἀποτέλεσμα, δηλαδή

$$\Xi = (I - A)^{-1}$$

II. Χαρακτηριστικὲς Ρίζες Συμμετρικῶν Μητρῶν

Στή Θεωρητική Οἰκονομετρία χρησιμοποιοῦνται πολύ οἱ συμμετρικές μῆτρες, οἱ μῆτρες δηλαδή γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει ἡ σχέση

$$A = A'$$

Οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῶν συμμετρικῶν μητρῶν ἔχουν ὁρισμένες ἰδιότητες πού βασίζονται στό ἀκόλουθο λῆμμα (βλέπε καί Dhrymes(1970) σελ. 576)

Λῆμμα: "Αν λ_1 καί λ_2 εἶναι δυό διαφορετικές χαρακτηριστικές ρίζες τῆς συμμετρικῆς μήτρας A καί στίς ρίζες αὐτές ἀντιστοιχοῦν τά χαρακτηριστικά διανύσματα $h_{.1}$ καί $h_{.2}$ τότε:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)h'_{.1}h_{.2} = o$$

'Απόδειξη: Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι

$$h'_{.1}Ah_{.2} = h'_{.2}Ah_{.1}$$

καί τοῦτο διότι

$$(h'_{.1}Ah_{.2})' = h'_{.2}A'h_{.1} = h'_{.2}Ah_{.1}$$

ἀφοῦ

$$A' = A$$

Δεδομένου ὅτι οἱ λ_1 καί λ_2 εἶναι χαρακτηριστικές ρίζες μέ ἀντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα $h_{.1}$ καί $h_{.2}$, τά διανύσματα αὐτά ἐπαληθεύουν τίς ἀκόλουθες δύο ἐξισώσεις:

$$Ah_{.1} = \lambda_1 h_{.1}$$
$$Ah_{.2} = \lambda_2 h_{.2}$$

Πολλαπλασιάζοντας ἀπό τά ἀριστερά τήν πρώτη ἐξίσωση μέ $h'_{.2}$ καί τή δεύτερη ἐξίσωση μέ $h'_{.1}$ ἔχουμε

$$h'_{.2}Ah_{.1} = \lambda_1 h'_{.2}h_{.1}$$
$$h'_{.1}Ah_{.2} = \lambda_2 h'_{.1}h_{.2}$$

'Αφαιρώντας τή δεύτερη ἐξίσωση ἀπό τήν πρώτη καί ἐφόσον τό ἀριστερό μέλος τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶναι ἴσο μέ τό ἀριστερό μέλος τῆς δεύτερης καί ἀφοῦ

$$h'_{.2}h_{.1} = h'_{.1}h_{.2}$$

ἕπεται ὅτι

$$(\lambda_1 - \lambda_2)h'_{.1}h_{.2} = o$$

πού εἶναι καί τό ζητούμενο ἀποτέλεσμα.

'Ι δ ι ό τ η τ ε ς τ ῶ ν χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ῶ ν ρ ι ζ ῶ ν τ ῶ ν σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ῶ ν μ η τ ρ ῶ ν.

(1) Ὅλες οἱ χαρακτηριστικές ρίζες μιᾶς συμμετρικῆς μήτρας (μέ στοιχεῖα πραγματικούς ἀριθμούς) εἶναι πραγματικές.

"Ας υποθέσουμε, αντίθετα μέ τήν πρόταση αυτή, ότι οί χαρακτηριστικές ρίζες τής συμμετρικής μήτρας είναι μιγαδικές καί ότι μιά άπ'αυτές είναι ή λ καί ή συζυγής της είναι ή λ^* μέ αντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα τά h καί h^* πού είναι επίσης μιγαδικά μέ αντιπροσωπευτικές συντεταγμένες τίς

$$h_j = c_j + id_j$$
$$h_j^* = c_j - id_j$$

Τό εσωτερικό γινόμενο τών διανυσμάτων h καί h^* είναι

$$h'h^* = h^{*\prime}h \quad \sum_{j=1}^{n} h_j h_j^* = \sum_{j=1}^{n} h_j^* h_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (c_j - id_j)(c_j + id_j) = \sum_{j=1}^{n} (c_j^2 + d_j^2) \neq 0$$

'Από τό λήμμα ξέρουμε ότι

$$(\lambda - \lambda^*)h'h^* = 0$$

Κατά συνέπειαν, αφού $h'h^* \neq 0$, αναγκαστικά

$$(\lambda - \lambda^*) = 0$$

δηλαδή

$$\lambda = \lambda^*$$

'Η τελευταία όμως αυτή σχέση δέν μπορεί νά ισχύη παρά μόνο στήν περίπτωση πού τά φανταστικά μέρη τών μιγαδικών χαρακτηριστικών ριζών λ καί λ^* είναι ίσα μέ τό μηδέν, δηλαδή μόνον όταν οί ρίζες είναι πραγματικές.

(2). Τά χαρακτηριστικά διανύσματα πού αντιστοιχούν σέ διαφορετικές χαρακτηριστικές ρίζες μιάς συμμετρικής μήτρας είναι ορθογώνια τό ένα πρός τό άλλο.

"Αν πάρουμε δυό διαφορετικές χαρακτηριστικές ρίζες μιᾶς συμμετρικῆς μήτρας (ἄς ποῦμε τίς ρίζες λ_1 καί λ_2), ἀπό τό λῆμμα προκύπτει ὅτι ἀφοῦ

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

ἀναγκαστικά

$$h'_{.1}h_{.2} = 0$$

δηλαδή τά διανύσματα $h_{.1}$ καί $h_{.2}$ εἶναι ὀρθογώνια.

Πρίν προχωρήσουμε στήν ἑπόμενη ἰδιότητα θά πρέπη νά ὁρίσουμε τόν ὀρθογώνιο μετασχηματισμό:

Ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ς μ ε τ α σ χ η μ α τ ι σ μ ό ς (Orthogonal transformation) μιᾶς μήτρας Β εἶναι ὁ μετασχηματισμός

$$K'BK = D$$

ὅπου D εἶναι μιά διαγώνια μήτρα.

(3). Ἄν σέ ὅλα τά (διαφορετικά) χαρακτηριστικά διανύσματα μιᾶς συμμετρικῆς μήτρας Α ἔχει ἐπιβληθῆ ἡ συνθήκη

$$h'_{.i}h_{.i} = \sum_{k=1}^{n} h_{ik}^2 = 1 \ , \ i=1,\dots,n$$

τότε ἡ μήτρα αὐτή μπορεῖ νά γραφτῆ σάν ὀρθογώνιος μετασχηματισμός τῆς διαγώνιας μήτρας Λ πού στοιχεῖα της ἔχει τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας Α.

Ξέρουμε ὅτι ἡ μήτρα Α μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$A = H\Lambda H^{-1}$$

ὅπου Η εἶναι ἡ μήτρα τῶν γραμμικά ἀνεξάρτητων χαρακτηριστικῶν διανυσμάτων τῆς μήτρας.

Παράλληλα ἀπό τή συνθήκη πού ἔχει ἐπιβληθῆ σ' ὅλα τά χαρακτηριστικά διανύσματα καί ἀπό τήν ἰδιότητα (2) ἔχουμε

$$h'_{.i}h_{.j} = \delta_{ij}$$

ἄρα

$$H'H = I$$

ἑπομένως ἡ μήτρα Η εἶναι ὀρθογώνια,

δηλαδή

$$H' = H^{-1}$$

καί κατά συνέπειαν

$$A = H\Lambda H'$$

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ συμμετρική μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix}$$

Γιά νά βροῦμε τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας αὐτῆς λύνουμε τήν ἐξίσωση

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - 12 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$$

καί βρίσκουμε

$$\lambda_1 = \frac{-2 + \sqrt{4+60}}{2} = 3 , \quad \lambda_2 = \frac{-2 - \sqrt{4+60}}{2} = -5$$

Γιά νά βροῦμε τά χαρακτηριστικά διανύσματα πού ἀντιστοιχοῦν στίς χαρακτηριστικές ρίζες αὐτές πρέπει νά λύσουμε δυό ἐξισώσεις. Πρῶτα λύναμε τήν ἐξίσωση:

$$(A - \lambda_1 I)h_{.1} = \begin{bmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Τό σύστημα αὐτό δίνει μιά καί μόνη ἐξίσωση, δηλαδή τήν ἐξίσωση

$$h_{11} - \sqrt{3}h_{21} = 0$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή βρίσκουμε

$$h_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}h_{11}$$

Ἐπιβάλλοντας τή συνθήκη

$$h_{11}^2 + h_{21}^2 = 1$$

καί ἀντικαθιστώντας σ'αὐτήν τήν h_{21} μέ τό ἴσον της ἔχουμε

$$h_{11} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Παίρνοντας τή θετική ρίζα τῆς h_{11} καί άντικαθιστώντάς την στήν h_{21} ἔχαμε τελικά τή λύση

$$h_{11}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad h_{21} = \frac{1}{2}$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο προχωροῦμε στή λύση τῆς ἐξισώσεως

$$(A - \lambda_2 I)h_{.2} = \underline{o}$$

καί βρίσκουμε τή λύση

$$h_{12} = \frac{1}{2} \quad , \quad h_{22} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Παίρνοντας τά διανύσματα-λύσεις

$$h'_{.1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) , \qquad h'_{.2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

σχηματίζουμε τή μήτρα

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Τέλος πολλαπλασιάζουμε τή μήτρα

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & o \\ o & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & o \\ o & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

μέ H άπό τά άριστερά καί μέ H' άπό τά δεξιά κι'ἔχουμε

$$H\Lambda H' = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & o \\ o & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} = A$$

III. Ἴχνος Μήτρας

Ἡ ἔννοια τοῦ ἴχνους μιᾶς μήτρας μᾶς χρειάζεται στό ἑπόμενο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ καί χρησιμοποιεῖται καί στή Θεωρητική Οἰκονομετρία. Γι' αὐτό θεωροῦμε σκόπιμο νά τήν εἰσαγάγουμε τώρα.

Ἴ χ ν ο ς (trace) μιᾶς $n x n$ μήτρας A καλεῖται τό ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῆς κύριας διαγωνίου της. Τό ἴχνος συμβολίζεται ὡς ἑξῆς

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Ἰ δ ι ό τ η τ ε ς τ ο ῦ Ἴ χ ν ο υ ς

(α) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$

Ἡ ἰδιότητα αὐτή προκύπτει κατευθείαν ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μιᾶς μήτρας μέ ἕνα ἀριθμό πού δώσαμε στό πρῶτο κεφάλαιο. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό

$$tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda tr(A)$$

(β) Ἄν ἔχουμε δυό μῆτρες A καί B μέ τίς ἴδιες διαστάσεις $n x n$ τότε

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

Καί ἡ ἰδιότητα αὐτή προκύπτει κατευθείαν ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἀθροίσματος δύο μητρῶν, διότι

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A)+tr(B)$$

(γ) Ἄν ἔχουμε τίς ἴδιες δυό παραπάνω μῆτρες A καί B τότε

$$tr(AB) = tr(BA)$$

Ἄν γράφουμε τά γινόμενα

$$AB = C \text{ καί } BA = D$$

τότε τά ἀντιπροσωπευτικά στοιχεῖα τῆς κύριας διαγωνίου τῶν μητρῶν C καί D εἶναι:

$$c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \text{ καί } d_{jj} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$$

Ἑπομένως

$$tr(C) = tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$$

καί

$$tr(D) = tr(BA) = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$$

ἀλλά

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$$

δηλαδή

$$tr(C)\ tr(AB) = tr(BA) = tr(D)$$

(δ) Ἄν ἡ μήτρα A εἶναι συμμετρική τότε

$$tr(A) = tr(\Lambda)$$

Εἴδαμε ὅτι ἄν ἡ μήτρα A εἶναι συμμετρική μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$A = H\Lambda H'$$

Σύμφωνα ὅμως μέ τήν ἰδιότητα (γ) ἔχουμε

$$tr(A) = tr(H\Lambda H') = tr(H'H\Lambda) = tr(I\Lambda) = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Δηλαδή στήν περίπτωση μιᾶς συμμετρικῆς μήτρας τό ἴχνος εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν τῆς μήτρας αὐτῆς.

Παραδείγματα: Ἄν πάρουμε τή μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

τότε

$$tr(A) = 6$$

καί

$$tr(5A) = 5tr(A) = 30$$

διότι

$$tr(5A) = tr\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 25 \end{bmatrix} = 30$$

Ἄν τώρα πάρουμε καί τή μήτρα

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$tr(B) = 2$$

καί

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B) = 8$$

διότι

$$tr(A+B) = tr\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 8$$

Ἐπίπλέον

$$tr(AB) = tr\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 13 & 11 \end{bmatrix} = 16$$

καί

$$tr(BA) = tr\begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = 16$$

ἄρα

$$tr(AB) = tr(BA)$$

Σάν τελευταῖο ἀριθμητικό παράδειγμα θά πάρουμε τή συμμετρική μήτρα πού ἐξετάσαμε στό τελευταῖο μέρος τοῦ προηγούμενου τμήματος τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ, δηλαδή τή μήτρα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = -2$$

'Εξ'ἄλλου ἡ διαγώνια μήτρα Λ, ὅπως εἴδαμε, πού ἀντιστοιχεῖ στή μήτρα Α εἶναι

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

καί

$$tr(\Lambda) = -2$$

ἄρα

$$tr(A) = tr(\Lambda)$$

Γιά τήν ἐφαρμογή τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἴχνους πού δώσαμε πιό πάνω θεωροῦμε σκόπιμο, ἐκτός ἀπό τά ἀριθμητικά παραδείγματα, νά δώσουμε ἀκόμα δυό παραδείγματα πού ἀναφέρονται σέ ταυτοδύναμες μῆτρες πού τίς συναντᾶμε στή Θεωρητική Οἰκονομετρία

(i) Ἄν θέσουμε $A = X(X'X)^{-1}$

ὅπου ἡ μήτρα X εἶναι Txn

τότε

$$X(X'X)^{-1}X' = AX'$$

καί, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (γ),

$$tr(AX') = tr(X'A) = tr\{(X'X)(X'X)^{-1}\} = tr(I_n) = n$$

διότι τά στοιχεῖα τῆς κύριας διαγωνίου τῆς ταυτοτικῆς μήτρας εἶναι ὅλα ἴσα μέ τή μονάδα.

(ii) Ἄν πάρουμε τή μήτρα

$$I_T - X(X'X)^{-1}X' = I_T - AX'$$

τότε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (β),

$$tr(I_T - AX') = tr(I_T) - tr(X'A)$$

'Αλλά

$$tr(I_T) = T$$

καί, ὅπως ἀποδείξαμε πιό πάνω, $tr(X'A) = n$

Κατά συνέπεια $tr(I_T - X(X'X)^{-1}X') = T-n$.

IV. Χαρακτηριστικὲς Ρίζες καὶ Ἴχνος Ταυτοδύναμων Μητρῶν

Πρίν ἀσχοληθοῦμε μέ τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῶν ταυτοδύναμων μητρῶν θεωροῦμε σκόπιμο, εἰσαγωγικά, νά ἀναφερθοῦμε στά ἑξῆς:

Ἄν Q εἶναι μιά ταυτοδύναμη μήτρα διαστάσεων TxT καί I ἡ ταυτοτική μήτρα μέ διαστάσεις ἴσες μέ ἐκεῖνες τῆς μήτρας Q τότε ἡ μήτρα I-Q εἶναι ἐπίσης ταυτοδύναμη.

Γιά ν'ἀποδείξουμε τή πρόταση αὐτή ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσουμε τή μήτρα I-Q μέ τόν ἑαυτό της ὁπότε ἔχομε

$$(I-Q)(I-Q) = I-Q-Q+QQ = I-Q-Q+Q = I-Q$$

Ἄν Q εἶναι μιά ταυτοδύναμη μήτρα, τότε

$$Q^n = \underbrace{QQ\ldots\ldots\ldots\ldots Q}_{(n\ \text{φορές})} = Q$$

διότι

$$Q^2 = QQ = Q$$

ἄρα

$$Q^3 = Q^2Q = QQ = Q$$

καί γενικότερα

$$Q^n = Q^{n-1}Q = QQ = Q$$

Ἄν H εἶναι ἡ μήτρα μέ στῆλες τά χαρακτηριστικά διανύσματα τῆς ταυτοδύναμης μήτρας Q καί ἄν $\det H \neq 0$ τότε, σύμφωνα μέ ὅσα ἀποδείξαμε προηγουμένως στό κεφάλαιο αὐτό, ἡ μήτρα Q μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$Q = H\Lambda H^{-1}$$

κι'ἑπομένως

$$Q^n = H\Lambda H^{-1}H\Lambda H^{-1}H\Lambda H^{-1}\ldots\ldots\ldots\ldots H\Lambda H^{-1} = H\Lambda^n H^{-1}$$

Μετά ἀπό τά εἰσαγωγικά αὐτά σημεῖα μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τίς ἀκόλουθες δυό προτάσεις πού ἀναφέρονται στίς χαρακτηριστικές ρίζες, τό ἴχνος καί τό βαθμό μιᾶς ταυτοδύναμης μήτρας.

Α. Οἱ χαρακτηριστικές ρίζες μιᾶς ταυτοδύναμης μήτρας εἶναι ἴσες μέ τή μονάδα ἤ τό μηδέν.

"Ας ὑποθέσουμε ὅτι λ εἶναι μιά ἀπό τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς ταυτοδύναμης μήτρας Q καί $h \neq \underline{o}$ τό χαρακτηριστικό διάνυσμα πού ἀντιστοιχεῖ στή ρίζα αὐτή. Τότε

$$Qh = \lambda h$$

Πολλαπλασιάζοντας ἀπό τά ἀριστερά τήν ἐξίσωση αὐτή μέ Q ἔχουμε

$$QQh = \lambda(Qh) \Rightarrow Qh = \lambda^2 h$$

Ἀφαιρώντας τήν πρώτη ἀπό τή δεύτερη ἐξίσωση ἔχουμε

$$\lambda^2 h - \lambda h = (\lambda^2 - \lambda)h = \lambda(\lambda - 1)h = \underline{o}$$

Ἐφόσον ὑποθέσαμε ὅτι $h \neq o$ ἕπεται ὅτι

$$\lambda(\lambda - 1) = o$$

ἄρα

$$\text{εἴτε} \quad \lambda = o \quad \text{εἴτε} \quad \lambda = 1$$

Β. Ὁ βαθμός μιᾶς ταυτοδύναμης μήτρας εἶναι ἴσος μέ τό ἴχνος της καί τό τελευταῖο εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν τῆς μήτρας πού δέν εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν.

"Αν πάρουμε τήν ταυτοδύναμη μήτρα Q μέ $r(Q)=r$ τότε, ἄν γράφουμε τή μήτρα $Q = H\Lambda H^{-1}$, ἔχουμε

$$tr(Q) = tr(H\Lambda H^{-1}) = tr(H^{-1}H\Lambda) = tr(I\Lambda) = tr(\Lambda) = r$$

ἀφοῦ r εἶναι τό πλῆθος τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν τῆς μήτρας Q πού δέν εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν (οἱ ρίζες αὐτές, σύμφωνα μέ τήν πρόταση Α, εἶναι ἴσες μέ τή μονάδα).

Ἀπό τήν ἄλλη μεριά

$$r(Q) = r(H\Lambda H^{-1}) = r(\Lambda) = r$$

καί ἐφόσον ἡ μήτρα Λ εἶναι διαγώνια ἡ τάξη της εἶναι ἴση μέ τόν ἀριθμό τῶν στοιχείων της πού δέν εἶναι μηδενικά. Ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ἴσος μέ

$$r = tr(Q)$$

ἄρα $r(Q) = tr(Q)$.

Ἡ πρόταση ὅτι

$$r(\Lambda) = r(Q)$$

μπορεῖ νά ἀποδειχτῆ ἀναλυτικότερα ὡς ἑξῆς:

Ἐφόσον ἡ μήτρα Q εἶναι TxT καί ἐφόσον ὑπάρχη ἡ H^{-1} ἕπεται ὅτι

$$r(H) = T$$

ἐπιπλέον ὑποθέσαμε ὅτι

$$r(Q) = r < T$$

Ἄν θέσουμε

$$B = H\Lambda$$

καί

$$C = BH^{-1} = H\Lambda H^{-1} = Q$$

τότε μέ βάση τήν ἰδιότητα(iii)τοῦ βαθμοῦ τῶν μητρῶν ἔχουμε τίς σχέσεις

$$r(B) = r(H\Lambda) \leqslant r(\Lambda) \quad \text{καί} \quad r(\Lambda) = r(H^{-1}B) \leqslant r(B)$$

ἄρα

$$r(\Lambda) = r(B)$$

καθώς καί τίς σχέσεις

$$r(C) = r(BH^{-1}) \leqslant r(B) \quad \text{καί} \quad r(B) = r(CH) \leqslant r(C)$$

ἄρα

$$r(B) = r(C)$$

Ἑπομένως

$$r(\Lambda) = r(B) = r(C) = r(BH^{-1}) = r(H\Lambda H^{-1}) = r(Q)$$

Θά κλείσουμε τό τμῆμα καί τό κεφάλαιο αὐτό μέ τό ἑξῆς θεώρημα:

Θεώρημα: Μιά συμμετρική μήτρα Q μέ r(Q) =r εἶναι ταυτοδύναμη ὅταν καί μόνον ὅταν μπορῆ νά γραφτῆ

$$Q = H_1 H_1'$$

όπου H_1 είναι μιά Txr μήτρα τέτοια ώστε $H_1'H_1 = I_r$.

'Απόδειξη: Πρώτα αποδεικνύαμε ότι άν $H_1H_1' = Q$ καί $H_1'H_1 = I_r$ τότε ή μήτρα Q είναι ταυτοδύναμη.

Γιά νά δοΰμε άν μιά μήτρα είναι ταυτοδύναμη τήν πολλαπλασιάζουμε μέ τόν εαυτόν της:

$$QQ = H_1(H_1'H_1)H_1' = H_1I_rH_1' = H_1H_1' = Q$$

Μετά πρέπει ν'άποδείξουμε ότι μιά ταυτοδύναμη μήτρα Q μέ $r(Q) = r$ μπορεί νά γραφτή σάν

$$H_1H_1' = Q \qquad \text{όπου} \qquad H_1'H_1 = I_r$$

'Εφόσον ή μήτρα Q είναι συμμετρική, όπως είδαμε στό κεφάλαιο αύτο, μπορεί νά γραφτή ώς έξής

$$Q = H\Lambda H'$$

όπου H είναι μιά όρθογώνια μήτρα TxT δηλαδή

$$H'H = I_T$$

'Από τήν άλλη μεριά άν

$$r(Q) = r$$

τότε

$$\Lambda = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε τώρα νά γράφουμε τή μήτρα H ώς έξής:

$$H = (H_1 \vdots H_2)$$

όπου H_1 είναι μιά ύπομήτρα Txr καί H_2 μιά ύπομήτρα Tx(T-r).

'Η εξίσωση

$$H'H = I_T$$

μπορεί νά γραφτή άναλυτικότερα ώς έξής

$$\begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix}(H_1 \vdots H_2) = \begin{bmatrix} H_1'H_1 & H_1'H_2 \\ H_2'H_1 & H_2'H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{T-r} \end{bmatrix}$$

έξισώνοντας τίς άντίστοιχες ύπομήτρες έχουμε

$$H_1'H_1 = I_r$$

Τέλος

$$Q = H\,H' = (H_1 \vdots H_2)\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1' \\ H_2' \end{bmatrix} = H_1 H_1'$$

Καί μ'αὐτό συμπληρώνεται ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος.

'Ασκήσεις

4.1 Δεῖξτε ὅτι
(i) Τό ἄθροισμα τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν μιᾶς nxn μήτρας A εἶναι ἴσο μέ

$$tr(A)$$

(ii) Τό γινόμενο τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν μιᾶς μήτρας εἶναι ἴσο μέ τήν ὁρίζουσα τῆς μήτρας.

4.2 Δεῖξτε ὅτι στήν περίπτωση τῆς 3x3 μήτρας

$$A = \{a_{ij}\}$$

ἰσχύει ἡ σχέση

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + p_1\lambda^2 - p_2\lambda + p_3$$

ὅπου

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = tr(A)$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$p_3 = \det A$$

4.3 Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς ἀσκήσεως 4.2 γιά τόν ὑπολογισμό τῆς $|A - \lambda I|$ ὅπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4.4 Δεῖξτε ὅτι ἄν λ εἶναι μιά μή μηδενική χαρακτηριστική ρίζα τῆς μή ἰδιάζουσας nxn μήτρας A τότε

$$\frac{|A|}{\lambda}$$

εἶναι χαρακτηριστική ρίζα τῆς A^+.

4.5 Ἄν A εἶναι μιά μή ἰδιάζουσα μήτρα δεῖξτε ὅτι (i) οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς ἀντιστροφῆς της, A^{-1}, εἶναι οἱ ἀντίστροφες τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν τῆς A. (ii) τά χαρακτηριστικά διανύσματα τῆς A^{-1} εἶναι τά ἴδια μέ ἐκεῖνα τῆς μήτρας A.

4.6 Ὑπολογίστε τίς χαρακτηριστικές ρίζες καί τά χαρακτηριστικά διανύσματα τῶν παρακάτω μητρῶν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

4.7 Προσιορίστε τίς χαρακτηριστικές ρίζες καί τά χαρακτηριστικά διανύσματα τῆς μήτρας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

καί δῶστε τή μήτρα A μέ τή διαγώνιά της μορφή.

4.8 Βρῆτε τήν A^{30} ὅπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

4.9 Προσδιορίστε τά

$$b_j, \; c_j \; ; \; j = 1,2,3$$

ἔτσι ὥστε ἡ μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

νά ἔχη σάν χαρακτηριστικά διανύσματα τά

$$h_{.1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h_{.2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h_{.3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1ο Βρῆτε τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

Γιά ἐφαρμογή βρῆτε τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῶν μητρῶν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ποιές ἀπό τίς μῆτρες αὐτές μποροῦν νά δοθοῦν μέ διαγώνια μορφή καί γιατί;

4.11 Βρῆτε τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῶν μητρῶν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

καί γράψτέ τις (ἄν εἶναι δυνατό) μέ διαγώνια μορφή.

4.12 Ἔστω ἡ μήτρα

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ὅπου λ καί μ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί ($\mu \neq 0$).

Βρῆτε τίς χαρακτηριστικές ρίζες καί τά χαρακτηριστικά διανύσματα τῆς μήτρας M. Σέ ποιά περίπτωση ἡ μήτρα M μπορεῖ νά δοθῆ μέ διαγώνια μορφή.

4.13 Βρῆτε τίς χαρακτηριστικές ρίζες καί τά χαρακτηριστικά διανύσματα τῆς μήτρας

$$xx'$$

ὅπου

$$x' = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n)$$

4.14 Ἀποδεῖξτε τίς παρακάτω προτάσεις

(i) Ἄν ἡ μήτρα H εἶναι ὀρθογώνια, ἡ ὀρίζουσά της εἶναι ἴση μέ $+1$ ἤ -1.

(ii) Οἱ πραγματικές ρίζες μιᾶς ὀρθογώνιας μήτρας εἶναι $+1$ ἤ -1.

(iii) Τό γινόμενο δυό ὀρθογώνιων μητρῶν εἶναι ὀρθογώνια μήτρα.

Βρῆτε τή μήτρα πού ἔχει χαρακτηριστικά διανύσματα τίς στῆλες τῆς παρακάτω μήτρας

$$H = \begin{bmatrix} \eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \\ \sigma\upsilon\nu\theta & -\eta\mu\theta \end{bmatrix}$$

4.15 Βρῆτε τό ἴχνος τῆς μήτρας

$$Q = I_n - \frac{1}{n}\iota\iota'$$

(βλέπε καί ἄσκηση 1.17)

4.16 Ἄν A εἶναι μιά μήτρα δεῖξτε ὅτι τά γινόμενα $A'A$ καί AA' εἶναι συμμετρικές μῆτρες καί ὅτι

$$tr(A'A) = tr(AA') = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ - ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΤΟΥ KRONECKER

Εἰσαγωγή

Πολλά θέματα τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας μποροῦν νά τεθοῦν σάν προβλήματα ἐλαχιστοποιήσεως τετραγωνικῶν μορφῶν χωρίς δεσμούς ἤ μέ δεσμούς. Σέ πιό προχωρημένο ἐπίπεδο ἡ Θεωρητική Οἰκονομετρία χρησιμοποιεῖ ἐπίσης τά γινόμενα τοῦ Kronecker Στά δυό αὐτά θέματα εἶναι ἀφιερωμένο τό κεφάλαιο τοῦτο.

I. Τετραγωνικὲς Μορφὲς

Τετραγωνική μορφή (Quadratic form) εἶναι μιά συνάρτηση n μεταβλητῶν πού μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Στήν περίπτωση πού $n = 2$

$$\varphi_1 = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$$

Ἄν $a_{ij} = a_{ji}$ τότε

$$\varphi_2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

Ἡ μορφή αὐτή λέγεται τετραγωνική διότι κάθε ὅρος τοῦ ἀθροίσματος φ περιλαμβάνει εἴτε τό τετράγωνο μιᾶς μεταβλητῆς εἴτε τό γινόμενο μιᾶς μεταβλητῆς μέ μιά ἄλλη.

Ἄν θέσουμε

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots\cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

τότε μποροῦμε νά γράφουμε τήν τετραγωνική μορφή φ ὡς ἑξῆς

$$\varphi = x'Ax$$

Συνήθως ὑποθέτουμε ὅτι ἡ μήτρα A εἶναι συμμετρική, δηλαδή $A'=A$. Ἄν δέν εἶναι μποροῦμε νά τήν κάνουμε συμμετρική παίρνοντας νέα στοιχεῖα

$$b_{ij} = b_{ji} = (a_{ij}+a_{ji})/2$$

Ἐφόσον

$$x_ix_j = x_jx_i$$

ἕπεται ὅτι

$$2b_{ij}x_ix_j = (a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$$

Παράδειγμα: Στήν τετραγωνική μορφή

$$(x_1 \;,\; x_2) \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ἡ μήτρα πού εἶναι στή μέση δέν εἶναι συμμετρική. Ἄν ὅμως πάρουμε τό ἄθροισμα τῶν στοιχείων 5 καί 3 καί τό διαιρέσουμε διά 2 μποροῦμε νά γράφουμε τήν τετραγωνική μορφή ὡς ἑξῆς

$$(x_1 \;,\; x_2) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως εἶναι φανερό, ἡ τετραγωνική μορφή ἔχει μιά μήτρα συμμετρική κι᾽ ἐπιπλέον εἶναι ἴση μέ τήν προηγούμενη τετραγωνική μορφή διότι

$$x_1^2+5x_1x_2+3x_2x_1+4x_2^2 = x_1^2+4x_1x_2+4x_2x_1+4x_2^2$$

Εἴδη τετραγωνικῶν μορφῶν

Μιά τετραγωνική μορφή $x'Ax$ λέγεται ὅτι εἶναι:

(α) Θετικά ὁρισμένη (positive definite)
ἄν $x'Ax>o$ γιά ὅλα τά διανύσματα x ἐκτός ἀπό τό διάνυσμα $x = \underline{o}$.

(β) Ἀρνητικά ὁρισμένη (negative definite)
ἄν $x'Ax<o$ γιά ὅλα τά διανύσματα x ἐκτός ἀπό τό διάνυσμα $x = \underline{o}$.

(γ) Θετικά ἡμιορισμένη (positive semidefinite)
ἄν $x'Ax\geqslant o$ γιά κάθε διάνυσμα x καί ὑπάρχει διάνυσμα $x\neq\underline{o}$ γιά τό ὁποῖο $x'Ax=o$.

(δ) Ἀρνητικά ἡμιορισμένη (negative semidefinite)
ἄν $x'Ax\leqslant o$ γιά κάθε διάνυσμα x καί ὑπάρχει διάνυσμα $x\neq\underline{o}$ γιά τό ὁποῖο $x'Ax=o$.

(ε) Προσηματικά ὄχι ὁρισμένη (indefinite)
ἄν ὑπάρχουν διανύσματα $x\neq\underline{o}$ γιά τά ὁποῖα $x'Ax>o$ καί ἄλλα διανύσματα $x\neq\underline{o}$ γιά τά ὁποῖα $x'Ax<o$ καί τέλος ἄλλα γιά τά ὁποῖα $x'Ax=o$.

Ἡ παραπάνω ὁρολογία χρησιμοποιεῖται ὄχι μόνο γιά τίς τετραγωνικές μορφές ἀλλά καί γιά τίς μῆτρες πού ἀντιστοιχοῦν στίς μορφές αὐτές.

Παραδείγματα:

(α) Ἡ $\varphi = 2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2$ εἶναι θετικά ὁρισμένη

(β) Ἡ $\psi = -\varphi$ εἶναι ἀρνητικά ὁρισμένη

(γ) Ἡ $\rho = 2x_1^2+(3x_2-5x_3)^2$ εἶναι θετικά ἡμιορισμένη διότι εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό μηδέν γιά ὅλες τίς τιμές τῶν $x_i, i=1,2,3$ καί γιά τήν τιμή $x_1=o$ $x_2=(5/3)x_3\neq o$ ἡ ρ εἶναι ἴση μέ τό μηδέν.

(δ) Ἡ $\sigma = -\rho$ εἶναι ἀρνητικά ἡμιορισμένη.

(ε) Ἡ $\omega = 2x_1^2 - 3x_2^2$ εἶναι προσηματικά ὄχι ὁρισμένη διότι

$$\text{ἄν } x_1^2 > \tfrac{3}{2}x_2^2, \quad \omega > 0$$
$$\text{ἄν } x_1^2 = \tfrac{3}{2}x_2^2, \quad \omega = 0 \quad \text{καί}$$
$$\text{ἄν } x_1^2 < \tfrac{3}{2}x_2^2, \quad \omega < 0 .$$

Γιά νά διαπιστώσουμε τό εἶδος μιᾶς τετραγωνικῆς μορφῆς μᾶς χρειάζεται τό ἀκόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα: Μιά θετικά ὁρισμένη τετραγωνική μορφή παραμένει θετικά ὁρισμένη ὅταν ἐκφραστῆ σέ νέες μεταβλητές πού συνδέονται μέ τίς παλιές μέσῳ ἑνός γραμμικοῦ ὄχι ἰδιάζοντα μετασχηματισμοῦ. Δηλαδή

"Αν $x'Ax > 0$ καί ἄν $x=Ry$ καί $\det R \neq 0$

τότε

$$x'Ax = (Ry)'ARy = y'R'ARy = y'By > 0$$

ὅπου $B = R'AR$.

Ἀπόδειξη: "Αν $\det R \neq 0$ τότε

$$y = R^{-1}x$$

καί ἐφόσον ὑπάρχει μιά καί μόνο μιά ἀντίστροφη μήτρα, σέ κάθε διάνυσμα x ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνο ἕνα διάνυσμα y . Ἐπομένως τό διάνυσμα y παίρνει τίς τιμές του ἀπό τό ἴδιο σύνολο ἀπό τό ὁποῖο παίρνει τίς τιμές του καί τό διάνυσμα x . Κατά συνέπεια γιά ὅλες τίς τιμές $x \neq \underline{0}$ γιά τίς ὁποῖες $x'Ax > 0$ ἀντιστοιχοῦν τιμές $y = R^{-1}x \neq \underline{0}$ γιά τίς ὁποῖες $y'By > 0$. Τέλος $x'Ax = 0$ μόνον ἐφόσον $x = \underline{0}$ Ἀλλά γιά τήν τιμή $x = \underline{0}$, $y = R^{-1}x = \underline{0}$ καί ἐπομένως μόνο γι αὐτήν τήν τιμή $y'By = 0$.

Τό θεώρημα αὐτό ἰσχύει, κατ'ἀναλογίαν, καί γιά τίς ἀρνητικά ὁρισμένες τετραγωνικές μορφές καί χρησιμοποιεῖται πιό κάτω πολλές φορές.

Σέ ὅ,τι ἀκολουθεῖ οἱ μῆτρες στίς ὁποῖες ἀναφερόμαστε ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι συμμετρικές.

Ἀναλύουμε τώρα δυό τρόπους πού μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τόν προσδιορισμό τοῦ εἴδους μιᾶς τετραγωνικῆς μορφῆς. Ὁ πρῶτος τρόπος βασίζεται στό ἀκόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα: Μιά τετραγωνική μορφή $x'Ax$ εἶναι θετικά ὁρισμένη ὅταν καί μονον ὅταν ὅλες οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A εἶναι θετικές.

Ἀπόδειξη: Ἐφόσον ἡ μήτρα A εἶναι συμμετρική μποροῦμε νά γράφουμε

$$H'AH = \Lambda$$

ὅπου H εἶναι ἡ ὀρθογώνια μήτρα μέ στοιχεῖα τά στοιχεῖα τῶν χαρακτηριστικῶν διανυσμάτων τῆς μήτρας A καί Λ ἡ διαγώνια μήτρα μέ στοιχεῖα στήν κύρια διαγώνιό της τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A.

Πρῶτα ἀποδεικνύουμε ὅτι

ἄν $\lambda_i > o$, $i=1,\ldots\ldots,n$ τότε $x'Ax > o$

Στήν τετραγωνική μορφή $x'Ax$ ὑποθέταμε ὅτι οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος x δέν εἶναι ὅλες ἴσες μέ τό μηδέν. Στήν περίπτωση αὐτή καί οἱ συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $y=H'x$, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, δέν εἶναι ὅλες ἴσες μέ τό μηδέν. Ἐφόσον $HH' = I$ ἔχουμε $x = Hy$ καί ἡ τετραγωνική μορφή $x'Ax$ γράφεται ὡς ἑξῆς

$$x'Ax = ((Hy)'A(Hy) = y'H'AHy = y'\Lambda y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > o$$

εἶναι δηλαδή θετικά ὁρισμένη καί τοῦτο διότι ὑποθέσαμε ὅτι ὑπάρχουν y_i πού δέν εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν (κι ἐπομένως γιά τά y_i αὐτά $y_i^2 > o$) καί ἀρχίσαμε μέ τήν ὑπόθεση ὅτι ὅλες οἱ $\lambda_i > o$.

Τώρα ἀποδεικνύουμε ὅτι

ἄν $x'Ax > o$ τότε $\lambda_i > o$, $i=1,\ldots\ldots\ldots,n$

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μιά ἀπό τίς ρίζες, ἡ $\lambda_1 \leq o$ καί ὅτι τό διάνυσμα y' ἔχει τήν τιμή

$$y^{*\prime} = (1,o,\ldots\ldots\ldots,o)$$

Στήν περίπτωση αὐτή

$$x^* = Hy^* \neq \underline{o}$$

καί ή τετραγωνική μορφή έχει τήν τιμή

$$x^{*}{}'Ax^{*} = y^{*}{}'(H'AH)y^{*} = y^{*}{}'\Lambda y^{*} = \lambda_1 y_1^{*2} = \lambda_1 \leqslant 0$$

πράγμα πού έρχεται σέ αντίθεση μέ τήν υπόθεση ότι

$$x'Ax > 0$$

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορεί νά αποδειχτή ότι: Μιά τετραγωνική μορφή $x'Ax$ είναι αρνητικά ορισμένη όταν καί μόνον όταν όλες οί χαρακτηριστικές ρίζες τής μήτρας A είναι αρνητικές.

Τό θεώρημα αυτό μάς βοηθά στό νά βρούμε άν μιά τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη ή αρνητικά ορισμένη. Άν βρούμε ότι όλες οί χαρακτηριστικές ρίζες τής μήτρας A είναι θετικές, τότε ή τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη. Άν όλες οί χαρακτηριστικές ρίζες τής μήτρας A είναι αρνητικές, τότε ή τετραγωνική μορφή είναι αρνητικά ορισμένη.

Ένας άλλος τρόπος γιά νά προσδιορίσουμε τό είδος μιάς τετραγωνικής μορφής είναι ό εξής:

Πρώτα αποδεικνύουμε τήν πρόταση ότι: Ή ορίζουσα μιάς συμμετρικής μήτρας είναι ίση μέ τήν ορίζουσα τής διαγώνιας μήτρας πού στοιχεία της έχει τίς χαρακτηριστικές ρίζες τής αρχικής μήτρας. Εφόσον

$$A = H\Lambda H'$$

έπεται ότι

$$\det A = \det(H\Lambda H') = \det H \det\Lambda \det(H') = \det(H'H)\det\Lambda$$

$$1\det\Lambda = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

δηλαδή ή ορίζουσα τής μήτρας A είναι ίση μέ τό γινόμενο τών χαρακτηριστικών ριζών της.

Μέ βάση τήν πρόταση αυτή καθώς καί τό θεώρημα πού αποδείξαμε πιό πάνω έχουμε τίς εξής συνθήκες:

(i) Άν ή τετραγωνική μορφή $x'Ax > 0$ τότε όλες οί χαρακτηριστικές ρίζες τής μήτρας A είναι θετικές καί επομένως

$$\det A = \det\Lambda > 0$$

(ii) Άν ή τετραγωνική μορφή $x'Ax < 0$ τότε όλες οί χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A εἶναι ἀρνητικές κι'ἐπομένως ή

$$\det A = \det \Lambda$$

ἔχει πρόσημο $(-1)^n$ ὅπου n εἶναι τό πλῆθος τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν τῆς μήτρας A.

Άν ὅμως περιοριστοῦμε στό πρόσημο τῆς detA δέν μποροῦμε νά ξέρουμε ἄν μιά τετραγωνική μορφή εἶναι θετικά ὁρισμένη ή ἀρνητικά ὁρισμένη στήν περίπτωση πού τό n εἶναι ἄρτιος ἀριθμός διότι τότε $\det A > 0$ ὁπωσδήποτε. Γιά νά ξεκαθαρίσουμε τήν περίπτωση αὐτή χρειάζεται νά ἐρευνήσουμε περισσότερο τίς τετραγωνικές μορφές μέ n μεταβλητές.

Ἐφόσον ή μήτρα A εἶναι συμμετρική (κι'ἐπομένως $a_{in}=a_{ni}$) καί ἀφοῦ $x_i x_n = x_n x_i$ ή τετραγωνική μορφή $x'Ax$ μπορεῖ νά γραφτῆ ἀναλυτικότερα ὡς ἑξῆς:

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j + $$

$$+\left(2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i x_n + a_{nn}x_n^2\right)$$

Γράφοντας τήν τετραγωνική μορφή σάν ἄθροισμα τριῶν ὅρων χωρίζουμε (μέ τούς δυό ὅρους πού εἶναι μέσα στήν παρένθεση) τούς ὅρους ἐκείνους τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς πού περιλαμβάνουν τά στοιχεῖα τῆς τελευταίας γραμμῆς καί στήλης τῆς μήτρας A.

Άν τώρα ὁρίσουμε σάν:

Π ρ ω τ ε ύ ο υ σ α ὑ π ο μ ή τ ρ α (Principal submatrix) διαστάσεων $(n-j)x(n-j)$ τήν ὑπομήτρα ἐκείνη πού προκύπτει ὅταν ἀπαλείψουμε τίς j $(j=1,\ldots\ldots,n-1)$ τελευταῖες γραμμές καί στῆλες τῆς ἀρχικῆς μήτρας (πρόκειται δηλαδή γιά τήν ὑπομήτρα ἐκείνη πού στήν κύρια διαγώνιό της ἔχει τά n-j στοιχεῖα τῆς κύριας διαγωνίου τῆς ἀρχικῆς μήτρας) τότε ή

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_i x_j$$

εἶναι ή τετραγωνική μορφή τῆς πρωτεύουσας ὑπομήτρας διαστάσεων $(n-1)x(n-1)$.

῾Η τετραγωνική ὅμως μορφή $x'Ax$ εἶναι θετικά ὁρισμένη ἄν γιά ὅλα τά διανύσματα $x\neq \underline{o}$ ἔχουμε $x'Ax > o$. Τά διανύσματα $x\neq \underline{o}$ περιλαμβάνουν κι᾽ἐκεῖνα πού ἔχουν $x_n=o$ ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες x_i, $i=1,\dots\dots\dots,n-1$ μποροῦν νά πάρουν ὁποιαισδήποτε ἄλλες τιμές. Στήν εἰδική αὐτή περίπτωση

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_ix_j = x'_{n-1}A_{n-1}x_{n-1}$$

ὅπου οἱ δεῖχτες στό διάνυσμα x καί στή μήτρα A σκοπό ἔχουν νά ὑποδηλώσουν ὅτι οἱ διαστάσεις τοῦ διανύσματος x καί τῆς μήτρας A ἔχουν μειωθῆ κατά 1 (τό τελευταῖο στοιχεῖο στήν περίπτωση τοῦ διανύσματος καί τήν τελευταία γραμμή καί στήλη στήν περίπτωση τῆς μήτρας).

῎Αν ἡ $x'Ax > o$ τότε καί ἡ $x'_{n-1}A_{n-1}x_{n-1} > o$ σχέση πού, σύμφωνα μέ τό θεώρημα πού ἀποδείξαμε πιό πάνω, συνεπάγεται ὅτι $\det A_{n-1} > o$. ᾽Από τήν ἄλλη μεριά ἄν ἡ $x'Ax < o$ καί τό n εἶναι ἄρτιος ἀριθμός τότε $\det A > o$ ἀλλά $\det A_{n-1} < o$ διότι τό $n-1$ εἶναι περιττός ἀριθμός καί ἡ $(-1)^{n-1}$ δίνει ἀρνητικό πρόσημο.

῎Αν, τέλος, ὁρίσουμε σάν

Π ρ ω τ ε ύ ο υ σ α ἐ λ ά σ σ ο ν α ὁ ρ ί ζ ο υ σ α (Principal minor) τάξεως $n-j$ τήν ὁρίζουσα τῆς πρωτεύουσας ὑπομήτρας διαστάσεων $(n-j)x(n-j)$ τότε γιά νά διακρίνουμε τό εἶδος μιᾶς τετραγωνικῆς μορφῆς ἔχουμε τίς συνθῆκες:

(I) Μιά τετραγωνική μορφή $x'Ax$ εἶναι θετικά ὁρισμένη ὅταν καί μόνον ὅταν ὅλες οἱ πρωτεύουσες ἐλάσσονες ὁρίζουσες τῆς μήτρας A εἶναι θετικές.

(II) Μιά τετραγωνική μορφή $x'Ax$ εἶναι ἀρνητικά ὁρισμένη ὅταν καί μόνον ὅταν οἱ πρωτεύουσες ἐλάσσονες ὁρίζουσες τάξεως $n-j$ ἔχουν τό πρόσημο

$$(-1)^{n-j},\ j = 1,\dots\dots\dots,n-1$$

Παραδείγματα: Στά παραδείγματα πού θά δώσουμε ἀντί νά πάρουμε τίς τετραγωνικές μορφές θά πάρουμε μόνο τίς σχετικές μῆτρες.

Σάν πρῶτο παράδειγμα παίρνουμε τή μήτρα:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 17 \\ 0 & 17 & 11 \end{bmatrix}$$

Γιά νά βροῦμε τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A λύναμε τήν ἐξίσωση

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 35-\lambda & 17 \\ 0 & 17 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)\{(35-\lambda)(11-\lambda)-17^2\} = 0$$

Ὅπως εἶναι φανερό ὅλες οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A εἶναι θετικές. Ἄρα ἡ ἀντίστοιχη τετραγωνική μορφή εἶναι θετικά ὁρισμένη.

Ἐφαρμόζοντας τό δεύτερο τρόπο γιά νά προσδιορίσουμε τό εἶδος τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς ἐξετάζουμε τίς πρωτεύουσες ἐλάσσονες ὁρίζουσες, δηλαδή

$$6 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 35 \end{vmatrix} = 210 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 17 \\ 0 & 17 & 11 \end{vmatrix} = 576 > 0$$

Ἀφοῦ ὅλες οἱ πρωτεύουσες ἐλάσσονες ὁρίζουσες εἶναι θετικές ἕπεται ὅτι, ὅπως καί μέ τόν πρῶτο τρόπο, ἡ ἀντίστοιχη τετραγωνική μορφή εἶναι θετικά ὁρισμένη.

(ii) Σάν δεύτερο παράδειγμα παίρνουμε τή μήτρα

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Στήν περίπτωση αὐτή οἱ χαρακτηριστικές ρίζες (πού εἶναι ἴσες μέ τά διαγώνια στοιχεῖα τῆς μήτρας D) εἶναι ὅλες ἀρνητικές. Ἄρα ἡ ἀντίστοιχη τετραγωνική μορφή εἶναι ἀρνητικά ὁρισμένη.

Ἐφαρμόζοντας τό δεύτερο τρόπο βλέπουμε ὅτι

$$-5 < 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 30 > 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -210 < 0$$

Ἐφόσον ἔχουμε ἐναλλαγή στά πρόσημα τῶν πρωτευουσῶν ἐλασσόνων ὁριζουσῶν ἕπεται ὅτι ἡ ἀντίστοιχη τετραγωνική μορφή εἶναι ἀρνητικά ὁρισμένη.

Στό κεφάλαιο τοῦτο δέν θά ἀσχοληθοῦμε μέ τίς θετικά ἡμιορισμένες καί τίς ἀρνητικά ἡμιορισμένες τετραγωνικές μορφές. Ἀρκούμαστε νά σημειώσουμε μόνο ἐδῶ ὅτι ἡ τετραγωνική μορφή $x'Ax$ εἶναι θετικά ἡμιορισμένη ὅταν καμιά ἀπό τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A δέν εἶναι ἀρνητική καί μιά τουλάχιστον εἶναι ἴση μέ τό μηδέν. Ἡ τετραγωνική μορφή $x'Ax$ εἶναι ἀρνητικά ἡμιορισμένη ὅταν καμιά ἀπό τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A δέν εἶναι θετικές καί μιά τουλάχιστον εἶναι ἴση μέ τό μηδέν.

Στή συνέχεια τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ θά ἀναφερθοῦμε στίς (συμμετρικές) θετικά ὁρισμένες μῆτρες (τετραγωνικές μορφές). Σ'ὅλες τίς περιπτώσεις θά ὑποθέσουμε ὅτι οἱ μῆτρες εἶναι διαστάσεων nxn. Γιά τίς μῆτρες αὐτές ἀποδεικνύουμε τίς ἑξῆς προτάσεις (βλέπε ἐπίσης καί Dhrymes(1970), Goldberger(1964) Lancaster(1968))

(α) ″Αν ἡ μήτρα A εἶναι θετικά ὁρισμένη τότε $\det A \neq 0$ καί $r(A) = n$.

Ἐφόσον ἡ μήτρα A ὑποτίθεται ὅτι εἶναι συμμετρική, ἕπεται ὅτι μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$A = H\Lambda H' .$$

Πιό πάνω δείξαμε ὅτι

$$\det A = \det\Lambda = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$$

ἀφοῦ ὅλες οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A εἶναι θετικές.

Ἐπιπλεόν ἀφοῦ ἡ τάξη τῆς ὁρίζουσας τῆς μήτρας A εἶναι n, ἕπεται ὅτι

$$r(A) = n$$

(β) ″Αν A εἶναι μιά nxn θετικά ὁρισμένη μήτρα καί P μιά nxm μήτρα μέ $r(P)=m<n$, τότε τό γινόμενο

$$P'AP$$

εἶναι ἐπίσης μιά θετικά ὁρισμένη μήτρα.

Πρῶτα πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι ἐφόσον $A=A'$ τότε καί τό γινόμενο $P'AP$ εἶναι μιά συμμετρική μήτρα διότι

$$(P'AP)' = P'A'P = P'AP$$

Ἄν τώρα πολλαπλασιάσουμε τή μήτρα $P'AP$ μέ y' ἀπό τά ἀριστερά καί μέ y ἀπό τά δεξιά (ὅπου $y \neq \underline{o}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα μέ m συντεταγμένες), ἔχουμε

$$y'P'APy$$

Ἄν θέσουμε

$$x = Py$$

ἡ τετραγωνική μορφή $y'P'APy$ γίνεται

$$x'Ax$$

Ἐφόσον

$$r(P) = m < n$$

σύμφωνα μέ ὅσα ἀναφέραμε γιά τά ὁμογενῆ συστήματα στό τρίτο κεφάλαιο ἕπεται ὅτι

$$x = Py \neq \underline{o}$$

καί ἐφόσον ἡ μήτρα A εἶναι θετικά ὁρισμένη ἕπεται ὅτι

$$x'Ax = y'P'APy > o$$

δηλαδή καί ἡ μήτρα $P'AP$ εἶναι θετικά ὁρισμένη.

Παραδείγματα:

1. Ἡ πρώτη περίπτωση μήτρας πού συναντοῦμε στή Θεωρητική Οἰκονομετρία εἶναι ἡ μήτρα Txn

$$X \qquad \text{μέ} \quad r(X)=n<T$$

Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά πάρουμε σάν μήτρα A τήν I_T πού εἶναι καί συμμετρική καί θετικά ὁρισμένη.

Πρῶτα βλέπουμε ὅτι

$$(X'IX)' = X'IX = X'X$$

ἄρα $X'X$ εἶναι συμμετρική. Ἐπιπλέον ἐφόσον ἡ μήτρα I_T εἶναι θετικά ὁρισμένη καί $r(X)=n<T$ ἕπεται ὅτι, σύμφωνα μέ τήν πρόταση (β), καί ἡ μήτρα $X'X$ εἶναι θετικά ὁρισμένη.

Ἄν πάρουμε τήν nxn μήτρα A καί σάν μήτρα P τήν A^{-1} τότε ἐφόσον ἡ μήτρα A εἶναι συμμετρική ἕπεται ὅτι

$$(A^{-1})' = (A')^{-1} = A^{-1}$$

Στήν περίπτωση αὐτή, ἐπομένως

$$P'AP = A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$$

καί, σύμφωνα μέ τήν πρόταση (β) ἡ μήτρα

$$P'AP = A^{-1}$$

εἶναι θετικά ὁρισμένη.

(γ) "Αν ἡ μήτρα A εἶναι θετικά ὁρισμένη τότε μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$A = WW'$$

ὅπου W εἶναι μιά μή ἰδιάζουσα μήτρα.

'Εφόσον ἡ μήτρα A εἶναι συμμετρική ξέρουμε ὅτι μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$A = H\Lambda H'$$

'Επιπλέον

$$\Lambda = \Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}$$

"Αρα

$$A = H\Lambda H' = H\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}H'$$

"Αν πάρουμε μιά ὀρθογώνια μήτρα K , τότε, ἐφόσον

$$K'K = I$$

μποροῦμε νά γράφουμε τή μήτρα A ὡς ἑξῆς

$$A = H\Lambda^{\frac{1}{2}}I\Lambda^{\frac{1}{2}}H' = H\Lambda^{\frac{1}{2}}K'K\Lambda^{\frac{1}{2}}H' = (H\Lambda^{\frac{1}{2}}K')(K\Lambda^{\frac{1}{2}}H')$$

"Αν ἐπομένως θέσουμε

$$W = H\Lambda^{\frac{1}{2}}K'$$

ἡ μήτρα A μπορεῖ νά γραφτῆ A= WW'.

(δ) "Αν ἡ μήτρα A εἶναι θετικά ὁρισμένη τότε ὑπάρχει μιά μή ἰδιάζουσα μήτρα V τέτοια ὥστε

$$VAV' = I \quad \text{καί} \quad A^{-1} = V'V$$

'Εφόσον

$$\Lambda = H'AH$$

καί ἐφόσον

$$\Lambda = \Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}$$

πολλαπλασιάζουμε τήν Λ μέ $\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ ἀπό τά ἀριστερά κι'ἀπό τά δεξιά καί ἔχουμε

$$\Lambda^{-\frac{1}{2}}\Lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}(H'AH)\Lambda^{-\frac{1}{2}} = (\Lambda^{-\frac{1}{2}}H')A(H\Lambda^{-\frac{1}{2}}) = I = VAV'$$

ὁπότε εἶναι φανερό ὅτι

$$V = \Lambda^{-\frac{1}{2}}H'$$

'Επιπλέον πολλαπλασιάζοντας τήν ἐξίσωση

$$VAV' = I$$

ἀπό τά ἀριστερά μέ V' καί ἀπό τά δεξιά μέ V, ἔχουμε

$$(V'V)A(V'V) = V'V$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν ἐξίσωση αὐτή ἀπό τά δεξιά μέ

$$(V'V)^{-1}$$

ἔχουμε

$$(V'V)A = I$$

καί, τέλος, πολλαπλασιάζοντας τήν τελευταία ἐξίσωση μέ A^{-1} ἀπό τά δεξιά ἔχουμε

$$A^{-1} = V'V$$

Μέ τό ἀποτέλεσμα αὐτό συμπληρώνεται ἡ ἀπόδειξη τῆς προτάσεως (δ).

Τόσο ἡ πρόταση (γ) ὅσο καί ἡ πρόταση (δ) ἀποτελοῦν παραδείγματα διασπάσεως μιᾶς μήτρας σέ γινόμενο δύο ἄλλων μητρῶν. 'Η μορφή πού θά πάρουν οἱ μῆτρες αὐτές δέν εἶναι μοναδική (βλέπε καί Dhrymes (1970) . Στό βιβλίο αὐτό, κατά κύριο λόγο, βασίζονται καί τά ὅσα θά ἀναφερθοῦν παρακάτω).

"Αν ἔχουμε δυό μῆτρες A καί B πού εἶναι καί οἱ δυό συμμετρικές μπορεῖ νά θέλουμε νά τίς διασπάσουμε ταυτόχρονα σέ γινόμενα δυό μητρῶν. Στήν περίπτωση αὐτή χρειαζόμαστε τήν ἔννοια τοῦ Μ έ τ ρ ο υ (Metric)στό ὁποῖο ἀναφέρονται οἱ χαρακτηριστικές ρίζες μιᾶς μήτρας.

"Οταν λύνουμε τήν ἐξίσωση:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

τότε τό μέτρο τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν τῆς μήτρας Α εἶναι ἡ ταυτοτική μήτρα.

"Οταν ὅμως λύνουμε τήν ἐξίσωση

$$\det(\lambda A - B) = 0$$

τότε ἡ μήτρα Α, μέ τή σειρά της, ἀποτελεῖ τό μέτρο στό ὁποῖο ἀναφέρονται οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας Β.

'Εφοδιασμένοι μέ τή νέα αὐτή ἔννοια μποροῦμε ν'ἀποδείξουμε κι'ἄλλες προτάσεις σχετικά μέ τίς θετικά ὁρισμένες μῆτρες.

(ε) "Αν ἡ μήτρα Α εἶναι θετικά ὁρισμένη καί ἡ μήτρα Β εἶναι θετικά ἡμιορισμένη τότε οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας Β στό μέτρο τῆς μήτρας Α δέν εἶναι ἀρνητικές. "Αν ἡ μήτρα Β εἶναι κι'αὐτή θετικά ὁρισμένη τότε οἱ χαρακτηριστικές ρίζες της στό μέτρο τῆς μήτρας εἶναι θετικές.

Στήν πρόταση (γ) δείξαμε ὅτι ἡ μήτρα μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς: $A = WW'$

"Αν πάρουμε τώρα τή χαρακτηριστική ἐξίσωση τῆς μήτρας Β στό μέτρο τῆς μήτρας Α μποροῦμε νά τή γράφουμε ὡς ἑξῆς:

$$\det(\lambda A - B) = \det(\lambda WW' - B) = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας τή μήτρα πού βρίσκεται μέσα στήν παρένθεση μέ

$$WW^{-1} = I$$

ἀπό τά ἀριστερά, καί μέ

$$(W')^{-1}W' = I$$

ἀπό τά δεξιά, ἡ ὁρίζουσά της δέν ἀλλάζει. "Ετσι ἔχουμε

$$\det(\lambda WW' - B) = \det\left\{\lambda WW^{-1}WW'(W')^{-1}W' - WW^{-1}B(W')^{-1}W'\right\} =$$

$$\det\left\{W\left(\lambda W^{-1}WW'(W')^{-1} - W^{-1}B(W')^{-1}\right)W'\right\} =$$

$$= \det W \det(\lambda I - W^{-1}B(W')^{-1})\det W' =$$

$$= (\det W)^2 \det(\lambda I - W^{-1}B(W')^{-1}) = 0$$

Κατά συνέπεια οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας Β στό μέτρο τῆς μήτρας Α εἶναι ἀκριβῶς οἱ ἴδιες μέ τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας

$$W^{-1}B(W')^{-1}$$

στό μέτρο τῆς ταυτοτικῆς μήτρας.

Μέ βάση τό θεώρημα πού ἀποδείξαμε στήν ἀρχή τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ (πού μπορεῖ νά ἐπεκταθῆ καί στίς θετικά ἡμιορισμένες μῆτρες) ἄν ἡ μήτρα Β εἶναι θετικά ἡμιορισμένη τό ἴδιο εἶναι καί ἡ μήτρα

$$W^{-1}B(W')^{-1}$$

διότι, σύμφωνα μέ τό θεώρημα αὐτό, ἄν γράφουμε

$$y = (W')^{-1}x$$

τότε

$$x'W^{-1}B(W')^{-1}x = y'By \geqslant 0$$

κι'ἐπομένως οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας Β στό μέτρο τῆς μήτρας Α δέν εἶναι ἀρνητικές.

Ἄν ἡ μήτρα Β εἶναι θετικά ὁρισμένη τότε

$$x'W^{-1}B(W')^{-1}x = y'By > 0$$

κι'ἐπομένως οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας Β στό μέτρο τῆς μήτρας Α εἶναι θετικές.

(στ) Ἄν ἡ μήτρα Α εἶναι θετικά ὁρισμένη καί ἡ μήτρα Β θετικά ἡμιορισμένη τότε μπορεῖ νά βρεθῆ μιά μήτρα W^* τέτοια ὥστε

$$A = W^*W^* \quad \text{καί} \quad B = W^*\Lambda^*W^*$$

ὅπου Λ^* εἶναι ἡ διαγώνια μήτρα τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν τῆς μήτρας Β στό μέτρο τῆς μήτρας Α.

Εἴδαμε στήν προηγούμενη πρόταση ὅτι οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας

$$W^{-1}B(W')^{-1}$$

στό μέτρο τῆς ταυτοτικῆς μήτρας εἶναι οἱ ἴδιες μέ ἐκεῖνες τῆς μήτρας B στό μέτρο τῆς μήτρας A. Ἐπομένως ἄν H^* εἶναι ἡ μήτρα μέ στοιχεῖα τά στοιχεῖα τῶν χαρακτηριστικῶν διανυσμάτων πού ἀντιστοιχοῦν στίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας B στό μέτρο τῆς μήτρας A τότε

$$W^{-1}B(W')^{-1}H^* = H^* \Lambda^*$$

Ἐφόσον ὅμως ὑποθέσαμε ὅτι ἡ μήτρα B εἶναι συμμετρική, συμμετρική εἶναι καί ἡ μήτρα

$$W^{-1}B(W')^{-1}$$

ἐπομένως μποροῦμε νά πολλαπλασιάσουμε τήν παραπάνω ἐξίσωση μέ $H^{*\prime}$ ἀπό τά δεξιά, ὁπότε ἔχουμε

$$W^{-1}B(W')^{-1} = H^*\Lambda^*H^{*\prime}$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν τελευταία ἐξίσωση μέ W ἀπό τά ἀριστερά καί μέ W' ἀπό τά δεξιά ἔχουμε

$$B = WH^*\Lambda^*H^{*\prime}W'$$

Ἄν θέσουμε

$$W^* = WH^*$$

τότε βλέπουμε ὅτι

$$W^*W^{*\prime} = WH^*H^{*\prime}W' = WIW' = WW' = A$$

καί

$$B = W^*\Lambda^*W^{*\prime}$$

ἀποτελέσματα πού ἀποδεικνύουν τήν πρόταση (στ).

(ζ) Ἄν τόσο ἡ μήτρα A ὅσο καί ἡ μήτρα B εἶναι θετικά ὁρισμένες τότε ἡ μήτρα

$$A - B$$

εἶναι θετικά ὁρισμένη ὅταν καί μόνον ὅταν ὅλες οἱ χαρακτηριστικές ρίζες λ_i^* τῆς μήτρας B στό μέτρο τῆς μήτρας A εἶναι μικρότερες ἀπό τή μονάδα.

Σύμφωνα μέ ὅσα ἀποδείξαμε στήν προηγούμενη πρόταση μποροῦμε νά γράφουμε

$$A-B = W^*W^{*\prime} - W^*\Lambda^*W^{*\prime} = W^*(I - \Lambda^*)W^{*\prime}$$

῎Αν τώρα θέσουμε

$$y = W^{*\prime}x$$

τότε

$$x'W^*(I - \Lambda^*)W^{*\prime}x = y'(I - \Lambda^*)y = \sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i^*)y_i^2$$

ὁπότε ἄν ὅλες οἱ χαρακτηριστικές ρίζες $\lambda_i^*<1$ τότε

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i^*)y_i^2 > 0$$

κι᾽ ἐπομένως ἡ μήτρα $A-B$ εἶναι θετικά ὁρισμένη.

᾽Αποδεικνύομε τώρα τήν πρόταση ὅτι : ῎Αν ἡ μήτρα $A-B$ εἶναι θετικά ὁρισμένη τότε ὅλες οἱ χαρακτηριστικές ρίζες $\lambda_i^* < 1$.

῎Ας ὑποθέσουμε ὅτι, ἀντίθετα μέ τήν πρόταση αὐτή ὅτι μιά ἀπό τίς χαρακτηριστικές ρίζες λ_1^* ,ἔστω ἡ $\lambda_1^* \geqslant 1$. Τότε ἄν διαλέξουμε τό διάνυσμα y ἔτσι ὥστε ὅλες οἱ συντεταγμένες του νά εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν ἐκτός ἀπό τήν y_1 τότε

$$\sum_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i^*)y_i^2 = (1 - \lambda_1^*)y_1^2 \leqslant 0$$

Τό ἀποτέλεσμα ὅμως αὐτό εἶναι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ $A-B$ εἶναι θετικά ὁρισμένη.

῎Αν ἡ μήτρα B εἶναι θετικά ἡμιορισμένη τότε εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ χαρακτηριστικές ρίζες

$$\lambda_i^* \leqslant 1$$

(η) ῎Ας ὑποθέσουμε ὅτι τόσο ἡ μήτρα A ὅσο καί ἡ μήτρα B εἶναι θετικά ὁρισμένες καί ἀκόμα ὅτι ἡ μήτρα $A - B$ εἶναι θετικά ὁρισμένη. Τότε καί ἡ μήτρα

$$B^{-1} - A^{-1}$$

εἶναι θετικά ὁρισμένη.

῎Αν πάρουμε τή μήτρα

$$B^{-1} - A^{-1}$$

καί πολλαπλασιάσουμε τήν B^{-1} ἀπό τά δεξιά μέ $AA^{-1} = I$ καί τήν A^{-1} ἀπό τά ἀριστερά μέ $B^{-1}B = I$ ἡ μήτρα, ὅπως εἶναι γνωστό, δέν ἀλλάζει. ᾿Επομένως μποροῦμε νά γράφουμε :

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}AA^{-1} - B^{-1}BA^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1}$$

'Από τήν πρόταση (στ) έχουμε

$$A^{-1} = (W^{*\prime})^{-1}W^{*-1}$$

καί

$$B^{-1} = (W^{*\prime})^{-1}\Lambda^{*-1}W^{*-1}$$

Κάνοντας τίς άντικαταστάσεις τῶν A, B, A^{-1} καί B^{-1} μέ τά ἴσα τους έχουμε

$$B^{-1}(A - B)A^{-1} = (W^{*})^{-1}\Lambda^{*-1}W^{*-1}(W^{*}W^{*\prime} - W^{*}\Lambda^{*}W^{*\prime}).$$

$$(W^{*\prime})^{-1}W^{*-1} = (W^{*\prime})^{-1}\Lambda^{*-1}W^{*-1}W^{*}(I - \Lambda^{*})W^{*\prime}(W^{*\prime})^{-1}W^{*-1} =$$

$$= (W^{*\prime})^{-1}(\Lambda^{*-1} - I)W^{*-1}$$

'Επομένως άν θέσουμε

$$y = W^{*-1}x$$

τότε

$$x'(B^{-1} - A^{-1})x = x'(W^{*\prime})^{-1}(\Lambda^{*-1} - I)W^{*-1}x =$$

$$= y'(\Lambda^{*-1} - I)y =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_i^{*}} - 1\right)y_i^2$$

'Εφόσον ύποθέτουμε ότι ή $A-B$ είναι θετικά όρισμένη έπεται, σύμφωνα μέ τήν πρόταση (η), ότι

$$\lambda_i^{*} < 1\ , \text{ άρα } \frac{1}{\lambda_i^{*}} > 1 \quad \text{ ή } \quad \frac{1}{\lambda_i^{*}} - 1 > 0\ , i=1,\ldots,n.$$

καί κατά συνέπεια

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_i^{*}} - 1\right)y_i^2 = x'(B^{-1} - A^{-1})x > 0$$

δηλαδή ή μήτρα $B^{-1}-A^{-1}$ είναι θετικά όρισμένη.

Τέλος ἀποδεικνύουμε ὅτι

(θ) "Αν ἡ μήτρα $A-B$ εἶναι θετικά ὁρισμένη τότε

$$\det A > \det B$$

Ἐφόσον (σύμφωνα μέ τήν πρόταση (στ))

$$A = W^* W^{*\prime}$$

ἕπεται ὅτι

$$\det A = \det W^* \det(W^{*\prime}) = (\det W^*)^2$$

Ἐπιπλέον ἐφόσον (πάλι σύμφωνα μέ τήν πρόταση (στ))

$$B' = W^* \Lambda^* W^{*\prime}$$

ἕπεται ὅτι

$$\det B = \det W^* \det \Lambda^* \det(W^{*\prime}) = \det \Lambda^* (\det W^*)^2$$

"Αν ἀντικαταστήσουμε στήν τελευταία ἐξίσωση τήν

$$(\det W^*)^2$$

μέ τήν ἴση της, ἔχουμε

$$\det B = \det \Lambda^* \det A$$

Ἐφόσον (σύμφωνα μέ τήν πρόταση (ζ))

$$\lambda_i^* < 1, \quad i = 1, \ldots\ldots, n$$

τότε

$$\det \Lambda^* = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^* < 1$$

ἐπομένως

$$\det B < \det A$$

Κατά παρόμοιο τρόπο μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν ἡ μήτρα $A-B$ εἶναι θετικά ἡμιορισμένη (κι'ἐπομένως

$$\lambda_i^* \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots\ldots, n$$

τότε

$$\det A \geqslant \det B$$

II. Γινόμενα τοῦ Kronecker

"Αν ἔχουμε τίς μῆτρες A mxn καί B kxr τότε τό γινόμενο τοῦ Kronecker ὁρίζεται ὡς ἑξῆς

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό καθένα ἀπό τά στοιχεῖα τῆς μήτρας A πολλαπλασιάζεται μέ τή μήτρα B. Κατά συνέπειαν ἡ μήτρα

$$A\otimes B$$

εἶναι διαστάσεων mkxnr.

Παράδειγμα: "Αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

τότε τό γινόμενο τοῦ Kronecker εἶναι ἡ 4x6 μήτρα:

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 8 & 0 & 7 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

'Από τόν ὁρισμό τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker καί τίς πράξεις τῶν μητρῶν (βλέπε κεφάλαιο 1) ἀποδεικνύονται εὔκολα τά ἑξῆς:

$$(A\otimes B)' = A'\otimes B'$$

$$A\otimes(F + G) = A\otimes F + A\otimes G$$

$$(F + G)\otimes A = F\otimes A + G\otimes A$$

ὅπου ἡ μήτρα F ἔχει τίς ἴδιες διαστάσεις μέ τή μήτρα G. Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker , τό τελευταῖο γινόμενο, στή γενική περίπτωση, δέν εἶναι ἴσο μέ τό προτελευταῖο.

Γιά τά γινόμενα τοῦ Kronecker ἰσχύει ἀκόμα καί ἡ προσεταιριστική ἰδιότητα, δηλαδή

$$(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C) = A\otimes B\otimes C$$

Τέλος ἄν γράφουμε τή μήτρα A ὡς ἑξῆς:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

τότε

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}\otimes B & A_{12}\otimes B \\ A_{21}\otimes B & A_{22}\otimes B \end{bmatrix}$$

Π ο λ λ α π λ α σ ι α σ μ ό ς δύο γινομένων τοῦ Kronecker.

Ἄν πάρουμε τίς μῆτρες

A $m\text{x}n$, B $k\text{x}r$, C $n\text{x}s$ D $r\text{x}p$

τότε τά γινόμενα τοῦ Kronecker

$$A\otimes B \quad \text{καί} \quad C\otimes D$$

ἔχουν, ἀντίστοιχα, τίς διαστάσεις

$$(mk)\text{x}(nr) \text{ καί } (nr)\text{x}(sp)$$

δηλαδή τό πλῆθος τῶν στηλῶν τοῦ πρώτου γινομένου τοῦ Kronecker εἶναι τό ἴδιο μέ τό πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ δεύτερου. Κατά συνέπειαν ἔχουμε

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = \begin{bmatrix} a_{11}B & \ldots\ldots\ldots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \ldots\ldots\ldots & a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & \ldots\ldots\ldots & c_{1s}D \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1}D & \ldots\ldots\ldots & c_{ns}D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_{j1}BD & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_{js}BD \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_{j1}BD & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}c_{js}BD \end{bmatrix}$$

Όπως εἶναι φανερό ἀπό τό ἀποτέλεσμα αὐτό, τά στοιχεῖα τῆς τελευταίας μήτρας, πού ἔχουν σάν κοινό παράγοντα τή μήτρα BD, ἀνήκουν στή μήτρα AC.

Ἑπομένως

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD$$

Γιά νά μπορῆ, κατά συνέπεια, νά γίνη ὁ πολλαπλασιασμός δύο γινομένων τοῦ Kronecker χρειάζεται νά εἶναι δυνατός ὁ πολλαπλασιασμός τῆς μήτρας στήν ἀριστερή πλευρά τοῦ πρώτου γινομένου μέ τή μήτρα στήν ἀριστερή πλευρά τοῦ δεύτερου καί τῆς μήτρας στή δεξιά πλευρά τοῦ πρώτου μέ τή μήτρα στή δεξιά πλευρά τοῦ δεύτερου.

Παράδειγμα: Ἄν πάρουμε τίς μῆτρες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 0 \\ 10 & 31 & 18 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 11 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 & 31 & 31 & 0 & 18 & 18 \end{bmatrix}$$

Γενικότερα ἄν ἔχουμε τά πολλαπλασιάσιμα γι-νόμενα τοῦ Kronecker

$$A_i \otimes B_i \quad , \; i = 1,\ldots\ldots\ldots,n$$

τότε

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)\ldots\ldots\ldots(A_n \otimes B_n) = \prod_{i=1}^{n} A_i \otimes B_i =$$

$$=(A_1 A_2 \ldots\ldots A_n) \otimes (B_1 B_2 \ldots\ldots\ldots B_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} A_i \otimes \prod_{i=1}^{n} B_i$$

Ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ η μήτρα ἑνός γινομένου τοῦ Kronecker.

Ἄν ἔχουμε δυό τετραγωνικές μῆτρες

$$A \quad nxn \quad , \quad B \quad mxm$$

καί

$$\det A \neq 0 \quad , \quad \det B \neq 0$$

δηλαδή καί οἱ δυό εἶναι ἀντιστρέψιμες, τότε ἀναζητοῦμε μιά μήτρα

$$L \otimes N$$

τέτοια ὥστε

$$(A \otimes B)(L \otimes N) = I$$

ὅπου οἱ διαστάσεις τῶν μητρῶν εἶναι

$$L \quad nxn, \quad N \quad mxm \quad , \quad I \quad (nm)x(nm)$$

Πολλαπλασιάζοντας τά δυό γινόμενα τοῦ Kronecker ἔχουμε

$$AL \otimes BN = I_{nm}$$

Ἀλλά

$$I_{nm} = I_n \otimes I_m$$

Ἑπομένως

$$AL \otimes BN = I_n \otimes I_m$$

Ἐξισώνοντας τίς ἀντίστοιχες πλευρές τῶν δύο γινομένων τοῦ Kronecker στήν τελευταία ἐξίσωση ἔχουμε

$$AL = I_n \quad , \quad BN = I_m$$

Ἄρα

$$L = A^{-1} \quad , \quad N = B^{-1}$$

Κατά συνέπεια ἡ ἀντίστροφη μήτρα τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker $A \otimes B$ πού ἀναζητούσαμε εἶναι ἡ μήτρα

$$A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Παράδειγμα: Ἄν πάρουμε τίς μῆτρες,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

βροῦμε τό γινόμενο τοῦ Kronecker $A \otimes B$ καί μετά βροῦμε τήν ἀντίστροφη τῆς μήτρας $A \otimes B$ ἔχουμε

$$(A \otimes B)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ἀπό τήν ἄλλη μεριά

$$A^{-1} \otimes B^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (A \otimes B)^{-1}$$

Γιά νά ἐλέγξουμε τό ἀποτέλεσμα κάνουμε τόν πολλαπλασιασμό

$$(A \otimes B)(A \otimes B)^{-1} = (A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I_4$$

Παίρνοντας τίς άντιστρέψιμες μήτρες

$A\ nxn\ ,\ B\ mxm$

θά άσχοληθοῦμε στό ὑπόλοιπο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ μέ τίς χαρακτηριστικές ρίζες, τό ἴχνος, τό βαθμό καί τήν ὁρίζουσα τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker

$A\otimes B$

(i) Χαρακτηριστικές ρίζες τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker $A\otimes B$.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A εἶναι οἱ

$\lambda_i\ ,\ i = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots,n$

καί τῆς μήτρας B οἱ

$\mu_j\ ,\ j = 1,\ldots\ldots\ldots,m$

μέ ἀντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα στίς λ_i τά

$h_{.i},\ i = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots,n$

καί στίς μ_j τά

$k_{.j},\ j = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots,m$

Γιά τίς χαρακτηριστικές αὐτές ρίζες καί τά ἀντίστοιχα χαρακτηριστικά διανύσματα ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες χαρακτηριστικές ἐξισώσεις

$Ah_{.i} = \lambda_i h_{.i}\ ,\ i = 1,\ldots\ldots\ldots\ldots,n$

καί

$Bk_{.j} = \mu_j k_{.j}\ ,\ j = 1,\ldots\ldots\ldots,m$

Ἐφόσον τά διανύσματα $h_{.i}$ καί $k_{.j}$ μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν μῆτρες μέ διαστάσεις nxl καί mxl μποροῦμε νά ὁρίσουμε γι'αὐτά τά γινόμενα τοῦ Kronecker

$h_{.i}\otimes k_{.j}\ ,\ i=1,\ldots\ldots\ldots,n\ ;\ \ j = 1,\ldots\ldots\ldots,m$

πού εἶναι διανύσματα στῆλες μέ διάσταση nm. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ ἀριθμητικοῦ πολλαπλασιασμοῦ διανύσματος ἔχουμε

$$\lambda_i h_{.i}\otimes\mu_j k_{.j} = \lambda_i\mu_j(h_{.i}\otimes k_{.j})$$

Ἄν τώρα πάρουμε τά γινόμενα τοῦ Kronecker τῶν δύο πλευρῶν τῶν χαρακτηριστικῶν ἐξισώσεων τῶν μητρῶν A καί B, ἔχουμε

$$Ah_{.i}\otimes Bk_{.j} = \lambda_i h_{.i}\otimes \mu_j k_{.j}$$

ἤ

$$(A\otimes B)(h_{.i}\otimes k_{.j}) = \lambda_i \mu_j (h_{.i}\otimes k_{.j})$$

Ἡ τελευταία αὐτή ἐξίσωση δίνει τίς $m\times n$ χαρακτηριστικές ρίζες $\lambda_i\mu_j$ τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker $A\otimes B$ πού ἀντιστοιχοῦν στά mn χαρακτηριστικά διανύσματα $h_{.i}\otimes k_{.j}$.

Ἄν οἱ μῆτρες A καί B εἶναι συμμετρικές τότε οἱ μῆτρες

$$H = (h_{.1}, h_{.2}, \ldots\ldots\ldots, h_{.n})$$

καί

$$K = (k_{.1}, k_{.2}, \ldots\ldots\ldots, k_{.m})$$

εἶναι ὀρθογώνιες.

Ἄν Λ καί M εἶναι οἱ διαγώνιες μῆτρες μέ στοιχεῖα, ἀντίστοιχα, τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῶν μητρῶν A καί B, τότε ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$AH = H\Lambda \qquad \text{καί} \qquad BK = KM$$

Ἄν πάρουμε τά γινόμενα τοῦ Kronecker τῶν δύο πλευρῶν τῶν παραπάνω ἐξισώσεων ἔχουμε

$$AH\otimes BK = (A\otimes B)(H\otimes K) = H\Lambda\otimes KM = (H\otimes K)(\Lambda\otimes M)$$

Ἐφόσον

$$(h_{.i}\otimes k_{.j})'(h_{.r}\otimes k_{.s}) = h_i' h_r \otimes k_j' k_s = \begin{cases} 1 & \text{ἄν } i=r \text{ καί } j=s \\ 0 & \text{γιά ὅλες τίς ἄλλες περιπτώσεις} \end{cases}$$

ἕπεται ὅτι

$$(H\otimes K)'(H\otimes K) = H'H\otimes K'K = I_{nm}$$

δηλαδή ἡ μήτρα $H\otimes K$ εἶναι ὀρθογώνια.

(i) Τ ό Ἴ χ ν ο ς τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker $A\otimes B$.

Τό ἴχνος τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker $A\otimes B$ εἶναι

$$tr(A\otimes B) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \sum_{j=1}^{m} b_{jj} = tr(A)tr(B)$$

Ἄν οἱ μῆτρες A καί B εἶναι συμμετρικές μποροῦν νά γραφτοῦν ὡς ἑξῆς

$$A = H\Lambda H \qquad \text{καί} \qquad B = KMK$$

ὅπου οἱ μῆτρες H, Λ, K καί M δρίστηκαν στήν προηγούμενη σελίδα.

Τό γινόμενο τοῦ Kronecker $A\otimes B$ ἑπομένως μπορεῖ νά γραφτῆ

$$A\otimes B = H\Lambda H'\otimes KMK' = (H\otimes K)(\Lambda\otimes M)(H'\otimes K')$$

καί, κατά συνέπειαν, ὁ βαθμός του εἶναι

$$tr(A\otimes B) = tr\left\{(H\otimes K)(\Lambda\otimes M)(H'\otimes K')\right\} =$$

$$= tr\left\{(H'\otimes K')(H\otimes K)(\Lambda\otimes M)\right\} = tr\left\{(H'H\otimes K'K)(\Lambda\otimes M)\right\} =$$

$$= tr\left\{(I_n\otimes I_m)(\Lambda\otimes M)\right\} = tr\left\{I_n\Lambda\otimes I_m M\right\} =$$

$$= tr(\Lambda\otimes M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{m}\mu_j =$$

$$= tr(\Lambda)tr(M) = tr(A)tr(B)$$

(iii) Ὁ Β α θ μ ό ς τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker $A\otimes B$.

Γιά νά βροῦμε τό βαθμό τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker $A\otimes B$ σημειώνουμε ὅτι: ὁ βαθμός μιᾶς συμμετρικῆς μήτρας εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν χαρακτηριστικῶν ριζῶν της πού δέν εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν. Ἐπιπλέον ὁ βαθμός μιᾶς μήτρας εἶναι ἴσος μέ τό βαθμό τοῦ γινομένου τῆς ἀντίστροφης τῆς μήτρας αὐτῆς μέ τήν ἴδια τή μήτρα. Δηλαδή

$$r(A\otimes B) = r\left\{(A'\otimes B')(A\otimes B)\right\} = r(A'A\otimes B'B)$$

Τό γινόμενο τοῦ Kronecker $A'A \otimes B'B$ εἶναι μιά μήτρα συμμετρική. Ἄν λ_i^* εἶναι οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας $A'A$ καί μ_j^* τῆς μήτρας $B'B$ τότε $\lambda_i^*\mu_j^*$ εἶναι οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας $A'A \otimes B'B$.

Τό πλῆθος τῶν γινομένων $\lambda_i^*\mu_j^*$ πού δέν εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν μπορεῖ νά γραφτῆ σάν

$$r(A'A).r(B'B)$$

τό γινόμενο ὅμως αὐτό εἶναι τό ἴδιο μέ

$$r(A).r(B)$$

Ἄρα

$$r(A\otimes B) = r(A).r(B)$$

(iv) Ἡ Ὁ ρ ί ζ ο υ σ α τοῦ γινομένου τοῦ kronecker $A\otimes B$.

Γιά νά βροῦμε τήν ὁρίζουσα τοῦ γινομένου τοῦ Kronecker $A\otimes B$ παρατηροῦμε πρῶτα ὅτι

$$A\otimes B = AI_n \otimes BI_m = AI_n \otimes I_m B = (A\otimes I_m)(I_n \otimes B)$$

Ἑπομένως

$$\det(A\otimes B) = \det\{(A\otimes I_m)(I_n\otimes B)\} = \det(A\otimes I_m)\det(I_n\otimes B) =$$

$$= \det(I_m\otimes A)\det(I_n\otimes B) = (\det A)^m(\det B)^n$$

Ἄν οἱ μῆτρες A καί B εἶναι συμμετρικές τότε:

$$\det(A\otimes B) = \det\{(H\Lambda H')\otimes(KMK')\} = \det\{(H\otimes K)(\Lambda\otimes M)(H'\otimes K')\} =$$

$$\det(H\otimes K)\det(\Lambda\otimes M)\det(H'\otimes K') = \det(H'\otimes K')\det(H\otimes K).$$

$$.\det(\Lambda\otimes M) = \det(H'H)\otimes(K'K)\det(\Lambda\otimes M) = \det(\Lambda\otimes M) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^m \det M = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i^m \prod_{j=1}^{m}\mu_j) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^m \prod_{j=1}^{m}\mu_j^n =$$

$$= (\det\Lambda)^m (\det M)^n = (\det A)^m(\det B)^n$$

Πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι ὁ ἐκθέτης στίς ρίζες

λ_i εἶναι m διότι ἡ καθεμιά ἀπ'αὐτές πολλαπλασιάζει τά m στοιχεῖα τῆς μήτρας M ἐνῶ ὁ ἐκθέτης στίς ρίζες μ_j εἶναι n διότι , στό προηγούμενο γινόμενο,ἡ καθεμιά ἀπό τίς ρίζες μ_j ἐπαναλαμβάνεται n φορές.

Παραδείγματα: Σ'ὅλα τά παραδείγματα πού θά δώσουμε οἱ μῆτρες στό γινόμενο τοῦ Kronecker $A\otimes B$ θά εἶναι οἱ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(i) Χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας $A\otimes B$.

Οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A, ὅπως εἴδαμε στό Κεφάλαιο 4 εἶναι

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{καί} \quad \lambda_2 = 2$$

ἐνῶ οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς διαγώνιας μήτρας B εἶναι

$$\mu_1 = 1 \quad \text{καί} \quad \mu_2 = 3 \quad .$$

Ἑπομένως οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας $A\otimes B$ εἶναι

$$\lambda_1\mu_1=5,\ \lambda_1\mu_2=15,\ \lambda_2\mu_1=2 \ \text{καί}\ \lambda_2\mu_2= 6$$

Γιά νά διαπιστώσουμε ἄν οἱ παραπάνω εἶναι οἱ χαρακτηριστικές ρίζες τοῦ γινομένου τοῦ $A\otimes B$ λύνουμε τήν ἐξίσωση

$$\det(A\otimes B - \nu I) = \begin{vmatrix} 3-\nu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9-\nu & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4-\nu & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 12-\nu \end{vmatrix} =$$

$$= \nu^4 - 28\nu^3 + 247\nu^2 - 840\nu + 900 = 0$$

καί βλέπουμε ὅτι πραγματικά οἱ ρίζες της εἶναι οἱ

$$\nu_1=5 \ ,\ \nu_2= 5 \ ,\ \nu_3= 2 \ \text{καί}\ \nu_4 = 6$$

δηλαδή οἱ ἴδιες μέ τίς $\lambda_i\mu_j$.

(ii) Τό Ἴχνος τῆς μήτρας $A\otimes B$.

Πρῶτα βρίσκουμε

$$tr(A) = 7 \quad , \quad tr(B) = 4$$

῎Αρα

$$tr(A)tr(B) = 7.4 = 28$$

Τό ἀποτέλεσμα ὅμως αὐτό εἶναι τό ἴδιο μέ

$$tr(A \otimes B) = 3 + 9 + 4 + 12 = 28$$

῎Αρα $tr(A\otimes B) = tr(A)tr(B)$.

(iii) Ὁ Βαθμός τῆς μήτρας $A\otimes B$.

᾿Αρχίζουμε ἀπό τίς μῆτρες A καί B

$$r(A) = 2 \quad , \quad r(B) = 2$$

῎Αρα

$$r(A)r(B) = 2.2 = 4$$

᾿Από τήν ἄλλη μεριά ἀφοῦ

$$det(A\otimes B) \neq 0$$

ἕπεται ὅτι

$$r(A\otimes B) = 4$$

῎Αρα $r(A\otimes B) = r(A)r(B)$.

(iv) Ἡ Ὁρίζουσα τῆς μήτρας $A\otimes B$.

Ἡ τιμή τῆς

$$det(A\otimes B) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 900$$

᾿Από τήν ἄλλη μεριά

$$detA = 10 \text{ καί } detB = 3$$

ἄρα

$$det(A\otimes B) = (detA)^2(detB)^2 = 10^2.3^2 = 900$$

'Ασκήσεις

5.1 "Αν x εἶναι ἕνα διάνυσμα μέ n συντεταγμένες βρῆτε τή μήτρα A στήν τετραγωνική μορφή

$$x'Ax = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

5.2 "Οπως εἶναι γνωστό ἀπό τή Στατιστική

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}$$

(i) Χρησιμοποιώντας τό ἀποτέλεσμα τῆς 5.1 βρῆτε τή μήτρα B στήν τετραγωνική μορφή

$$x'Bx = n\bar{x}^2$$

(ii) Βρῆτε τή μήτρα C στήν τετραγωνική μορφή

$$x'Cx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

(iii) Δεῖξτε ὅτι

$$B + C = I \quad \text{καί} \quad BC = CB = 0$$

5.3 "Εστω ἡ τετραγωνική μορφή

$$\psi = x'Ax = 5x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$$

(i) Βρῆτε τή μήτρα A, τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς μήτρας A καθώς καί τήν ὀρθογώνια μήτρα H πού στοιχεῖα της ἔχει τά στοιχεῖα τῶν χαρακτηριστικῶν διανυσμάτων τῆς μήτρας A.

(ii) Ὑπολογίστε τήν H'AH

(iii) "Αν x = Hy γράφτε τήν x'Ax σάν συνάρτηση τοῦ y.

5.4 Χρησιμοποιώντας τούς ορισμούς πού δόθηκαν στήν άρχή τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ προσδιορίστε τό εἶδος τῶν τετραγωνικῶν μορφῶν

$$x'Ax \quad , \quad x'Bx \quad , \quad x'Cx$$

ὅπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

'Επαληθεῦστε τά άποτελεσματά σας έξετάζοντας τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῶν μητρῶν αὐτῶν.

5.5 Δεῖξτε ὅτι κάθε ταυτοδύναμη καί συμμετρική μήτρα εἶναι θετικά ἡμιορισμένη.

5.6 Χρησιμοποιώντας τόν πιό πρόσφορο τρόπο βρῆτε τό είδος τῶν τετραγωνικῶν μορφῶν

(i) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 5x_4^2 + 2x_1x_4 - 4x_3x_4$

(ii) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3$

5.7 Πότε ἡ μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

εἶναι (α) θετικά ὁρισμένη
(β) θετικά ἡμιορισμένη
(γ) ἀρνητικά ὁρισμένη
(δ) ἀρνητικά ἡμιορισμένη ,καί
(ε) προσηματικά ὄχι ὁρισμένη.

5.8 ῎Εστω ἡ μήτρα

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Δεῖξτε ὅτι (α) ἡ AA' εἶναι θετικά ὁρισμένη, καί
(β) ἡ A'A εἶναι θετικά ἡμιορισμένη

5.9 Γράφτε τίς συμμετρικές μῆτρες πού ἀντιστοιχοῦν στίς παρακάτω τετραγωνικές μορφές

$$(i)\ x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2,\ (ii)\ -x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2$$

$$(iii)\ 4x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

Προσδιορίστε τό εἶδος τῆς καθεμιᾶς ἀπ'αὐτές.

5.10 Βρῆτε ἕνα μή ἰδιάζοντα μετασχηματισμό τῶν μεταβλητῶν πού κάνει, ταυτόχρονα, διαγώνιες τίς μῆτρες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Δῶστε τή διαγώνια μορφή τῶν μητρῶν **A** καί **B** .

5.11 Ἔστω οἱ μῆτρες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ἐπαληθεῦστε ὅτι

(i) $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$

(ii) $5A \otimes 2B = 10(A \otimes B)$

5.12 Χρησιμοποιώντας τίς μῆτρες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

δεῖξτε ὅτι:

$$\text{(i)} \quad (A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$$
$$\text{(ii)} \quad B\otimes(A+D) = B\otimes A + B\otimes D$$
$$\text{(iii)} \quad (A+D)\otimes B = A\otimes B + D\otimes B$$

Συγκρίνετε τά ἀποτελέσματα (ii) καί (iii).

5.13 Ἐπαληθεῦστε ὅτι

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = AC\otimes BD$$

ὅπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

5.14 Ἄν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ἐπαληθεῦστε ὅτι

$$\text{(i)} \quad \det(A\otimes B) = (\det A)^3(\det B)^2$$
$$\text{(ii)} \quad \operatorname{tr}(A\otimes B) = \operatorname{tr}A\operatorname{tr}B$$

5.15 Ἄν

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Δεῖξτε ὅτι

$$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}$$

καί βρῆτε τίς χαρακτηριστικές ρίζες καί τά χαρακτηριστικά διανύσματα τῶν μητρῶν A, B.
Συγκρίνετέ τα μέ τά ἀντίστοιχα τῆς μήτρας $A\otimes B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΜΗΤΡΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Εἰσαγωγή

Στό κεφάλαιο αὐτό δίνουμε πρῶτα τούς βασικούς κανόνες γιά τήν παραγώγιση συναρτήσεων ὡς πρός διανύσματα καί μῆτρες καί παρουσιάζουμε τά διαφορικά πρώτης καί δεύτερης τάξεως μέ τό συμβολισμό τῶν διανυσμάτων καί τῶν μητρῶν. Δίνουμε ἀκόμα τούς ὁρισμούς τῆς παραγωγίσεως, ὁλοκληρώσεως καί τοῦ διαφορικοῦ μιᾶς μήτρας. Τό δεύτερο μέρος τοῦ κεφαλαίου εἶναι ἀφιερωμένο σέ ἐφαρμογές τῶν κανόνων παραγωγίσεως σέ διάφορες συναρτήσεις πού παρουσιάζονται στή Θεωρητική Οἰκονομετρία καί τό τελευταῖο σέ προβλήματα μεγίστων καί ἐλαχίστων συναρτήσεων χωρίς δεσμούς καί μέ δεσμούς. Στό κεφάλαιο αὐτό ὑποθέτουμε ὅτι οἱ σπουδαστές γνωρίζουν τά σχετικά τμήματα τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ (βλέπε, π.χ. τά βιβλία τῶν Στεριώτη(1973), Courant (1934), Gillespie (1954)).

I. Βασικοί Κανόνες

Ἄν θέσουμε

$$x' = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$$

τότε ἡ συνάρτηση

$$\psi = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$$

μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$\psi = f(x')$$

δηλαδή ἡ ψ εἶναι συνάρτηση τοῦ διανύσματος x'.

Παρουσιάζουμε τή συνάρτηση ϕ μέ τήν τελευταία αὐτή μορφή διότι θέλουμε νά ὁρίσουμε τή μερική παράγωγό της ὡς πρός τό διάνυσμα-στήλη x ἤ τό διάνυσμα-γραμμή x'. Ἡ παράγωγος αὐτή, ὅπως εἶναι φυσικό, εἶναι διάνυσμα μέ συντεταγμένες τίς μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\equiv f_i \quad , \ i=1,\ldots\ldots,n$$

καί γράφεται σάν στήλη ἤ γραμμή ἀνάλογα μέ τό ἄν παραγωγίζουμε ὡς πρός x ἤ x'.

Ὅταν παραγωγίζουμε ὡς πρός x ἔχουμε

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f_n\end{bmatrix}$$

Ἐνῶ ὅταν παραγωγίζουμε ὡς πρός x' ἔχουμε

$$\frac{\partial\phi}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial x'}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=$$

$$\equiv(f_1,\ f_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ f_n)$$

Γιά νά βροῦμε τή δεύτερη παράγωγο τῆς συναρτήσεως ϕ ὡς πρός τό διάνυσμα x' ἤ τό διάνυσμα x παίρνουμε: εἴτε τό διάνυσμα

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

καί παραγωγίζουμε τά στοιχεῖα του

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i=1,\ldots\ldots\ldots,n$$

(πού εἶναι συνάρτηση τῶν μεταβλητῶν x_i, $i=1,\ldots,n$)

ὡς πρός τό διάνυσμα-γραμμή x' καί γράφουμε τό ἀποτέλεσμα σάν διάνυσμα-γραμμή (n γραμμές συνολικά), εἴτε τό διάνυσμα

$$\frac{\partial f}{\partial x'}$$

καί παραγωγίζουμε τά στοιχεῖα του ὡς πρός τό διάνυσμα-στήλη x καί γράφουμε τό ἀποτέλεσμα σάν διάνυσμα-στήλη(n στῆλες συνολικά). Καί στίς δυό περιπτώσεις , ὅπως εἶναι φανερό, τό τελικό ἀποτέλεσμα εἶναι μιά μήτρα μέ στοιχεῖα τίς δεύτερες μερικές παραγώγους τῆς συναρτήσεως ψ. Ἄν ἡ συνάρτηση αὐτή εἶναι συνεχής μέ συνεχεῖς πρῶτες καί δεύτερες μερικές παραγώγους τότε (βλέπε Gillespie (1954) σελ 9)

$$f_{ij} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \equiv f_{ji}$$

δηλαδή ἡ μήτρα τῶν δεύτερων παραγώγων, πού ὀνομάζεται μήτρα τοῦ Hesse εἶναι συμμετρική. Ἡ μήτρα αὐτή γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} = \frac{\partial^2 f}{\partial x' \partial x} = H'$$

ἤ, πιό ἀναλυτικότερα

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Ἡ ὁρίζουσα τῆς μήτρας αὐτῆς εἶναι γνωστή σάν Hessian.

'Ανάλογοι μέ τούς ὁρισμούς τῶν πρώτων καί δεύτερων μερικῶν παραγώγων εἶναι καί οἱ ὁρισμοί τῶν διαφορικῶν πρώτης καί δεύτερης τάξεως.

Ὅπως εἶναι γνωστό τό διαφορικό πρώτης τάξεως τῆς συναρτήσεως f εἶναι

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

καί μπορεῖ νά γραφτῆ σάν ἐσωτερικό γινόμενο τῶν διανυσμάτων

$$(dx)' = (dx_1, dx_2, \ldots\ldots, dx_n) \quad \text{καί} \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

ἤ τῶν διανυσμάτων

$$\frac{\partial f}{\partial x'} \quad \text{καί} \quad dx$$

δηλαδή

$$df = \frac{\partial f}{\partial x'} dx = (dx)' \frac{\partial f}{\partial x}$$

Τό διαφορικό δεύτερης τάξεως τῆς συναρτήσεως f εἶναι

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} dx_i dx_j$$

Σύμφωνα μέ τό συμβολισμό καί τούς ὁρισμούς τῶν παραγώγων πού δώσαμε πιό μπροστά τό διαφορικό δεύτερης τάξεως μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$d^2 f = (dx)' H dx$$

Τό διαφορικό αὐτό, ὅπως φαίνεται ἀπό τούς ὁρισμούς τῆς μήτρας H καί τοῦ διανύσματος dx , εἶναι μιά τετραγωνική μορφή. Θά ἐπανέλθουμε σ'αὐτήν στό τέλος τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ.

Παραδείγματα: Ἄν πάρουμε τή συνάρτηση

$$\phi = 6x_1^2 + 8x_2^2 + 10x_3^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2x_3$$

τότε

$$\frac{\partial \psi}{\partial x'} = (12x_1+3x_2+4x_3,\ 16x_2+3x_1+5x_3,\ 20x_3+4x_1+5x_2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial x} = \begin{bmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 3 & 16 & 5 \\ 4 & 5 & 20 \end{bmatrix} = H$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x'} dx =$$

$$= (12x_1+3x_2+4x_3)dx_1 + (16x_2+3x_1+5x_3)dx_2 + $$
$$+ (20x_3+4x_1+5x_2)dx_3$$

καί

$$d^2\psi = (dx)'Hdx = (dx_1, dx_2, dx_3) \begin{bmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 3 & 16 & 5 \\ 4 & 5 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 12dx_1^2 + 16dx_2^2 + 20dx_3^2 + 6dx_1dx_2 + 8dx_1dx_3 +$$
$$+ 10dx_2dx_3$$

Ἂν θέλουμε νά παραγωγίσουμε (μερικῶς, ὅπως καί στίς προηγούμενες περιπτώσεις) ἕνα διάνυσμα y (μέ m συντεταγμένες πού εἶναι ὅλες συναρτήσεις τοῦ διανύσματος x) ὡς πρός τό διάνυσμα x τό ἀποτέλεσμα εἶναι μιά μήτρα τῆς μορφῆς:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

"Αν έχουμε μιά συνάρτηση

$$\psi = f(X)$$

όπου

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots\cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

τότε

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{nn}} \end{bmatrix}$$

'Αντί, όπως στήν παραπάνω περίπτωση, νά έχουμε μιά συνάρτηση μέ μεταβλητές τά στοιχεία μιάς μήτρας, μπορούμε νά έχουμε μιά μήτρα (άς πούμε τήν $n \times n$ μήτρα A) πού όλα τά στοιχεία της είναι συνάρτηση μιάς καί μόνο μεταβλητής (άς πούμε τής x_1). Στήν περίπτωση αυτή:

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial a_{nn}}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

Τό ὁλοκλήρωμα τῆς μήτρας A ὁρίζεται ὡς ἑξῆς

$$\int A dx_1 = \begin{bmatrix} \int a_{11}dx_1 & \int a_{12}dx_1 & \cdots\cdots & \int a_{1n}dx_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \int a_{n1}dx_1 & \int a_{n2}dx_1 & \cdots\cdots & \int a_{nn}dx_1 \end{bmatrix}$$

Τό διαφορικό τῆς μήτρας A ἐξάλλου εἶναι

$$dA = \begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} & \cdots\cdots\cdots & da_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ da_{n1} & da_{n2} & \cdots\cdots\cdots & da_{nn} \end{bmatrix}$$

Ἄν, τέλος, ἔχουμε μιά συνάρτηση τῆς μήτρας A, π.χ. τήν

$$S = ARA'$$

ὅπου R εἶναι μιά σταθερή μήτρα, τότε

$$dS = dARA' + AR(dA)'$$

ἄν ὑποθέσουμε ὅτι

$$R = R' .$$

II. Ἐφαρμογὲς

Γιά τήν ἐφαρμογή τῶν βασικῶν κανόνων πού δώσαμε στό προηγούμενο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ θά πάρουμε σάν παραδείγματα συναρτήσεις πού τίς συναντοῦμε στήν Οἰκονομετρία. Ὁ συμβολισμός πού θά χρησιμοποιήσουμε θά εἶναι, στήν ἀρχή τοῦ τμήματος αὐτοῦ, ἐκεῖνος πού χρησιμοποιεῖται συνήθως στά ἐγχειρίδια τῆς Γραμμικῆς Ἄλγεβρας καί πρός τό τέλος αὐτός πού συνηθίζεται στή Θεωρητική Οἰκονομετρία. Σ' ὅλες τίς περιπτώσεις θά συμβολίζουμε τίς συναρτήσεις μέ τό ἴδιο γράμμα φ, ἡ μήτρα A θά εἶναι nxn καί τό διάνυσμα x θά ἔχη n συντεταγμένες.

(i) Παραγώγιση τῆς $\phi = a'x = x'a$ ὡς πρός x ἤ x', ὅπου:

$$a' = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n)$$

$$x' = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n)$$

Ἐφόσον

$$\phi = a'x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

καί

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = a_i \ , \ i = 1, \ldots\ldots, n$$

ἕπεται ὅτι·

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = a$$

καί

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'} = (a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots,a_n) = a'$$

(ii) Παραγώγιση τοῦ διανύσματος $\mathbf{y} = Ax$ ὡς πρός x

Στό πρῶτο κεφάλαιο εἴδαμε ὅτι μποροῦμε νά γράφουμε τή μήτρα A ὡς ἑξῆς

$$A = \begin{bmatrix} a_{1.} \\ a_{2.} \\ \vdots \\ a_{n.} \end{bmatrix}$$

Ἄν τώρα θέσουμε

$$y_i = a_{i.}x \ ,\ i = 1,\ldots\ldots\ldots,n$$

τότε

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = Ax = \begin{bmatrix} a_{1.}x \\ a_{2.}x \\ \vdots \\ a_{n.}x \end{bmatrix}$$

Ἑπομενως ἔχουμε

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (a'_{1.},a'_{2.},\ldots,a'_{n.}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A'$$

Κατά παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$\frac{\partial y}{\partial x'} = A$$

(iii) Παραγώγιση τῆς $\phi = x'Ax$ ὡς πρός x .

Ἡ ϕ εἶναι μιά τετραγωνική μορφή πού μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$\phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

Τό ἀποτέλεσμα τῆς παραγωγίσεως, ὅπως καί στή περίπτωση (i), θά εἶναι ἕνα διάνυσμα. Γιά νά βροῦμε ἕνα ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τοῦ διανύσματος αὐτοῦ παραγωγίζουμε τήν ϕ ὡς πρός x_k ὁπότε ἔχουμε:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\right)}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ik}x_i x_k + \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}x_k x_j + a_{nn}x_k^2\right)}{\partial x_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik}x_i + \sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}x_j + 2a_{nn}x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_k + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_k =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\right) x_k$$

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό εἶναι τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τοῦ διανύσματος

$$(A' + A)x$$

Ἑπομένως

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (A' + A)x$$

Ἄν ἡ μήτρα A εἶναι συμμετρική ($A' = A$) τότε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2Ax$$

Ἂν τώρα θελήσουμε νά βροῦμε τή δεύτερη παράγωγο τῆς τετραγωνικῆς μορφῆς $\phi = x'Ax$ τότε παραγωγίζουμε τήν πρώτη παράγωγο πού βρήκαμε πιό πάνω ὡς πρός x'. Τό ἀποτέλεσμα, φυσικά, ὅπως καί στήν περίπτωση (ii) θά εἶναι μιά μήτρα.

Πιό συγκεκριμένα: Ἂν ἡ μήτρα A δέν εἶναι συμμετρική τότε

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial(A'+A)x}{\partial x'} = A' + A$$

Ἂν ἡ μήτρα A εἶναι συμμετρική (μιά τέτοια μήτρα στήν Οἰκονομετρία εἶναι ἡ $X'X$) τότε

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x'} = \frac{\partial(2Ax)}{\partial x'} = 2A$$

(iv) Παραγώγιση τῆς $\phi = \dfrac{x'Ax}{x'Bx}$ ὡς πρός x

ὅπου $A' = A$, $B' = B$

Γιά τήν παραγώγιση αὐτή ἐφαρμόζεται ὁ γνωστός κανόνας τῆς παραγωγίσεως πηλίκου καί, φυσικά, οἱ κανόνες πού ἐκθέσαμε στήν ἀρχή τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ. Ἔτσι ἔχουμε

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial(x'Ax)}{\partial x}(x'Bx) - (x'Ax)\dfrac{\partial(x'Bx)}{\partial x}}{(x'Bx)^2} =$$

$$= \frac{2Ax(x'Bx) - (x'Ax)2Bx}{(x'Bx)^2}$$

Μετά ἀπό τά παραδείγματα αὐτά παραγωγίσεως μιᾶς συναρτήσεως (ἤ διανύσματος) ὡς πρός ἕνα διάνυσμα, θά δώσουμε μερικά παραδείγματα παραγωγίσεως μιᾶς συναρτήσεως ὡς πρός μιά μήτρα.

Οἱ κυριώτερες συναρτήσεις πού συναντοῦμε στή θεωρητική Οἰκονομετρία εἶναι τό ἴχνος καί ἡ ὁρίζουσα μιᾶς μήτρας.

(v) Παραγώγιση τῆς $\psi = tr(A)$ ὡς πρός A

"Αν πάρουμε ἕνα ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας A, τό a_{ij}, καί παραγωγίσουμε τή συνάρτηση

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ὡς πρός τό στοιχεῖο αὐτό, ἔχουμε

$$\frac{\partial \psi}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)}{\partial a_{ij}} = \delta_{ij}$$

δηλαδή ὅλα τά στοιχεῖα τῆς μήτρας

$$\frac{\partial \psi}{\partial A}$$

εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν ἐκτός ἀπό τά στοιχεῖα τῆς κύριας διαγωνίου της πού εἶναι ἴσα μέ τή μονάδα. Ἐπομένως

$$\frac{\partial\, tr(A)}{\partial A} = I$$

(vi) Παραγώγιση τῆς $\psi = tr(AZ')$ ὡς πρός Z ὅπου Z εἶναι μιά μήτρα nxn.

"Αν πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖα τῆς μήτρας Z, τό z_{kr} ἄς ποῦμε, τότε

$$\frac{\partial\, tr(AZ')}{\partial z_{kr}} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_{ij}\right)}{\partial z_{kr}} = a_{kr}$$

πού εἶναι τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας A. Ἐπομένως

$$\frac{\partial\, tr(AZ')}{\partial Z} = A$$

(vii) Παραγώγιση τῆς $\psi = tr(A'A)$ ὡς πρός A.

Ἐφόσον ἡ γραμμή i στή μήτρα A εἶναι ἡ ἴδια μέ τή στήλη i στή μήτρα A' ἕπεται ὅτι

$$tr(A'A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

"Αν τώρα παραγωγίσουμε τήν $\phi = tr(A'A)$ ὡς πρός τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας A, a_{kr} ἔχουμε

$$\frac{\partial tr(A'A)}{\partial a_{kr}} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)}{\partial a_{kr}} = 2a_{kr}$$

'Αλλά $2a_{kr}$ εἶναι τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας 2A . Κατά συνέπεια

$$\frac{\partial\, tr(A'A)}{\partial A} = 2A$$

(viii) Παραγώγιση τῆς $\phi = tr(AX'XA')$ ὡς πρός A. ὅπου X εἶναι μιά μήτρα Txn.
Πρῶτα σημειώνουμε ὅτι

$$tr(AX'XA') = tr(A'AX'X)$$

"Αν τώρα συμβολίσουμε μέ

$$B = A'A = B'$$

καί μέ

$$W = X'X = W'$$

τότε

$$tr(A'AX'X) = tr(BW) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}w_{ij}$$

'Εξάλλου

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{si}a_{sj}$$

"Αρα

$$tr(BW) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} a_{si}a_{sj}w_{ij}$$

"Αν τώρα θελήσουμε νά παραγωγίσουμε τήν τελευταία αὐτή μορφή μέ τήν ὁποία μπορεῖ νά δοθῆ τό ἴχνος τῆς μήτρας BW ὡς πρός τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας A, a_{kr} θέτουμε πρῶτα s=k καί ἑπομένως παραγωγίζουμε τό ἄθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ki}a_{kj}w_{ij}$$

ὡς πρός a_{kr} καί ἔχουμε

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ki}a_{kj}w_{ij}\right)}{\partial a_{kr}} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}w_{rj} + \sum_{i=1}^{n} a_{ki}w_{ir}$$

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀποτελέσματος αὐτοῦ προκύπτει ὅταν θέσουμε i=r καί ὁ δεύτερος ὅταν θέσουμε j=r. Ἀφοῦ $w_{ir} = w_{ri}$, μποροῦμε νά ἀλλάξουμε τούς δεῖχτες i καί j σ'ἕνα κοινό, ἄς ποῦμε t , κι' ἔχουμε

$$\frac{\partial tr(BW)}{\partial a_{kr}} = 2\sum_{t=1}^{n} a_{kt}w_{rt}$$

Τό τελευταῖο αὐτό ἀποτέλεσμα εἶναι τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας 2AW . Κατά συνέπεια

$$\frac{\partial\, tr(AX'XA')}{\partial A} = 2AX'X$$

(ix) Παραγώγιση τῆς ψ = detA ὡς πρός A.

Ἀπό τό δεύτερο κεφάλαιο ξέρουμε ὅτι

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}A^{+} = \frac{1}{detA}\begin{bmatrix} a^{+}_{11} & a^{+}_{21} & \cdots\cdots\cdots & a^{+}_{n1} \\ a^{+}_{12} & a^{+}_{22} & \cdots\cdots\cdots & a^{+}_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{+}_{1n} & a^{+}_{2n} & \cdots\cdots\cdots & a^{+}_{nn} \end{bmatrix}$$

καί ὅτι

$$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a^{+}_{ij}$$

Ἂν θέσουμε

$$a^{ij} = \frac{1}{\det A}\, a^{+}_{ji}$$

τότε

$$a^{+}_{ji} = a^{ij}\det A$$

καί

$$a^{+}_{ij} = a^{ji}\det A$$

Κατά συνέπειαν ἄν παραγωγίσουμε τήν $\det A$ ὡς πρός τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας A, a_{ij} , ἔχουμε

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a^{+}_{ij}\right)}{\partial a_{ij}} = a^{+}_{ij} = a^{ji}\det A$$

Τό στοιχεῖο ὅμως a^{ji} εἶναι τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας

$$(A^{-1})' = A'^{-1}$$

Ἐπομένως

$$\frac{\partial \det A}{\partial A} = (\det A)A'^{-1} = (\det A')A'^{-1} = A'^{+}$$

ὅπου A'^{+} εἶναι ἡ προσαρτημένη μήτρα τῆς μήτρας A'.

(x) Παραγώγιση τῆς $\phi = \log(\det A)$ ὡς πρός A.

Ἀκολουθῶντας τόν κανόνα παραγωγίσεως σύνθετης συναρτήσεως ἔχουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial A} = \frac{1}{\det A}\,\frac{\partial(\det A)}{\partial A} = \frac{1}{\det A'}\,A'^{+} = A'^{-1} = (A^{-1})'$$

(xi) Παραγώγιση τῆς $\phi = x'Ax$ ὡς πρός A .

Στήν ἐφαρμογή (iii) παραγωγίσαμε τήν $\phi = x'Ax$ ὡς πρός x . Τώρα τήν παραγωγίζουμε ὡς πρός A .

Ἂν πάρουμε τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας A, a_{ij} καί παραγωγίσουμε τήν φ ὡς πρός αὐτό ἔχουμε

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial a_{ij}} = x_i x_j$$

ἀλλά τό στοιχεῖο $x_i x_j$ εἶναι ἀντιπροσωπευτικό τῆς μήτρας xx'.

Κατά συνέπεια

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial A} = xx'$$

(xii) Παραγώγιση τῆς $C = AB$ ὡς πρός x_1 ὅπου ὑποθέτουμε ὅτι ὅλα τά στοιχεῖα τῶν μητρῶν A καί B εἶναι συναρτήσεις τῆς x_1.

Τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς $C = AB$ εἶναι

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα παραγωγίσεως γινομένου ἔχουμε

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial b_{kj}}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} b_{kj}$$

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό εἶναι τό ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τῆς μήτρας

$$A\frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial A}{\partial x_1} B$$

Ἑπομένως

$$\frac{\partial(AB)}{\partial x_1} = A\frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial A}{\partial x_1} B$$

Ἂν

$$B = A^{-1}$$

τότε

$$\frac{\partial(AA^{-1})}{\partial x_1} = \frac{\partial(I)}{\partial x_1} = A\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_1} + \frac{\partial A}{\partial x_1}A^{-1} = 0$$

Λύνοντας τήν ἐξίσωση αὐτή ὡς πρός $\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_1}$ ἔχουμε

$$\frac{\partial A^{-1}}{\partial x_1} = -A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x_1}A^{-1}$$

(Γιά περισσότερες λεπτομέρειες γιά τήν περίπτωση αὐτή βλέπε καί Goldberger(1964)σελ. 43-44)

(xiii)Παραγώγιση τῆς $\phi = tr(\Sigma^{-1}ARA')$ ὡς πρός A.

Ὅταν ἔχουμε συστήματα συσχετιζομένων ἐξισώσεων, στή Θεωρητική Οἰκονομετρία, παρουσιάζεται τό πρόβλημα τῆς παραγωγίσεως τῆς παραπάνω συναρτήσεως ὡς πρός A ὅπου

$$(\Sigma^{-1})' = \Sigma^{-1} \qquad R' = R$$

καί ὅπου τό Σ^{-1} δέν πρέπει νά συγχέεται μέ τό σύμβολο τῶν ἀθροισμάτων.

Πρίν προχωρήσουμε σημειώνουμε ὅτι τή συνάρτηση φ μποροῦμε νά τήν μετασχηματίσουμε σέ τετραγωνική μορφή ἀφοῦ προηγουμένως διανυσματίσουμε τή μήτρα

$$A' = (a'_{1.},\ a'_{2.},\ \ldots\ldots\ldots\ldots,a'_{n.})$$

Ὁ ὁρισμός τῆς διανυσματίσεως εἶναι ὁ ἑξῆς:

Διανυσμάτιση(Vectoring) τῆς μήτρας A' εἶναι ὁ σχηματισμός ἑνός μακροῦ διανύσματος-στήλης μέ στοιχεῖα τίς στῆλες τῆς μήτρας A'

Ἡ διανυσμάτιση συμβολίζεται ὡς ἑξῆς

$$A'^{V} = \begin{bmatrix} a'_{1.} \\ a'_{2.} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a'_{n.} \end{bmatrix} = a$$

Μέ τόν καινούργιο αὐτό συμβολισμό

$$\psi = tr(\Sigma^{-1}ARA') = a'(\Sigma^{-1}\otimes R)a$$

Γιά νά παραγωγίσουμε τήν πρώτη μορφή τῆς συναρτήσεως ὡς πρός A δέν ἔχουμε παρά νά ἐφαρμόσουμε τό ἀποτέλεσμα τῆς (viii), ὁπότε ἔχουμε

$$\frac{\partial\, tr(\Sigma^{-1}ARA')}{\partial A} = \frac{\partial\, tr(A'\Sigma^{-1}AR)}{\partial A} = 2\Sigma^{-1}AR$$

Γιά νά παραγωγίσουμε τή δεύτερη μορφή τῆς συναρτήσεως ἐφαρμόζουμε τό ἀποτέλεσμα τῆς (iii), ὁπότε ἀφοῦ

$$(\Sigma^{-1}\otimes R)' = (\Sigma^{-1})'\otimes R' = \Sigma^{-1}\otimes R$$

ἔχουμε

$$\frac{\partial(a'(\Sigma^{-1}\otimes R)a)}{\partial a} = 2(\Sigma^{-1}\otimes R)a$$

Σάν παράδειγμα παίρνουμε τίς μῆτρες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix}$$

ὁπότε ἔχουμε

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}, \quad \Sigma^{-1}\otimes R = \begin{bmatrix} \sigma_{11}r_{11} & \sigma_{11}r_{12} & \sigma_{12}r_{11} & \sigma_{12}r_{12} \\ \sigma_{11}r_{12} & \sigma_{11}r_{22} & \sigma_{12}r_{12} & \sigma_{12}r_{22} \\ \sigma_{12}r_{11} & \sigma_{12}r_{12} & \sigma_{22}r_{11} & \sigma_{22}r_{12} \\ \sigma_{12}r_{12} & \sigma_{12}r_{22} & \sigma_{22}r_{12} & \sigma_{22}r_{22} \end{bmatrix}$$

Ἄρα

$$(\Sigma^{-1}\otimes R)a = \begin{bmatrix} \sigma_{11}r_{11}a_{11}+\sigma_{11}r_{12}a_{12}+\sigma_{12}r_{11}a_{21}+\sigma_{12}r_{12}a_{22} \\ \sigma_{11}r_{12}a_{11}+\sigma_{11}r_{22}a_{12}+\sigma_{12}r_{12}a_{21}+\sigma_{12}r_{22}a_{22} \\ \sigma_{12}r_{11}a_{11}+\sigma_{12}r_{12}a_{12}+\sigma_{22}r_{11}a_{21}+\sigma_{22}r_{12}a_{22} \\ \sigma_{12}r_{12}a_{11}+\sigma_{12}r_{22}a_{12}+\sigma_{22}r_{12}a_{21}+\sigma_{22}r_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

Ἐξάλλου τό γινόμενο

$$\Sigma^{-1}AR$$

ἄν διανυσματιστῇ δίνει σάν ἀποτέλεσμα τό διάνυσμα

$$(\Sigma^{-1}\otimes R)a \quad .$$

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό εἶναι χρήσιμο ὅταν ἀναζητοῦμε τό μέγιστο τῆς συναρτήσεως φ.

(xiv) Τό διαφορικό τῆς συναρτήσεως $\phi = \log(\det A')$ (ὅπου $\det A = \det A' > 0$)

Ἡ φ εἶναι συνάρτηση τῶν στοιχείων τῆς μήτρας A' πού, ὅπως εἴδαμε, μποροῦν νά γραφτοῦν σάν διάνυσμα-στήλη a.

Κατά συνέπεια

$$d\phi = \left[\frac{\partial \log(\det A)}{\partial a}\right]' da = tr(A^{-1}dA)$$

Γιά νά δοῦμε ὅτι τό ἀποτέλεσμα αὐτό πραγματικά ἰσχύει θά πάρουμε τή 2χ2 μήτρα A. Στήν περίπτωση αὐτή

$$\left[\frac{\partial \log(\det A)}{\partial a}\right]' da = \left(\frac{1}{\det A}\right)\left[\frac{\partial \det A}{\partial a}\right]' da =$$

$$= \frac{1}{\det A}\left[\frac{\partial (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{\partial a}\right]' da =$$

$$= \frac{1}{\det A}(a_{22}, -a_{21}, -a_{12}, a_{11}) \begin{bmatrix} da_{11} \\ da_{12} \\ da_{21} \\ da_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}(a_{22}da_{11} - a_{12}da_{21} - a_{21}da_{12} + a_{11}da_{22}) =$$

$$= tr(A^{-1}dA) = tr\left\{\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} da_{11} & da_{12} \\ da_{21} & da_{22} \end{bmatrix}\right\}$$

III. Μέγιστα καὶ Ἐλάχιστα

Τόσο στή Θεωρητική Οἰκονομετρία ὅσο καί τή Μαθηματική Οἰκονομική ἔχουμε περιπτώσεις μεγιστοποιήσεως ἤ ἐλαχιστοποιήσεως μιᾶς συναρτήσεως χωρίς δεσμούς ἤ μέ δεσμούς. Στό τελευταῖο τοῦτο τμῆμα τοῦ βιβλίου ἐξετάζουμε περιληπτικά τό θέμα αὐτό. Γιά περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε τόν ἀναγνώστη στά βιβλία τῶν Henderson and Quandt (1958) καί Kuska(1973) καθώς καί τό ἄρθρο τοῦ Debreu(1952).

Ἄν πάρουμε τή συνάρτηση πού δώσαμε στό πρῶτο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ, δηλαδή τήν

$$\phi = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n) = f(x')$$

τότε, γιά νά ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο χρειάζεται

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = o \ , \ i=1,\ldots\ldots,n$$

Οἱ συνθῆκες αὐτές συνεπάγονται ὅτι

$$df = \frac{\partial f}{\partial x'} dx = o$$

Γιά τίς τιμές τῶν x_i γιά τίς ὁποῖες ἰσχύουν οἱ παραπάνω συνθῆκες θά πρέπη νά δοῦμε ἄν

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij} dx_i dx_j \equiv$$

$$\equiv (dx)' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x'} dx \equiv (dx)'Hdx < o$$

ὁπότε ἔχουμε μέγιστο (maximum), ἤ ἄν

$$(dx)'Hdx > o$$

ὁπότε ἔχουμε ἐλάχιστο (minimum).

Στή πρώτη περίπτωση ἔχουμε μιά τετραγωνική μορφή ἀρνητικά ὁρισμένη καί στή δεύτερη μιά τετραγωνική μορφή θετικά ὁρισμένη. Ὅπως εἴδαμε στό προηγούμενο κεφάλαιο,γιά τήν πρώτη περίπτωση,τά πρόσημα τῶν πρωτευουσῶν ἐλασσόνων ὁριζουσῶν τῆς μήτρας H θά πρέπη νά ἐναλλάσονται (ἀρχίζοντας ἀπό πλήν), ἐνῶ στή δεύτερη περίπτωση ὅλες οἱ πρωτεύουσες ἐλάσσονες ὁρίζουσες τῆς μήτρας H θά πρέπη νά εἶναι θετικές.

Τό ἑπόμενο πρόβλημα πού θά ἐξετάσουμε εἶναι ἄν ἡ συνάρτηση

$$\phi = f(x')$$

μέ τό δεσμό (constraint)

$$g(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n) = g(x') = o$$

δίνει μέγιστο ἤ ἐλάχιστο.

Γιά ν'ἀπαντήσουμε στό ἐρώτημα αὐτό χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange (βλέπε καί Courant(1936) vol.II).

Πρῶτα σχηματίζουμε τή συνάρτηση

$$\varphi = f(x') + \lambda g(x')$$

ὅπου λ εἶναι ὁ (ἀπροσδιόριστος)πολλαπλασιαστής τοῦ Lagrange.

Γιά νά ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο χρειάζεται

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x_i} = f_i + \lambda g_i = o \ , \ i=1,\ldots,n$$

καί

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = g(x') = o$$

Οἱ συνθῆκες αὐτές συνεπάγονται ὅτι

$$d\varphi = df + \lambda dg + g d\lambda = o$$

ὅπου dg εἶναι τό διαφορικό τῆς συναρτήσεως g .

Γιά τίς τιμές τῶν x_i γιά τίς ὁποῖες ἰσχύουν οἱ παραπάνω συνθῆκες θά πρέπη νά δοῦμε ἄν

$$d^2\varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(f_{ij} + \lambda g_{ij})dx_i dx_j + 2\sum_{i=1}^{n} g_i dx_i d\lambda =$$

$$= d^2f + \lambda d^2g + 2dgd\lambda =$$

$$= (d\lambda, \quad dx) \begin{bmatrix} o & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial x'} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ dx \end{bmatrix} =$$

$$= (d\lambda, dx_1, \dots, dx_n) \begin{bmatrix} o & g_1 & \dots\dots\dots\dots & g_n \\ g_1 & f_{11}+\lambda g_{11} & \dots\dots\dots & f_{1n}+\lambda g_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_n & f_{n1}+\lambda g_{n1} & \dots\dots\dots & f_{nn}+\lambda g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} =$$

$$= (d\lambda, \ dx\ ) \begin{bmatrix} o & \theta' \\ \theta & H+\lambda G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ dx \end{bmatrix} < o \quad ή \quad d^2\varphi > o$$

ὅπου

$$\theta' = (g_1, \ g_2, \ \dots\dots\dots, \ g_n)$$

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots\dots\dots\dots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots\dots\dots\dots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

καί ὅπου ἡ μήτρα Η εἶναι ἐκείνη πού ὁρίστηκε στήν ἀρχή τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ.

"Αν $d^2\varphi < o$ ἔχουμε μέγιστο ἐνῶ ἄν $d^2\varphi > o$ ἔχουμε ἐλάχιστο.

"Αν θέσουμε

$$\{\xi_{ij}\} = \Xi \ = H + \lambda G \ = \{f_{ij} + \lambda g_{ij}\}$$

καί συμβολίσουμε μέ θ_r καί Ξ_r, $r = 2, \dots\dots\dots, n$

τά ὑποδιανύσματα καί τίς ὑπομῆτρες πού προκύπτουν ἄν ἀπό τό διάνυσμα θ ἀπαλείψουμε τίς r συντεταγμένες καί ἀπό τή μήτρα Ξ ἀπαλείψουμε τίς r στῆλες καί γραμμές ὅπου τό r , καί στίς δυό περιπτώσεις, παίρνει τίς τιμές r+1,..........,n , τότε

$$d^2\varphi < o$$

δηλαδή ἔχουμε μέγιστο, ἄν οἱ ὀρίζουσες

$$(-1)^r \begin{vmatrix} o & \theta_r' \\ \theta_r & \Xi_r \end{vmatrix} > o \quad , r=2,\ldots\ldots,n$$

ἐνῶ

$$d^2\varphi > o$$

δηλαδή ἔχουμε ἐλάχιστο, ἄν οἱ ὀρίζουσες

$$(-1) \begin{vmatrix} o & \theta_r' \\ \theta_r & \Xi_r \end{vmatrix} > o \quad ἤ \quad \begin{vmatrix} o & \theta_r' \\ \theta_r & \Xi_r \end{vmatrix} < o \quad , r=2,\ldots,n$$

'Αναλυτικότερα: "Εχουμε μέγιστο ἄν οἱ πλαισιωμένες πρωτεύουσες ὀρίζουσες(bordered principal minors), μέ πρώτην τήν ὀρίζουσα τῆς τρίτης τάξεως, εἶναι ἐναλλάξ, θετικές καί ἀρνητικές, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} o & g_1 & g_2 \\ g_1 & \xi_{11} & \xi_{12} \\ g_2 & \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix} > o \;, \quad \begin{vmatrix} o & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ g_2 & \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ g_3 & \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{vmatrix} < o \;, \text{ κ.ο.κ.}$$

ἐνῶ ἔχουμε ἐλάχιστο ἄν οἱ παραπάνω ὀρίζουσες εἶναι ὅλες ἀρνητικές.

Παραδείγματα:

(i) Μιά εἰδική περίπτωση τῆς συναρτήσεως ψ εἶναι ἡ τετραγωνική μορφή

$$\psi = \frac{1}{2}x'Ax$$

Γιά νά ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο θά πρέπη

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = Ax = \underline{o}$$

Γιά νά δοῦμε ἄν γιά τίς τιμές τῶν x_i γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει ἡ παραπάνω σχέση ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο ἐξετάζουμε τή μήτρα τοῦ Hesse(ὑποθέτουμε ὅτι A'=A)

$$H = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x'} = A$$

(ii) Σάν δεύτερο παράδειγμα παίρνουμε τήν ἴδια παραπάνω συνάρτηση $\phi = \frac{1}{2}x'Ax$ μέ τό δεσμό

$$b'x = o$$

ὅπου b' εἶναι τό διάνυσμα τῶν σταθερῶν

$$b' = (b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots, b_n)$$

Χρησιμοποιώντας τή μέθοδο τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange σχηματίζουμε τή συνάρτηση

$$\varphi = \frac{1}{2}x'Ax + \lambda b'x$$

Γιά νά ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο θά πρέπη

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = Ax + \lambda b = \underline{o} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = b'x = o$$

καί γιά νά δοῦμε ἄν ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο ἐξετάζουμε τή μήτρα

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\partial x'} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\lambda} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & b' \\ b & A \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} o & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

"Αν

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \;, \quad \begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \;, \text{κ.ο.κ.}$$

τότε έχουμε μέγιστο.

"Αν όμως όλες οἱ παραπάνω ὁρίζουσες εἶναι ἀρνητικές τότε ἔχουμε ἐλάχιστο.

(iii) Τώρα ἐξετάζουμε ἄν ἡ συνάρτηση $\phi = 8 + 8x_1 + 12x_2 + 8x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ δίνει μέγιστο ἤ ἐλάχιστο.

Γιά νά ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο θά πρέπη

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 8 - 2x_1 \\ 12 - 2x_2 \\ 8 - 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Γιά νά δοῦμε ἄν στίς τιμές αὐτές τῶν x_i ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο παίρνουμε τή μήτρα

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial x'} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

καί ἐξετάζουμε τίς πρωτεύουσες ἐλάσσονες ὁρίζουσές της, δηλαδή

$$-2 < 0 \;, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \;, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 < 0$$

'Εφόσον τά πρόσημα τῶν ὁριζουσῶν αὐτῶν εἶναι, ἐναλλάξ, ἀρνητικά καί θετικά ἔχουμε μέγιστο.

(iv) Σάν τέταρτο παράδειγμα παίρνουμε τή συνάρτηση τῆς περιπτώσεως (iii) μέ τό δεσμό

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4 = 0$$

Ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange σχηματίζουμε τή συνάρτηση

$$\varphi = 8+8x_1+12x_2+8x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2+\lambda(2x_1+3x_2+2x_3-4)$$

Γιά νά ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο θά πρέπη

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4 = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 8 & -2x_1 + 2\lambda \\ 12 & -2x_2 + 3\lambda \\ 8 & -2x_3 + 2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Λύνοντας τίς τρεῖς τελευταῖες ἐξισώσεις ὡς πρός x_1, x_2, x_3 καί ἀντικαθιστώντας τά ἴσα τους στήν πρώτη βρίσκουμε $\lambda = -(60/17)$.

Μετά ἀντικαθιστοῦμε τό λ μέ τό ἴσο του στίς τρεῖς τελευταῖες ἐξισώσεις καί βρίσκουμε

$$x_1 = 8/17, \quad x_2 = 12/17, \quad x_3 = 8/17$$

Γιά νά βροῦμε ἄν ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο ἐξετάζουμε στή μήτρα

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\partial x'} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\lambda} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

τίς πλαισιωμένες πρωτεύουσες ἐλάσσονες ὁρίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

Ἑπομένως ἔχουμε μέγιστο.

Ἡ μέθοδος τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange μπορεῖ νά ἐφαρμοστῆ κι'ὅταν ἔχουμε περισσότερους ἀπό ἕνα δεσμούς.

Παίρνουμε καί πάλι τή συνάρτηση

$$\phi = f(x')$$

μέ τούς δεσμούς

$$q_j(x') = o, \; j = 1,\ldots\ldots,m < n$$

Ἄν τώρα συμβολίσουμε μέ

$$q'(x') = (q_1, q_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, q_m)$$

καί μέ

$$\mu' = (\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots\ldots, \mu_m)$$

τότε μποροῦμε νά σχηματίσουμε τή συνάρτηση

$$\varphi = f(x') + \mu' q(x')$$

Γιά νά ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο χρειάζεται

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = q(x') = \underline{o} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial q(x')}{\partial x} = \underline{o}$$

Γιά νά δοῦμε ἄν ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο πρέπει νά ἐξετάσουμε τή μήτρα

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\partial\mu'} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\partial x'} \\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\mu'} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x'} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} O & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

Ἄν οἱ ὁρίζουσες

$$(-1)^m \begin{vmatrix} O & B_r \\ B'_r & C_r \end{vmatrix} > o \;, \quad r = m+1,\ldots\ldots,n$$

(ὅπου B_r καί C_r εἶναι οἱ ὑπομῆτρες πού προκύπτουν μετά τήν ἀπάλειψη, ἀπό τίς μῆτρες B καί C τῶν στοιχείων τῶν γραμμῶν καί στηλῶν $r+1,\ldots,n$) τότε ἔχουμε ἐλάχιστο.

Ἄν οἱ ὁρίζουσες

$$(-1)^r \begin{vmatrix} 0 & B_r \\ B_r & C_r \end{vmatrix} > 0 \ , \ r=m+1,\ldots\ldots,n$$

τότε ἔχουμε μέγιστο.

Παραδείγματα:

(v) Παίρνουμε τή συνάρτηση $\phi = \frac{1}{2}x'Ax$ μέ τούς δεσμούς

$$Bx - b = \underline{o}$$

ὅπου B εἶναι μιά mxn μήτρα.

Πρῶτα σχηματίζουμε τή συνάρτηση

$$\varphi = \frac{1}{2}x'Ax + \mu'(Bx - b)$$

Γιά νά ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο πρέπει

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = Bx - b = \underline{o}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = Ax + \mu'B$$

Γιά νά βροῦμε ἄν ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο πρέπει νά ἐξετάσουμε τή μήτρα

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\partial\mu'} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\partial x'} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\mu'} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B' & A \end{bmatrix}$$

Μετά προχωροῦμε ὅπως καί στή γενική περίπτωση.

(vi) Σάν ἀριθμητικό παράδειγμα παίρνουμε τή συνάρτηση

$$\phi = 8+8x_1+12x_2+8x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

μέ τούς δεσμούς

$$2x_1+3x_2+2x_3 - 4 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$$

Ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange σχηματίζουμε τή συνάρτηση

$$\varphi = 8 + 8x_1 + 12x_2 + 8x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 +$$
$$+ \mu_1(2x_1+3x_2+2x_3-4)+\mu_2(x_1+x_2+x_3-1)$$

Γιά νά ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο πρέπει

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = \begin{bmatrix} 2x_1+3x_2+2x_3-4 \\ x_1+x_2+x_3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 8-2x_1+2\mu_1+\mu_2 \\ 12-2x_2+3\mu_1+\mu_2 \\ 8-2x_3+2\mu_1+\mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές μποροῦν νά γραφτοῦν ὡς ἑξῆς

$$\left[\begin{array}{cc:ccc} 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B' & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$

'Εφόσον

$$\det \begin{bmatrix} 0 & B \\ B' & C \end{bmatrix} \neq 0$$

τό σύστημα ἔχει μιά καί μοναδική λύση καί ἡ λύση αὐτή μᾶς δίνη τίς τιμές τῶν μ καί x .

Γιά νά δοῦμε ἄν ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο θά πρέπη νά βροῦμε τή μήτρα

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\partial\mu'} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\partial x'} \\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\mu'} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x'} \end{bmatrix}$$

Ἡ μήτρα αὐτή εἶναι ἡ

$$\begin{bmatrix} O & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

καί ἐπειδή

$$m = 2$$

θά πρέπη νά ἀναπτύξουμε τήν ὁρίζουσα τῆς μήτρας αὐτῆς καί νά τήν πολλαπλασιάσουμε μέ

$$(-1)^r = (-1)^{m+1} = (-1)^3 = (-1)$$

Αὐτό δίνει

$$(-1)\det \begin{bmatrix} O & B \\ B' & C \end{bmatrix} = (-1).(-4) = 4 > o$$

Ἄρα ἔχουμε μέγιστο.

Ἀσκήσεις

6.1 Ἄν $\phi = y'Ax$, ὅπου x, y nx1 καί A, nxn βρῆτε τίς

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial A}$$

6.2 Ἄν κάθε στοιχεῖο μιᾶς nxn μήτρας Y εἶναι συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς x_1 καί ἄν τά στοιχεῖα τῆς μήτρας B δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τήν x_1 δεῖξτε ὅτι

$$\frac{\partial\, tr(YB)}{\partial x_1} = tr\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1} B\right)$$

6.3 Βρῆτε κάτω ἀπό ποιές συνθῆκες ἔχουμε ἐλάχιστο στήν περίπτωση τῆς συναρτήσεως

$$\phi(a) = tr\{(X - pa')(X - pa')\}$$

ὅπου p εἶναι ἕνα διάνυσμα μέ n συντεταγμένες, a ἕνα διάνυσμα μέ k συντεταγμένες καί X μιά nxk μήτρα.

6.4 Ἄν B, C, D εἶναι μῆτρες μέ διαστάσεις τέτοιες ὥστε νά ὁρίζεται τό γινόμενο

BCBD

δεῖξτε ὅτι

$$\frac{\partial tr(BCBD)}{\partial B} = G', \text{ ἄν B δέν εἶναι συμμετρική}$$

$$= G+G'-F, \text{ ἄν B εἶναι συμμετρική}$$

ὅπου

$$G = DBC + CBD$$

καί F εἶναι ἡ διαγώνια μήτρα μέ τήν ἴδια διαγώνιο ὅπως καί ἡ μήτρα G.

6.5 Ἄν κάθε στοιχεῖο μιᾶς nxn μήτρας A εἶναι συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς x_1 δεῖξτε ὅτι

$$\frac{\partial \det A}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_1}$$

Ἐφαρμόζοντας τόν παραπάνω τύπο βρῆτε τήν

$$\frac{\partial \det A}{\partial x_1}$$

ὅταν

$$A = \begin{bmatrix} 2x_1^2 & x_1 \\ 1 & 3x^3 \end{bmatrix}$$

Ἐλέγξτε τό ἀποτέλεσμα παραγωγίζοντας τό ἀνάπτυγμα τῆς detA ὡς πρός x_1.

6.6 Ἄν

$$\psi(b) = (y - Xb)'(y - Xb)$$

ὅπου X εἶναι μιά Txn μήτρα, T > n μέ r(X)=n
(i) Βρῆτε τίς συνθῆκες κάτω ἀπό τίς ὁποῖες ἡ ψ(b) δίνει μέγιστο ἤ ἐλάχιστο
(ii) Ἐρευνῆστε ἄν ἡ ψ(b) δίνει μέγιστο ἤ ἐλάχιστο.

6.7 Ἔστω ἡ συνάρτηση $\psi(x) = a_1 + x'b + \frac{1}{2}x'Cx$

ὅπου x εἶναι ἕνα διάνυσμα μέ m συντεταγμένες, a_1 ἕνας ἀριθμός, b ἕνα διάνυσμα μέ m συντεταγμένες καί C μιά σταθερή καί θετικά ὁρισμένη μήτρα $m x m$.

Διερευνῆστε κάτω ἀπό ποιές συνθῆκες ἡ συνάρτηση $\phi(x)$ ἔχει μέγιστο ἤ ἐλάχιστο.

6.8 Ἄν

$$\phi = 6x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 + x_3^3 + 2x_1x_3 + x_4^2 + x_1x_4 + 2x_2x_4$$

καί

$$x' = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

βρῆτε τό

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

6.9 Βρῆτε τή μήτρα τοῦ Hesse στήν περίπτωση τῶν συναρτήσεων

$$\phi = a_1x^3 + 3a_2x_1^2x_2 + 3a_3x_1x_2^2 + a_4x_2^3$$

καί

$$\varphi = (a_1x_1 + a_2x_2)^3$$

6.10 Βρῆτε ἄν ἡ συνάρτηση

$$\phi = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 8x_1 - 10x_2 - 4x_3$$

δίνει μέγιστο ἤ ἐλάχιστο.

6.11 Παίρνοντας τή συνάρτηση τῆς ἀσκήσεως 6.6 μέ τό δεσμό

$$Rx = r$$

(ὅπου R εἶναι μιά σταθερή μήτρα καί r ἕνα σταθερό διάνυσμα) δῶστε τίς συνθῆκες κάτω ἀπό τίς ὁποῖες ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο.

6.12 Βρῆτε ἄν ἡ συνάρτηση

$$\phi = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 12x_1 + 12x_2 + 8x_3 - 50$$

μέ τό δεσμό

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

δίνει μέγιστο ή ἐλάχιστο.

6.13 Βρῆτε ἄν ή συνάρτηση

$$\psi = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_1 + 2x_2^2 + x_2x_3 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_3$$

μέ τό δεσμό

$$x_1 + x_2 + 3 = 0$$

δίνει μέγιστο ή ἐλάχιστο.

6.14 Βρῆτε ἄν ή συνάρτηση

$$\psi = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 20$$

μέ τούς δεσμούς

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

δίνει μέγιστο ή ἐλάχιστο.

6.15 Βρῆτε ἄν ή συνάρτηση

$$\psi = (x_1-2)^2 + 3(x_2-1)^2 + 2x_3 - 2(x_1-4)(x_2+1)$$

μέ τούς δεσμούς

$3x_1 + x_2 + 5 = 0$ καί $4x_1 + 2x_3 - 1 = 0$

δίνει μέγιστο ή ἐλάχιστο.

6.16 Ἄν ἔχουμε τή συνάρτηση

$$\psi = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n)$$

καί τήν ἀναπτύξουμε γύρω ἀπό τό σημεῖο

$$x^{o\prime} = (x_1^o,\ x_2^o,\ \ldots\ldots\ldots,x_n^o)$$

τότε οἱ δύο πρῶτοι ὅροι τῆς σειρᾶς τοῦ Taylor εἶναι οἱ ἑξῆς

$$\psi - \psi^o = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x_i - x_i^o) \ +$$

$$+ \ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_i^o)(x_j - x_j^o) + \ldots.$$

ὅπου

$$\psi^o = (x_1^o,\ x_2^o,\ldots\ldots\ldots\ldots,x_n^o)$$

Χρησιμοποιώντας τά κατάλληλα διανύσματα καί μῆτρες γράφτε:

(i) τούς παραπάνω δυό ὅρους σάν ἐσωτερικό γινόμενο καί τετραγωνική μορφή

(ii) τούς πρώτους ὅρους τῶν σειρῶν τοῦ Taylor

$$\psi_k = f_k(x_1,\ x_2,\ldots\ldots\ldots,x_n)\ ,\ k=1,2,\ldots\ldots,m$$

μέ μορφή διανύσματος.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

'Ανδρεαδάκη, Σ.Α. (1974)	Μαθήματα Γραμμικῆς 'Αλγέβρας, 'Αθῆναι.
Γκλάβα, Χ.Β. (1967)	Διανυσματική "Αλγεβρα μέ Στοιχεῖα Γραμμικῆς 'Αλγέβρας, 'Αθῆναι.
Γκλάβα, Χ.Β. (1973)	Θεωρία Μητρῶν, 'Οριζουσῶν καί Γραμμικῆς 'Αλγέβρας, 'Αθῆναι.
Καζαντζίδου, Γ.Σ.(1972)	Βασική Γραμμική "Αλγεβρα, 'Ιωάννινα.
Κάππου, Δ.Α. (1967)	Εἰσαγωγή εἰς τήν "Αλγεβραν, 'Αθῆναι.
Κάππου, Δ.Α. (1970)	Εἰσαγωγή εἰς τήν "Αλγεβραν,Τεῦχος Β΄ 'Αθῆναι.
Κριτικοῦ, Ν. (1963)	Πρόχειρες Σημειώσεις 'Ανωτέρων Μαθηματικῶν, 'Αθῆναι.
Ρόκου, Π. (1965)	Μαθήματα Γραμμικῆς 'Αλγέβρας, Θεσσαλονίκη.
Στεριώτη, Π. (1969)	Στοιχεῖα Γενικῶν Μαθηματικῶν, Τόμος Ι, 'Αθῆναι.
Στεριώτη, Π. (1973)	Γενικά Μαθηματικά δι'Οἰκονομολόγους, ΙΙ, 'Αθῆναι.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Acher, J. and Gardelle, J. (1970)	Algèbre Linéaire et Programmation Lineaire, Paris, Dunod.
Aitken, A.C. (1949)	Determinants and Matrices, Edinburgh and London, Oliver and Boyd.
Allen, R.G.D. (1938)	Mathematical Analysis for Economists, London, Macmillan and Co. Ltd.
Allen, R.G.D. (1963)	Mathematical Economics,London,Macmillan and Co. Ltd.
Allen, R.G.D. (1964)	Basic Mathematics, London, Macmillan and Co. Ltd.
Anderson, T.W. (1958)	An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, New York, John Wiley and Sons, Inc.
Birkhoff, G. and Mac Lane Saunders	A Brief Survey of Modern Algebra, 2nd Edition, New York, The Macmillan Co. Βλέπε μετάφραση στά έλληνικά τῶν Ν. Κριτικοῦ καί Δ. Γκιόκα μέ τόν τίτλο Σύντομη 'Επισκόπηση τῆς Νεώτερης "Αλγεβρας, 'Αθήνα 1971, 'Εκδόσεις Α.Καραβία.
Bourbaki, N. (1970)	Algebre, Chapitre II Algebre Lineaire, Paris, Hermann. Βλέπε καί τήν 'Αγγλική μετάφραση: Algebra I, Chapters I-III, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., (1973).
Brauer, F., Nohel, J.A. and Schneider, H. (1970)	Linear Mathematics, New York, W.A. Benjamin, Inc.
Cahen, G. (1959)	Elements de Calcul Matriciel, Paris, Dunod.

Chambadal, L. and Ovaert, J.L. (1968)	Algèbre Linéaire et Algebre Tensorielle, Paris, Dunod.
Courant, R. (1934)	Differential and Integral Calculus, Volume I, London and Glasgow, Blackie and Son Ltd.
Courant, R. (1936)	Differential and Integral Calculus, Volume II, London and Glasgow, Blackie and Son Ltd.
Debreu, G. (1952)	'Definite and Semi-definite Quadratic Forms', Econometrica, vol. 20 pp. 295-300.
Dhrymes, P.J. (1970)	Econometrics, Statistical Foundations and Applications, New York, Harper and Row.
Fadder, D.K. and Sominskii (1965)	Problems in Higher Algebra, San Francisco and London, W.H.Freeman and Co.
Fisk, P.R. (1967)	Stochastically Dependent Equations, London, Charles Griffin and Co.Ltd.
Frisch, R. (1960)	Maxima et Minima, Paris, Dunod.
Gantmacher, F.R. (1958)	Matrizen-rechnung I,II, Berlin.
Gillespie, R.P. (1954)	Partial Differentiation, Edinburgh and London, Oliver and Boyd.
Glaister, S. (1972)	Mathematical Methods for Economists, London, Gray-Mills Publishing Ltd.
Godement, R. (1966)	Cours d' Algèbre, Paris, Hermann.

Goldberger, A.S. (1964)	Econometric Theory, New York, John Wiley and Sons, Inc.
Graeub, W. (1958)	Lineare Algebra, Berlin-Goettingen-Heidelberg.
Hadley, G. (1961)	Linear Algebra, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co.,Inc.
Halmos, P.R. (1958)	Finite Dimentional Vector Spaces, 2nd Edition,, Princeton, D.Van Nostrand Company, Inc.
Henderson, J.M. and Quandt, R.E. (1958)	Microeconomic Theory, New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.
Johnston, J. (1972)	Econometric Methods, 2nd Edition, New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.
Kuska, E.A. (1973)	Maxima, Minima and Comparative Statics, London, Weidenfeld and Nicholson.
Lancaster,K. (1968)	Mathematical Economics, New York, Macmillan and Co. Ltd.
Nef, W. (1967)	Linear Algebra, London, McGraw Hill Co. Ltd.
Pernelle, R. (1969)	Le Calcul Matriciel, Paris, Eyrolles.
Rao, C.R. (1965)	Linear Statistical Inference and its Applications, New York, John Wiley and Sons, Inc.
Rowley, J.C.R. (1973)	Econometric Estimation, London, Weidenfeld and Nicolson.

Shilov, G.E. (1971) Linear Algebra, Engewood Cliffs, Prentice Hall.

Souriau, J.M. (1959) Calcul Linéaire, Paris, Presses Universitaires de France.

Theil, H. (1971) Principles of Econometrics, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Zurmuehl, R. (1958) Matrizen, Berlin-Goettingen-Heidelberg, Springer Verlag.

ΑΓΓΛΟΕΛΛΗΝΙΚΟ ΓΛΩΣΣΑΡΙΟ ΟΡΩΝ

Στό γλωσσάριο αὐτό δίνουμε, ἀπό τά ἀγγλικά στά ἐλληνικά, τούς περισσότερους ἀπό τούς ὅρους πού χρησιμοποιοῦμε στό βιβλίο αὐτό ἀνεξάρτητα ἀπό τό ἄν δόθηκε ἤ ὄχι στό κείμενο ἡ ἀγγλική λέξη (μέσα σέ παρένθεση) μετά τόν ἑλληνικό ὅρο.

adjoint matrix = προσαρτημένη μήτρα
angle = γωνία
augmented matrix = ἐπαυξημένη μήτρα

basic solution = βασική λύση
basis = βάση

characteristic root = χαρακτηριστική ρίζα
characteristic polynomial = χαρακτηριστικό πολυώνυμο
characteristic vector = χαρακτηριστικό διάνυσμα
cofactor = προσημασμένη ἐλάσσονα ὁρίζουσα
column = στήλη
column rank = στηλοβαθμός
combination = συνδυασμός
complementary cofactor = συμπληρωματική προσημασμένη ἐλάσσονα ὁρίζουσα
complex number = μιγαδικός ἀριθμός
co-ordinate = συντεταγμένη

derivative = παράγωγος
diagonal = διαγώνιος
diagonal matrix = διαγώνια μήτρα
differential = διαφορικό

dimension = διάσταση
division = διαίρεση
distance = ἀπόσταση

eigenvalue = ἰδιοτιμή
eigenvector = ἰδιοδιάνυσμα
element = στοιχεῖο
elementary transformation = στοιχειώδης μετασχηματισμός
equal = ἴσος
equality = ἰσότητα
equivalent matrix = ἰσοδύναμη μήτρα
Euclidean space = Εὐκλείδειος χῶρος

homogeneous simultaneous equations = ὁμογενῆ συστήματα ἐξισώσεων
Hessian = ἡ ὁρίζουσα τοῦ Hesse

idempotent matrix = ταυτοδύναμη μήτρα
identity matrix = ταυτοτική μήτρα
imaginary number = φανταστικός ἀριθμός
indefinite quadratic form = προσημαστικά ὄχι ὁρισμένη τετραγωνική μορφή
inequality = ἀνισότητα
integral = ὁλοκλήρωμα
integration = ὁλοκλήρωση
inverse matrix = ἀντίστροφη μήτρα

Kronecker delta = τό δέλτα τοῦ Kronecker

Kronecker product = τό γινόμενο τοῦ Kronecker

Lagrange multipliers = οἱ πολλαπλασιαστές τοῦ Lagrange
length = μῆκος
linear dependence = γραμμική ἐξάρτηση
linear equation = γραμμική ἐξίσωση
linear independence = γραμμική ἀνεξαρτησία
linearly dependent = γραμμικά ἐξαρτημένος
lower triangular matrix = κάτω τριγωνική μήτρα

matrix = μήτρα
matrix addition = πρόσθεση μητρῶν
matrix multiplication = πολλαπλασιασμός μητρῶν
maximisation = μεγιστοποίηση
maximum = μέγιστο
minimisation = ἐλαχιστοποίηση
minimum = ἐλάχιστο
minor = ἐλάσσονα ὀρίζουσα

negative definite quadratic form = ἀρνητικά ὁρισμένη τετραγωνική μορφή
non-singular matrix = μή ἰδιάζουσα μήτρα
null matrix = μηδενική μήτρα

orthogonal matrix = ὀρθογώνια μήτρα
orthogonal transformation = ὀρθογώνιος μετασχηματισμός

partial derivative = μερική παράγωγος

partitioned matrix = μήτρα μέ στοιχεῖα ὑπομῆτρες
permutation = μετάθεση
pivotal condensation = διαδοχική σύμπτυξη
positive definite quadratic form = θετικά ὁρισμένη τετραγωνική μορφή
principal minor = πρωτεύουσα ἐλάσσονα ὁρίζουσα

quadratic form = τετραγωνική μορφή

rank = βαθμός
real number = πραγματικός ἀριθμός
row = γραμμή
row rank = γραμμοβαθμός

scalar multiplication = ἀριθμητικός πολλαπλασιασμός
scalar product = ἐσωτερικό γινόμενο
semidefinite = ἡμιορισμένος
series = σειρά
set = σύνολο
simultaneous equations = σύστημα ἐξισώσεων
skew-symmetric matrix = ἀντισυμμετρική μήτρα
similar matrix = ὅμοια μήτρα
singular matrix = ἰδιάζουσα μήτρα
solution = λύση
square matrix = τετραγωνική μήτρα
submatrix = ὑπομήτρα
subset = ὑποσύνολο
symmetric matrix = συμμετρική μήτρα

system = σύστημα

trace = ἴχνος
transpose matrix = ἀνάστροφη μήτρα
transpose vector = ἀνάστροφο διάνυσμα
triangular matrix = τριγωνική μήτρα
trivial solution = τετριμμένη λύση

unequal = ἄνισος
unique = μοναδικός
upper triangular matrix = ἄνω τριγωνική μήτρα

vector = διάνυσμα
vector space = διανυσματικός χῶρος
vectoring = διανυσμάτιση

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΥΛΗΣ

'Η ἐκτύπωσις ἔγινε εἰς τό Λιθογραφεῖον Μ. Σπύρου
Νέα Σεπόλια - Κύπρου 101 καί Σολωμοῦ - Τηλ. 579.389

whose
[illegible]