Μανόλη Δρεττάκη
Καθηγητοῦ Α.Σ.Ο.Ε.Ε.

Θεωρητική Οἰκονομετρία

I

$$y = X\beta + u$$

$$b = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\hat{\beta} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$$

Ἀθήνα 1975

Μανόλη Δρεττάκη
Καθηγητοῦ Α.Σ.Ο.Ε.Ε.

Θεωρητική Οἰκονομετρία

I

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$$

Ἀθήνα 1975

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο ἔχει τὴν ὑπογραφὴ τοῦ συγγραφέα

Στή Μαρία

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ Οἰκονομετρία, ἄρχισε νά διδάσκεται σάν ὑποχρεωτικό μάθημα σέ Οἰκονομικές Σχολές Πανεπιστημιακοῦ ἐπιπέδου στήν Ἑλλάδα τήν τελευταία πενταετία καί οἱ πρῶτες ἕδρες Οἰκονομετρίας πληρώθηκαν μόλις τήν τελευταία διετία.

Τό πρῶτο βιβλίο Οἰκονομετρίας πού δημοσιεύτηκε στήν Ἑλλάδα ἦταν τοῦ Ἀθανασιάδη (1954). Τά βιβλία τοῦ ἴδιου συγγραφέα(1957β) (1958) ὅπως καί τά βιβλία τοῦ Κεβόρκ (1972γ), (1972δ) περιέχουν ὕλη πού μπορεῖ νά θεωρηθῆ, κατά ἕνα μέρος, οἰκονομετρική. Τά τελευταῖα τέσσερα χρόνια δημοσιεύτηκαν ἀρκετά βιβλία Οἰκονομετρίας, ὅπως τῶν: Δρακάτου (1971), (1973), Γκαμαλέτσου (1972),(1973) καί Κιντῆ (1974).

Στά περισσότερα ἀπό τά βιβλία Οἰκονομετρίας πού ἀναφέρονται πιό πάνω, ἡ θεωρία δίνεται μέ τό συμβολισμό τῶν ἀθροισμάτων καί σέ ὅλα σχεδόν παραλείπονται μερικές βασικές ἀποδείξεις. Ἕνας λόγος γιά τόν τρόπον αὐτόν παρουσιάσεως τῆς Οἰκονομετρικῆς Θεωρίας εἶναι, ἴσως, τό γεγονός ὅτι οἱ σπουδαστές δέν ἔχουν τήν ἀπαραίτητη κατάρτιση στή Γραμμική Ἄλγεβρα. Γιά τό λόγο αὐτό ὁ συγγραφέας (1975) θεώρησε σκόπιμη τή δημοσίευση ἑνός βιβλίου πού δίνει στό σπουδαστή τῆς Οἰκονομετρίας τήν ὕλη ἐκείνη τῆς Γραμμικῆς Ἄλγεβρας πού τοῦ χρειάζεται γιά νά παρακολουθήση τή Θεωρητική Οἰκονομετρία μέ τό συμβολισμό τῶν μητρῶν καί τῶν διανυσμάτων.

Ἡ Θεωρητική Οἰκονομετρία ἔχει ἐπεκταθῆ σέ πολλά θέματα. Μερικά ἀπ'αὐτά, ἀνάλογα μέ τό πρόγραμμα μαθημάτων τῆς κάθε μιᾶς Οἰκονομικῆς Σχολῆς, μποροῦν νά διδαχτοῦν σέ προπτυχιακό ἐπίπεδο. Ἄλλα θά πρέπη νά διδάσκωνται σέ μεταπτυχιακό ἐπίπεδο.

Τά τρία τέταρτα περίπου τοῦ τόμου αὐτοῦ καλύπτουν θέματα πού, κατά τή γνώμη τοῦ συγγραφέα, θά πρέπη νά γνωρίζη ὁ πτυχιοῦχος μιᾶς Οἰκονομικῆς Σχολῆς Πανεπιστημιακοῦ ἐπιπέδου. Τά θέματα αὐτά ἀναφέρονται σέ ὑποδείγματα μιᾶς ἐξισώσεως (single equation models). Ὁ δεύτερος τόμος θά καλύψη τά συστήματα ἀλληλεξαρτημένων ἐξισώσεων (simultaneous equation models) καί ὁ τρίτος ὁρισμένα εἰδικά θέματα πού δέν θά καλυφθοῦν στούς δυό πρώτους τόμους.

Παρ'ὅλο ὅτι τά οἰκονομετρικά ὑποδείγματα μέ πολλές ἀλληλεξαρτημένες ἐξισώσεις, μετά ἀπό τίς πρωτοποριακές ἐργασίες τῶν Tinbergen (1937), (1939), Haarelnio (1943) καί Hood and Koopmans (1953), διαδίδονται ὁλοένα καί περισσότερο (βλέπε π.χ. Duesenberry et al. (1965), Leser (1966), Nerlove (1966), Stekler (1968) καί Hendry (1974)), τά οἰκονομετρικά ὑποδείγματα μιᾶς ἐξισώσεως ἀπασχόλησαν κι'ἐξακολουθοῦν νά ἀπασχολοῦν τόσο τή Θεωρητική ὅσο καί τήν Ἐφαρμοσμένη Οἰκονομετρία. Ὅπως ἀναφέρει ὁ Klein (1960) ὑπάρχουν πολλά προβλήματα (ὅπως ἡ ζήτηση γεωργικῶν προϊόντων, ἡ προσφορά καί ἡ ζήτηση προϊόντων ἀπό μιά μικρή χώρα στό διεθνές ἐμπόριο, οἱ καμπύλες Engel ἀπό διαστρωματικά στοιχεῖα κ.λ.π.)στά ὁποῖα ἴσως εἶναι προτιμότερη ἡ χρησιμοποίηση ὑποδειγμάτων μιᾶς ἐξισώσεως παρά συστημάτων ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων.

Μετά ἀπό τό εἰσαγωγικό Κεφάλαιο, ἡ ὕλη τοῦ τόμου αὐτοῦ μπορεῖ νά διαιρεθῆ σέ δυό ὁμάδες. Ἡ πρώτη (Κεφάλαια 2-4) ἀσχολεῖται μέ τό Κλασσικό Γραμμικό Ὑπόδειγμα, τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων του μέ τίς μεθόδους τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καί τῆς μεγίστης πιθανότητος, καί τούς ἐλέγχους σημαντικότητος τῶν ἐκτιμήσεων. Στή συνέχεια ἐξετάζεται ἡ χρησιμοποίηση τοῦ Κλασσικοῦ Γραμμικοῦ Ὑποδείγματος γιά τήν ἀπαλλαγή τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἀπό τήν ἐποχικότητα,τήν ἀνάλυση τῆς διακυμάνσεως καί συνδιακυμάνσεως. Τέλος ἀνασκοποῦνται ὁρισμένα ἀπό τά προβλήματα τοῦ ὑποδείγματος αὐτοῦ. Ἡ δεύτερη ὁμάδα (Κεφάλαια 5-7) ἀσχολεῖται μέ τό

Γενικευμένο Γραμμικό Ὑπόδειγμα, τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων του μέ τή γενικευμένη μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καί τή μέθοδο τῆς μεγίστης πιθανότητος, τούς ἐλέγχους γιά τήν ὕπαρξη καί τούς τρόπους ἀντιμετωπίσεως τῆς ἑτεροσκεδαστικότητας καί τῆς αὐτοσυσχετίσεως καί τέλος μέ ἐφαρμογές τοῦ ὑποδείγματος αὐτοῦ:στήν ἐνσωμάτωση a pr΄ri πληροφοριῶν, τό συνδυασμό πολλῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων καί τό συνδυασμό διαστρωματικῶν στοιχείων καί χρονολογικῶν σειρῶν. Στό τέλος τοῦ βιβλίου ὑπάρχουν: ἡ ἑλληνική καί ξένη βιβλιογρ φία στίς ὁποῖες παραπέμπουμε (μέ τό ὄνομα τοῦ συγγραφέα καί τό χρόνο δημοσιεύσεως τοῦ βιβλίου ἤ τοῦ ἄρθρου) γιά τά θέματα μέ τά ὁποῖα ἀσχολούμαστε στό βιβλίο αὐ ό, ἕνα ἀγγλοελληνικό γλωσσάριο ὅρων καί τό εὑρετήριον ὕλης.

Ἐπειδή τά ἀριθμητικά παραδείγματα πού δίνονται στίς διαλέξεις καί οἱ ἀσκήσεις πού γίνονται στά φροντιστήρια ἀλλάζουν ἀνάλογα μέ τά ἐρευνητικά ἐνδιαφέροντα καί τή μέθοδο διδασκαλίας τοῦ κάθε δασκάλου, γι'αὐτό καί δέν θεωρήθηκε σκόπιμο νά συμπεριληφθοῦν σ'ἕνα βιβλίο πού δίνει τή βασική Θεωρητική Οἰκονομετρία.

Γιά νά διευκολύνεται ὁ ἀναγνώστης στήν ἀναγνώριση τῶν συμβόλων χρησιμοποιοῦμε τό μεγαλύτερο τύπο γραμμάτων γιά τίς μῆτρες (π.χ. τά A ,X ,X_2 γιά μῆτρες καί τό 0 γιά τή μηδενική μῆτρα) καί τά διανύσματα (π.χ. τά b,$x_{.j}$ γιά διανύσματα - στῆλες, τά b',$x_{i.}$ γιά διανύσματα - γραμμές καί τό o γιά μηδενικό διάνυσμα) καί τό μικρότερο τύπο (δηλαδή τόν τύπο στόν ὁποῖο εἶναι γραμμένο τό κυρίως κείμενο) γιά τά στοιχεῖα τῶν μητρῶν καί διανυσμάτων καί τούς ἀριθμούς.

Ἔχει γίνει παραδεκτό (βλέπε π.χ. Leser (1974)) ὅτι ἡ Οἰκονομετρία εἶναι μάθημα πού πρέπει νά διδάσκεται στόν τελευταῖο (ἤ τόν προτελευταῖο) χρόνο τῶν προπτυχιακῶν σπουδῶν, διότι οἱ σπουδαστές θά πρέπη νά ἔχουν πάρη, στά προηγούμενα χρόνια τῶν σπουδῶν τους, μιά βασική κατάρτιση στήν Οἰκονομική Θεωρία, τά Μαθηματικά καί τή Στατιστική. Αὐτή τήν κατάρτιση τήν προϋποθέτει τό βιβλίο αὐτό. Ὑποθέτουμε, δηλαδή, ὅτι οἱ σπουδαστές ἔχουν παρακολουθήσει δυό ἤ τρία χρόνια Οἰκονομική Θεωρία, δυό χρόνια Μαθηματικά γιά Οἰκονομολόγους, μέ βοηθήματα σάν τῶν Στεριώτη (1969), (1973), J.P.Lewis (1969) (βλέπε καί ἑλληνική μετάφραση Δρακάτου (1970-4)) ἤ Μπένου καί Stronge (1974) καί δυό ἤ τρία χρόνια Στατιστική, μέ βοηθήματα σάν τῶν 'Αθανασιάδη (1957 α,β,γ), Κεβόρκ (1972α,β,γ,δ) ἤ Δρακάτου (1968), (1972), (1974). Ὑποθέτουμε ἀκόμα ὅτι οἱ σπουδαστές ἔχουν καλύψει τό μεγαλύτερο μέρος τοῦ βιβλίου τοῦ συγγραφέα (1975) γιά τή Γραμμική Ἄλγεβρα.

Φυσικά ὅσο καλύτερη εἶναι ἡ κατάρτιση τοῦ σπουδαστῆ στά Μαθηματικά καί τή Μαθηματική Στατιστική, τόσο πιό ἄνετα θά μπορέση νά παρακολουθήση τή θεωρητική Οἰκονομετρία. Γιά ὅσους δέν ἔχουν τήν κατάρτιση αὐτή, συνιστοῦμε τά βιβλία τῶν Aitken (1949), Hadley (1961) καί 'Ανδρεαδάκη (1974) γιά τή Γραμμική Ἄλγεβρα, τῶν Courant (1936), (1937), Gillespie (1960), (1963) καί Κάππου (1962) γιά τό Διαφορικό καί Ὁλοκληρωτικό Λογισμό καί τῶν Hoel (1962), Mood and Graybill (1963), Κάκουλλου (1969), (1972) καί Λαμπράκη (1972) γιά τή Μαθηματική Στατιστική.

Μερικά κεφάλαια ἀπό ὁρισμένα ἑλληνικά βιβλία Οἰκονομετρίας στά ὁποῖα ἀναφερθήκαμε στήν ἀρχή, εἶναι χρήσιμα γιά μιά εἰσαγωγή σέ θέματα πού περιλαμβάνονται στό βιβλίο αὐτό. Πολλά εἰσαγωγικά βιβλία ἔχουν κυκλοφορήσει, σχετικά πρόσφατα, στά ἀγγλικά, ὅπως τῶν Kane (1969), Walters (1970) Wonnacott and Wonnacott (1970), Wallis (1972) καί Allard (1974).

Ὁ τρόπος παρουσιάσεως τῆς ὕλης στό βιβλίο αὐτό συγγενεύει, σέ ὁρισμένα τμήματα, μέ ἐκεῖνον τῶν Goldberger (1964), Dhrymes (1970), Theil (1971), Johnston (1972) καί Rowley (1973).

Μέ τήν πληθώρα τῶν ἐγχειριδίων πού δημοσιεύτηκαν τά τελευταῖα πέντε χρόνια στά ἀγγλικά (καί μιά σύγκριση παρουσιάσεως τοῦ ἴδιου θέματος ἀπό δυό ἤ καί περισσότερα ἀπό τά ἐγχειρίδια αὐτά δείχνει, σέ πολλές περιπτώσεις, ὅτι καί οἱ φράσεις πού χρησιμοποιοῦνται δέν διαφέρουν κατά πολύ ἡ μιά ἀπό τήν ἄλλη) εἶναι πολύ δύσκολο ἕνα καινούργιο ἐγχειρίδιο νά διεκδικήση τίτλους πρωτοτυπίας, ἰδιαίτερα ὅταν ἡ ὕλη πού παρουσιάζεται (ὅπως στήν περίπτωση τοῦ τόμου αὐτοῦ) εἶναι ἡ βασική πού ἀναφέρεται στά οἰκονομετρικά ὑποδείγματα τῆς μιᾶς ἐξισώσεως.

Οἱ ἀξιώσεις πρωτοτυπίας τοῦ συγγραφέα περιορίζονται ἀκόμα καί ἀπό τήν ἐπίδραση πού εἶχε, στήν ἀπόκτηση πολλῶν ἀπό τίς γνώσεις πού ἔχει στήν Οἰκονομετρία, ἡ διδασκαλία τοῦ καθηγητῆ J.D. Sargan, στήν London School of Economics and Political Science.

Ἡ πρωτοτυπία πού παρουσιάζει, ἴσως, σέ ὁρισμένα σημεῖα καθώς καί ἡ διάταξη τῆς ὕλης πού ἔχει τό βιβλίο αὐτό ὀφείλονται, κατά ἕνα μέρος, στούς σπουδαστές πού (στίς περισσότερες περιπτώσεις χωρίς καμιά βάση στήν Οἰκονομετρία) παρακολούθησαν τά μαθήματα Οἰκονομετρίας πού ἔδωσε ὁ συγγραφέας στήν School of Economic Studies τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Leeds στήν Ἀγγλία τά τελευταῖα χρόνια.

Ὁ καθηγητής κ. Θ. Λιανός διάβασε, σέ χειρόγραφο, τό πρῶτο κεφάλαιο καί ὁ καθηγητής κ. Ε. Χαρατσῆς, πάλι σέ χειρόγραφο ὁλόκληρο σχεδόν τό βιβλίο κι'ἔκαναν μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις.

Τό μεγαλύτερο βάρος τῶν πολλῶν διορθώσεων πού χρειάστηκε νά γίνουν στό δακτυλογραφημένο κείμενο τό ἔφεραν ὁ κ. Ι. Μαμούχας, καί ἡ δ/νις Ε. Κανδηλώρου.

Σέ ὅλους τούς παραπάνω ἐκφράζω τίς εὐχαριστίες μου .Εἶναι, φυσικά, αὐτονόητο ὅτι, γιά ὅσα λάθη ὑπάρχουν ἀκόμα στό κείμενο, ἡ εὐθύνη βαρύνει ἀποκλειστικά ἐμένα.

Μανόλης Δρεττάκης

Ἀθήνα, Ἀπρίλιος 1975.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Σελίδα

ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Σύντομη Ἱστορικὴ Ἀνασκόπηση

Ἀπ'ὅσα ξέρουμε ἱστορία τῆς Οἰκονομετρίας, ἀνάλογη μέ τήν ἱστορία τῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως τοῦ Schumpeter (1954), δέν ἔχει ἀκόμα γραφτῆ. Στή σύντομη αὐτή ἱστορική ἀνασκόπηση,κατά συνέπεια, δέν μποροῦμε νά δώσουμε τίποτε ἄλλο ἐκτός ἀπό μιά μικρή σκιαγραφία τῆς ἱστορικῆς ἐξελίξεως τῆς Οἰκονομετρίας.

Παρ'ὅλο ὅτι ἡ λέξη Οἰκονομετρία (Econometrics) πρωτοχρησιμοποιήθηκε τό 1926 ἀπό τό Νορβηγό οἰκονομέτρη Ragnar Frisch, ἐν τούτοις οἰκονομετρικές σκέψεις εἶχαν διατυπωθῆ καί οἰκονομετρικές μελέτες δημοσιευτῆ πολύ πιό μπροστά.

Ἄν υἱοθετήσουμε ἕνα πολύ γενικό πλαίσιο γιά τήν Οἰκονομετρία, τότε ἀσφαλῶς θά πρέπη νά συμφωνήσουμε μέ τόν Schumpeter (1933) στό ὅτι οἱ: Sir William Petty, Gregory King, Beccaria, Carli, Verri, Cournot, von Thünen, Walras, Pareto, Edgeworth καί Wicksell εἶναι μερικοί ἀπό τούς οἰκονομολόγους πού ἀπό τό 17ο μέχρι τό 19ο αἰῶνα διατύπωσαν σκέψεις στά βιβλία τους πού σήμερα θά τίς ἀποδίδαμε σέ οἰκονομέτρες.

Μιά ἀναμφισβήτητα οἰκονομετρική μελέτη πού ἀφορᾶ τήν ἀνάλυση τῶν μεταβολῶν στή δαπάνη γιά διάφορες κατηγορίες ἀγαθῶν,ἀνάλογα μέ τίς διαφορές πού ὑπάρχουν στό ἐπίπεδο εἰσοδήματος, ἔγινε ἀπό τόν (γνωστό ἀπό τή καμπύλη πού ἔχει τ'ὄνομά του) Engel (1857). Ἡ πρώτη ἐμπειρική ἐκτίμηση τῆς ἐλαστικότητας τῆς ζητήσεως τοῦ καφέ (ὅπως ἀναφέρει ὁ Wold (1969))ἔγινε ἀπό τόν Ἰταλό

2

Rodolfo Benini τό 1907. Οἰκονομετρική ἦταν καί ἡ ἐργασία τοῦ Moore (1914) στήν ὁποία ὁ συγγραφέας προσπάθησε νά ἐκτιμήση τή σχέση πού ὑπάρχει ἀνάμεσα στή ζητούμενη ποσότητα καί τήν τιμή ἑνός ἀγαθοῦ. Πρωτοποριακή ἦταν καί ἡ ἐργασία τοῦ Working (1927) γιά τό πρόβλημα τῆς ταυτοποιήσεως. Τέλος οἱ Cobb καί Douglas (1928) ἦταν οἱ πρῶτοι πού μελέτησαν τή σχέση ἀνάμεσα σ'ἕνα προϊόν καί στήν ἐργασία καί τό κεφάλαιο πού χρησιμοποιοῦνται γιά τήν παραγωγή του.

Τό 1930 ὁ ἀριθμός τῶν οἰκονομετρῶν σ'ὅλο τόν κόσμο εἶχε αὐξηθῆ τόσο ὥστε νά δικαιολογῆ τήν ἵδρυση τῆς Οἰκονομετρικῆς Ἑταιρείας (Econometric Society). Τό καταστατικό τῆς ἑταιρείας ἀναφέρει

> "Κύριος σκοπός της (τῆς Econometric Society, δηλαδή) θά εἶναι ἡ προώθηση μελετῶν πού θά ἀποσκοποῦν στήν ἑνοποίηση τῆς θεωρητικο-ποσοτικῆς καί τῆς ἐμπειρικο-ποσοτικῆς προσεγγίσεως τῶν οἰκονομικῶν προβλημάτων πού ἀναλύονται μέ αὐστηρή καί συνθετική σκέψη ἀνάλογη μέ ἐκείνη πού ἐπικράτησε στίς φυσικές ἐπιστῆμες".

Ὁ σκοπός αὐτός ἄρχισε νά γίνεται σιγά σιγά πραγματικότητα μέ τή συνέχιση τῆς ἔρευνας στίς συναρτήσεις ζητήσεως (ὅπως τοῦ Schultz (1938)), στίς συναρτήσεις κόστους (ὅπως τοῦ Dean (1936)) καί τήν ἀνάπτυξη μακροοικονομικῶν ὑποδειγμάτων μέ πολλές ἐξισώσεις ἀπό τόν Tinbergen, γιά τήν Ὀλλανδία (1937) καί τίς Ἡνωμένες Πολιτεῖες (1939), καί τόν Haavelmo (1943).

Μετά τό Β΄ Παγκόσμιο πόλεμο ἡ πρόοδος συνεχίστηκε· ὅπως ἀναφέρει ὁ Klein (1974) σελ. IX, ἡ πρόοδος αὐτή ἦταν:

> "σταθερή στή δεκαετία 1950-60 ἐνῶ στή δεκαετία 1960-70 σημειώθηκε μιά ἁλματώδης πρόοδος μέ ἀποτέλεσμα ἡ Οἰκονομετρία νά εἶναι σήμερα στή πρώτη γραμμή τῆς Οἰκονομικῆς Ἐπιστήμης".

Στήν πρόοδο αὐτή ἀναμφισβήτητα συντέλεσε καί ἡ ἀνάπτυξη καί διάδοση τῆς χρήσεως ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν πού δίνουν σήμερα στούς οἰκονομέτρες τή δυνατότητα νά πειραματίζωνται σέ μεθόδους καί νά ἐκτιμοῦν ὑποδείγματα μέ πολλές ἐξισώσεις πού πρίν ἀπό 20, ἤ ἀκόμα καί 10 χρόνια ἦταν πράγματα ἀδύνατα ἀπό καθαρά τεχνική ἄποψη.

II. Τὸ Ἀντικείμενο τῆς Οἰκονομετρίας

Ὁποιαδήποτε προσπάθεια γιά νά δοθῆ ἕνας ἀκριβής καί ὁριστικός ὁρισμός σ'ἕνα τόσο νέο ἐπιστημονικό κλάδο εἶναι δύσκολη, ἄν ὄχι ἀδύνατη, διότι ὅπως γράφει ὁ Mill (1941), σελ. 91

> "Ὁ ὁρισμός μιᾶς ἐπιστήμης θά πρέπη, ἀναγκαστικά, νά εἶναι προκαταρκτικός καί προοδευτικός. Ὁποιαδήποτε ἀνάπτυξη τῆς γνώσεως ἤ μεταβολή στίς γνῶμες γύρω ἀπό τό ἀντικείμενό της θά ὁδηγήση, ἴσως, σέ μεταβολές, μικρές ἤ μεγάλες, γύρω ἀπό τό περιεχόμενό της".

Παρ'ὅλ αὐτά προσπάθειες, ἄν ὄχι γιά ὁρισμό, τουλάχιστον γιά μιά ὁροθέτηση τῆς Οἰκονομετρίας ἔχουν γίνει. Ἡ πρώτη ἦταν ἀπό τόν Frisch (1933) πού σάν πρῶτος ἀρχισυντάκτης τοῦ περιοδικοῦ ECONOMETRICA ἔγραφε (σελ. 2)

> "Ἡ Οἰκονομετρία δέν θά πρέπη νά συγχέεται μέ τήν Οἰκονομική Στατιστική. Οὔτε καί πρέπει νά ταυτίζεται μ'αὐτό πού ἀποκαλοῦμε Γενική Οἰκονομική Θεωρία, ἄν καί ἕνα σημαντικό τμῆμα τῆς θεωρίας αὐτῆς ἔχει καθαρά ποσοτικό χαρακτῆρα. Τέλος ἡ Οἰκονομετρία δέν θά πρέπη νά θεωρηθῆ συνώνυμη μέ τήν ἐφαρμογή τῶν μαθηματικῶν στήν οἰκονομική ἐπιστήμη. Ἡ πεῖρα ἔδειξε ὅτι καθεμιά ἀπό τίς τρεῖς ἐπιστῆμες, δηλαδή ἡ Στατιστική, ἡ Οἰκονομική Θεωρία καί τά Μαθηματικά εἶναι ἀναγκαία ἀλλ' ὄχι (ἄν τίς πάρη κανείς τή καθεμιά χωριστά) ἱκανή συνθήκη γιά τήν πραγματική κατανόηση τῶν ποσοτικῶν σχέσεων στή σύγχρονη οἰκονομική ζωή. Αὐτό πού χρειάζεται εἶναι ἡ ἑνοποίηση καί τῶν τριῶν. Αὐτή ἡ ἑνοποίηση ἀποτελεῖ τήν Οἰκονομετρία".

Ὁ Tintner (1953) ἔκανε ἕνα ἀπάνθισμα ὁρισμῶν πού εἶχαν δοθῆ μέχρι τό 1953 στήν Οἰκονομετρία. Στό ἄρθρο αὐτό δίνονται τά δυό συνθετικά τῆς λέξεως ὅπως τά παραθέτει ὁ Chait (1949) δηλαδή οἱ λέξεις "Οἰκονομία" καί "Μέτρον" ἀλλά ὁ Tintner σπεύδει νά προσθέση, ὅτι ἡ παράθεση τῶν δυό αὐτῶν ἑλληνικῶν συνθετικῶν τῆς λέξεως **Οἰκονομετρία** δέν δίνει ἀπαραίτητα τό νόημά της. Ὁ Tintner φαίνεται νά δέχεται τήν ἄποψη τοῦ Marschak (1948),σελ.1 πού εἶναι ἡ ἑξῆς:

"Οἰκονομετρία εἶναι ἡ ἐφαρμογή τῶν Μαθηματικῶν καί τῆς Στατιστικῆς στήν Οἰκονομική Θεωρία... Μιά κάπως στενή ἑρμηνεία εἶναι ὅτι ἡ Οἰκονομετρία ἀσχολεῖται μέ τή μέτρηση τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων. Ἡ μέτρηση αὐτή χρειάζεται ὁρισμένες στατιστικές μεθόδους καί, πρίν κανείς προχωρήση στή μέτρηση, θά πρέπη νά διατυπώση μέ μαθηματικό τρόπο τίς σχέσεις αὐτές".

Τόν ὁρισμό αὐτό περίπου υἱοθέτησε ὁ Tintner (1955) σέ μιά ἔρευνά του γιά τή διδασκαλία τῆς Οἰκονομετρίας γράφοντας, (σελ. 77)

"Ἡ Οἰκονομετρία, στό ἐρώτημα 4 τοῦ ἐρωτηματολογίου τῆς ἔρευνας,ὁρίστηκε σάν: Ἡ ἐφαρμογή τῆς μαθηματικῆς οἰκονομικῆς θεωρίας καί τῆς ποσοτικῆς στατιστικῆς μεθόδου σέ οἰκονομικά προβλήματα".

Ἕνας παρόμοιος,ἀλλά πιό συνοπτικός,ὁρισμός δίνεται ἀπό τόν Tinbergen (1951), σελ. 3

"Οἰκονομετρία εἶναι τό ὄνομα τοῦ τομέα ἐκείνου τῆς ἐπιστήμης στόν ὁποῖον ἐφαρμόζονται σέ συνδυασμό ἡ μαθηματικο-οἰκονομική καί ἡ μαθηματικο-στατιστική ἔρευνα".

Αὐτός ὁ γενικός ὁρισμός ἴσως ὁροθετεῖ σωστά τήν Οἰκονομετρία χωρίς νά περιορίζη τό περιεχόμενό της.

Τό περιεχόμενο αὐτό ἀλλάζει ἀνάλογα μέ τή χρονική περίοδο πού ἐξετάζουμε καθώς καί μέ τή χώρα στήν ὁποία ἀναφερόμαστε.Αὐτό δείχνει μιά σύγκριση τῶν περιεχομένων πρῶτα δυό βιβλίων πού ἔχουν τόν ἴδιο τίτλο καί ἔχουν ἐκδοθῆ σέ ἀγγλοσαξωνικές χῶρες ἀλλά μέ διαφορά ἑνός τρίτου τοῦ αἰῶνα, δηλαδή τῶν βιβλίων τοῦ Davis (1941) καί τῆς Koutsoyiannis (1973) μέ τόν τίτλο Theory of Econometrics καί μετά δυό βιβλίων πού ἐκδόθηκαν μέ διαφορά μόλις 3 χρόνων καί μέ τόν ἴδιο τίτλο Introduction to Econometrics ἀλλά πού ἀναφέρονται στήν Πολωνία (τοῦ Lange (1959)) καί στίς

῾Ηνωμένες Πολιτεῖες (τοῦ Klein (1962)).

᾿Επιπλέον ἡ μεγάλη ἀνάπτυξη τῆς Οἰκονομετρίας δημιούργησε εἰδικούς σέ διάφορους κλάδους της ὅπως π.χ. τήν ἀνάπτυξη καί βελτίωση τῶν οἰκονομετρικῶν μεθόδων, τήν ἀνάπτυξη ὑποδειγμάτων κατά τομεῖς καί γιά τό σύνολο τῆς οἰκονομίας καί τήν ἀνάπτυξη μεθόδων καί τή συγγραφή προγραμμάτων γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων οἰκονομετρικῶν ὑποδειγμάτων μέ ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές.

Οἱ οἰκονομετρικές μέθοδοι εἶναι πιό συγγενικές μέ τή Μαθηματική Στατιστική διότι ἀσχολοῦνται μέ τήν ἀνάπτυξη καί τροποποίηση στατιστικῶν μεθόδων γιά τήν ἀντιμετώπιση προβλημάτων πού παρουσιάζονται στήν οἰκονομετρική διερεύνηση τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Οἱ μέθοδοι αὐτοί ἀφοροῦν καταστάσεις στίς ὁποῖες τό πείραμα εἶναι ἀδύνατο (βλέπε Wold (1954)). Τέτοιες ὅμως καταστάσεις ὑπάρχουν καί σέ ἄλλα, ἐκτός ἀπό τά οἰκονομικά, κοινωνικά φαινόμενα. ῾Επομένως οἱ οἰκονομετρικές μέθοδοι βρίσκουν ἐφαρμογή καί σέ ἄλλες κοινωνικές ἐπιστῆμες (βλέπε Goldberger (1972)) ὅπως π.χ. τήν Κοινωνιολογία (βλέπε Duncan et al (1968)) καί τήν Ψυχολογία (βλέπε Jöreskog, K.G. (1969)).

᾿Ανάμεσα σ᾿ἐκείνους πού ἔχουν πολλά προσφέρει στήν ἀνάπτυξη τῶν **Οἰκονομετρικῶν Μεθόδων (Econometric Methods)** ἤ τῆς **Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας (Theoretical Econometrics)** ἤ **Οἰκονομετρικῆς Θεωρίας (Econometric Theory)** εἶναι καί οἱ: Frisch (1934), Mann and Wald (1943), Durbin and Watson(1950) (1951), Hood and Koopmans (1953), Theil (1953), Sargan (1958), Malinvaud (1961), Fisher, F.M. (1965), Dhrymes (1971) καί ἄλλοι (βλέπε καί τμῆμα ΙΙΙ τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ).

῾Η ἀνάπτυξη οἰκονομετρικῶν ὑποδειγμάτων ἀποτελεῖ τήν **῾Εφαρμοσμένη Οἰκονομετρία (Applied Econometrics)**. Σ᾿ αὐτήν ἔχουν συμβάλλει πολλοί, ἐργαζόμενοι σάν ἄτομα ἤ σάν μέλη ὁμάδων. Εἶναι δύσκολο ν᾿ἀπαριθμίση κανείς τούς οἰκονομολόγους ἐκείνους πού χρησιμοποίησαν οἰκονομετρικές μεθόδους γιά τήν ἐκτίμηση τῶν οἰκονομικῶν σχέσεων τίς ὁποῖες ἐρευνοῦσαν διότι εἶναι πολλές χιλιάδες. Ἀναφέραμε ὅμως, πιό μπροστά, τό ὄνομα τοῦ Tinbergen σάν πρωτοπόρου στήν ἀνάπτυξη μακροοικονομικῶν ὑποδειγμάτων μέ πολλές ἐξισώσεις πού καλύπτουν μιά ὁλόκληρη οἰκονομία. Θά πρέπη νά προσθέσουμε ὅτι τό ἔργο αὐτό τό συνέχισαν οἱ Klein and Goldberger (1955), οἱ Klein et al (1961), οἱ Duesenberry et al (1965), (1969) καί ἄλλοι. Ἡ αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὑποδειγμάτων τοῦ τύπου αὐτοῦ συνοδεύεται καί ἀπό τήν αὔξηση καί τῶν ἐξισώσεών τους. Ἔτσι τό ὑπόδειγμα τοῦ Brookings Institution ἄρχισε μέ 300 ἐξισώσεις καί στό ἑπόμενο στάδιό του, ὅπως ἀναφέρουν οἱ Duesenberry et al (1969), θά ἔχη 1000 ἐξισώσεις.

Τέλος ἡ ἀνάπτυξη μεθόδων καί ἡ συγγραφή προγραμμάτων γιά τό γρήγορο ὑπολογισμό τῶν ἐκτιμήσεων τῶν παραμέτρων γίνεται τόσο ἀπό οἰκονομέτρες, ὅσο καί ἀπό μαθηματικούς καί προγραμματιστές ἤ ἐπιστήμονες ἄλλων εἰδικοτήτων. Ἐνδεικτικά ἀναφέρουμε τούς Eisenpress and Greenstadt (1966), Chow (1968) καί Powell (1964).

Πρίν κλείσουμε τό τμῆμα αὐτό τῆς Εἰσαγωγῆς θά πρέπη νά τονίσουμε ὅτι ἡ δημιουργία εἰδικῶν στούς παραπάνω τρεῖς τομεῖς (ἤ σέ τμήματά τους) δέν σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν στεγανά στήν Οἰκονομετρία. Στήν πράξη, οἱ περισσότεροι οἰκονομέτρες ἀσχολοῦνται καί μέ τούς τρεῖς καί πολλές φορές κάποιος πού θεωρεῖται εἰδικός στόν ἕνα κάνει μιά σημαντική συμβολή στήν πρόοδο καί ἀνάπτυξη τοῦ ἄλλου.

III. Διαφοροποίηση τῆς Οἰκονομετρίας ἀπὸ τὰ Μαθηματικά, τὴν Οἰκονομικὴ Στατιστική, τὴ Μαθηματικὴ Οἰκονομικὴ καὶ τὴ Μαθηματικὴ Στατιστικὴ

Σ'ὅλες τίς ἐπιστῆμες (ἤ τούς κλάδους ἐπιστημῶν) πού ἀναφέρονται πιό πάνω ὑπάρχουν, ὅπως καί στήν Οἰκονομετρία, προβλήματα ὁροθετήσεως καί ὁρισμῶν. Δέν σκοπεύουμε νά θίξουμε τά προβλήματα αὐτά. Σκοπός μας εἶναι ἁπλῶς νά διαφοροποιήσουμε τήν Οἰκονομετρία άπό τούς τέσσερις αύτούς κλάδους.

Όπως άναφέραμε καί στόν πρόλογο τά Μαθηματικά (Mathematics) είναι ένα άπαραίτητο έργαλείο γιά τήν Οίκονομετρία καί ένας άριθμός οίκονομετρών έχει τελειώσει μαθηματικές σχολές. Όσο καλύτερη είναι ή μαθηματική κατάρτιση τού οίκονομέτρη τόσο πιό εύκολη είναι ή άντιμετώπιση άπ'αύτόν δύσκολων προβλημάτων θεωρητικής Οίκονομετρίας.

Ἡ Οίκονομική Στατιστική (Economic Statistics) άσχολεῖται μέ τή συγκέντρωση καί κατάταξη οίκονομικών στοιχείων (Wallis (1972)).

Ἡ Οίκονομική όμως Στατιστική προχωρᾶ καί πέρα άπ'αύτό, δηλαδή στήν έπεξεργασία τῶν στοιχείων καί στήν παρουσίασή τους εἴτε μέ διαγράμματα, εἴτε μέ δεῖχτες καί, στή περίπτωση τῶν χρονολογικῶν σειρῶν, στήν άπαλλαγή άπό τήν έποχικότητα (deseasonolisation) τῶν στοιχείων αύτῶν. Ἡ συμβολή τῆς Οίκονομικῆς Στατιστικῆς στήν Έφαρμοσμένη (καί ἴσως καί τή Θεωρητική) Οίκονομετρία μπορεῖ νά είναι πολύ μεγάλη, ίδιαίτερα όταν ή συλλογή άξιόπιστων στοιχείων βρίσκεται σέ νηπιακό στάδιο. Άλλά καί στίς περιπτώσεις πού ύπάρχει μεγάλη παράδοση στή συλλογή στοιχείων καί πάλι ή Οίκονομική Στατιστική μπορεῖ νά βελτιώση τήν ποιότητά τους καί νά έπεκτείνη τή δραστηριότητά της σέ τομεῖς πού άποκτοῦν, μέ τό πέρασμα τοῦ χρόνου σημασία.

Ἡ διαφορά άνάμεσα στήν Οίκονομετρία καί τή Μαθηματική Οίκονομική (Mathematical Economics) όρίζεται περιληπτικά, άπό τόν Tintner (1953), σελ. 37, ώς έξῆς:

> "Ἡ Οίκονομετρία διαφέρει άπό τή Μαθηματική Οίκονομική διότι ή τελευταία, ἂν καί ποσοτική, έν τούτοις δέν είναι έμπειρική καί δέ χρησιμοποιεῖ τή Στατιστική".

Ἡ λέξη "ποσοτική" στό άπόσπασμα αύτό έχει τήν έννοια ότι ή Μαθηματική Οίκονομική άσχολεῖται μέ μετρήσιμες μεταβλητές. Τό γεγονός όμως ότι "δέν είναι έμπειρική καί δέν χρησιμοποιεῖ Στατιστική" σημαίνει ὅτι τήν ἐνδιαφέρουν τά πρόσημα μᾶλλον παρά οἱ τιμές πού παίρνουν οἱ διάφοροι συντελεστές στά διάφορα μαθηματικά ὑποδείγματα στά ὁποῖα ἀποκρυσταλλώνεται ἡ οἰκονομική θεωρία. Ὅπως γράφει ὁ Allen (1967), σελ. XI. Ἡ μαθηματική οἰκονομική ἀφορᾶ ντετερμινιστικά (deterministic) μᾶλλον παρά στοχαστικά (stochastic) ὑποδείγματα (models).

Γιά νά κάνουμε ξεκάθαρη τή διαφορά ἀνάμεσα στή Μαθηματική Οἰκονομική καί τήν Οἰκονομετρία παίρνουμε τό Κεϋνσιανό ὑπόδειγμα πού παραθέτουν οἱ Wallis (1972) καί Johnston (1972), δηλαδή:

$$C_t = \gamma_{11} + \beta_{11}(Y-T)_t$$

$$I_t = \gamma_{21} + \gamma_{22} Y_{t-1} + \gamma_{23} r_t$$

$$Y_t \equiv C_t + I_t + G_t$$

Ὅπου: C = Κατανάλωση

I = Ἐπένδυση

G = Κυβερνητικές Δαπάνες

T = Ἄμεσοι Φόροι

r = Ἐπιτόκιο

Y = Εἰσόδημα

Ἡ Μαθηματική Οἰκονομική (πού σήμερα ἀσχολεῖται μέ πολύ πιό περίπλοκα προβλήματα) ἀφοῦ διατυπώσει τό ὑπόδειγμα αὐτό, ἀσχολεῖται μέ τόν προσδιορισμό τῶν προσήμων (ἢ τῶν ὁρίων) τῶν παραμέτρων β_{11}, γ_{22} καί γ_{23}, δηλαδή

$0 < \beta_{11} < 1$ διότι ἡ β_{11} εἶναι ἡ ὁριακή ροπή πρός κατανάλωση.

$\gamma_{22} > 0$ Ἡ ἐπένδυση αὔξάνει ἂν τό εἰσόδημα ἔχει αὐξηθῆ τήν προηγούμενη χρονική περίοδο.

$\gamma_{23} < 0$ Ὅταν αὐξάνη τό ἐπιτόκιο μειώνεται ἡ ἐπένδυση.

Μέ βάση τόσο τό ὑπόδειγμα ὅσο καί τά πρόσημα τῶν συντελεστῶν ἡ Μαθηματική Οἰκονομική ἐξετάζει τίς συνέπειες πού ἔχουν, π.χ., ἡ αὔξηση τοῦ ἐπιτοκίου, ἤ ἡ μείωση τῶν ἄμεσων φόρων ἤ τῶν κυβερνητικῶν δαπανῶν πάνω στήν κατανάλωση, τήν ἐπένδυση ἤ τό εἰσόδημα. Σ'ὅλη αὐτή τήν ἀνάλυση, ἐκτός ἀπό τά πρόσημα (καί στήν περίπτωση τοῦ β_{11} τά ὅρια) τῶν συντελεστῶν τοῦ ὑποδείγματός δέν γίνεται κανένας λόγος γιά ἀριθμητικές τιμές τῶν γ_{ij} καί β_{11} οὔτε καί γιά τή χρησιμοποίηση στατιστικῶν μεθόδων.

Ἄν πάρουμε ὅμως τίς δυό πρῶτες ἐξισώσεις δέν μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι μποροῦν νά θεωρηθοῦν ἀκριβεῖς διότι, χωρίς ἀμφιβολία, ἔχουν παραληφθῆ καί ἄλλες, ἴσως ὄχι καί τόσο σημαντικές, μεταβλητές. Ἐπιπλέον ξέρουμε ὅτι ἡ συμπεριφορά τῶν καταναλωτῶν στήν πρώτη ἐξίσωση ἤ τῶν ἐπιχειρηματιῶν στή δεύτερη ἔχει διακυμάνσεις. Γι'αὐτούς καί ἄλλους λόγους θά πρέπη νά προσθέσουμε ἕνα διαταρακτικό ὅρο (disturbance term). Ἔτσι τό ὑπόδειγμα γίνεται:

$$C_t = \gamma_{11} + \beta_{11} (Y-T)_t + u_{1t}$$

$$I_t = \gamma_{21} + \gamma_{22} Y_{t-1} + \gamma_{23} r_t + u_{2t}$$

$$Y_t \equiv C_t + I_t + G_t$$

Ἡ προσθήκη τῶν διαταρακτικῶν ὅρων ἄλλαξε τό ὑπόδειγμα ἀπό ντετερμιστικό σέ στοχαστικό ὅσον ἀφορᾶ τίς δυό πρῶτες ἐξισώσεις συμπεριφορᾶς (behaviour equations) τῶν καταναλωτῶν καί τῶν ἐπιχειρηματιῶν. Ἡ τρίτη σχέση εἶναι ταυτότητα (identity).

Τά προβλήματα πού δημιουργοῦνται εἶναι πῶς θά ἐκτιμήσουμε τίς παραμέτρους β_{11}, γ_{ij} τοῦ ὑποδείγματος καί τί ἰδιότητες θέλουμε νά ἔχουν οἱ σχετικές ἐκτιμήσεις (estimates). Γιά ν' ἀντιμετωπίσουμε τά προβλήματα αὐτά χρειάζεται νά κάνουμε ὁρισμένες ὑποθέσεις σχετικά μέ τήν ἀναμενόμενη τιμή (expected value) καί τή διακύμανση (variance) καί τήν συνδυακύμανση (covariance) τῶν διαταρακτικῶν ὅρων. Ἀνάλογα μέ τίς ὑποθέσεις αὐτές θά ἐπιλέξουμε καί τή μέθοδο ἐκτιμήσεως (method of estimation) τῶν παραμέτρων (parameters) τοῦ ὑποδείγματος. Γιά ὁλ'αὐτά καταφεύγουμε στή Θεωρητική Οἰκονομετρία.

Μετά θά πρέπη νά βροῦμε στατιστικά στοιχεῖα πού νά ἀντιστοιχοῦν στούς ὁρισμούς τῶν μεταβλητῶν τοῦ ὑποδείγματος (καί γι'αὐτό ἀκριβῶς τό σκοπό ἡ Οἰκονομετρία χρησιμοποιεῖ τήν Οἰκονομική Στατιστική) καί, χρησιμοποιώντας τό πρόγραμμα (program) ἐκεῖνο πού ἐφαρμόζει τή μέθοδο ἐκτιμήσεως πού ἐπιλέξαμε σέ ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή (computer) θά ἐκτιμήσουμε τίς παραμέτρους β_{11} καί γ_{ij}.

Ἀφοῦ βροῦμε τίς ἀριθμητικές τιμές τῶν παραμέτρων θά πρέπη, πρῶτα ἀπ'ὅλα, νά δοῦμε, ἄν οἱ τιμές αὐτές εἶναι μέσα στά ὅρια πού λέει ἡ Οἰκονομική θεωρία. Μετά, μέ ἐλέγχους τῆς σημαντικότητος (tests of significance) τῶν ἐκτιμήσεων θά δοῦμε ἄν καί κατά πόσον τά δεδομένα ἐπιβεβαιώνουν τά ὅσα διατυπώνονται στό ὑπόδειγμα, στή διαρθρωτική μορφή του (structural form) πού δώσαμε πιό πάνω, σάν θεωρία.

Ἄν τό ὑπόδειγμα εἶναι ἱκανοποιητικό γιά τήν ἐξήγηση τῆς συμπεριφορᾶς τῶν καταναλωτῶν καί τῶν ἐπιχειρηματιῶν στό παρελθόν θά πρέπη νά δοκιμαστῆ στό ἄν καί κατά πόσον ἰσχύει στό μέλλον. Γιά τό σκοπό αὐτό παίρνουμε τήν ἀνηγμένη μορφή (reduced form) τοῦ ὑποδείγματος, δηλαδή παίρνουμε τίς ἐνδογενεῖς μεταβλητές (endogenous variables) C_t, I_t καί Y_t σάν συναρτήσεις τῶν ἐξωγενῶν μεταβλητῶν (exogenous variables) T_t καί G_t καθώς καί τῆς ἐνδογενοῦς μεταβλητῆς Y_t μέ μιά ὑστέρηση (lagged endogenous variable). Μέ ἄλλα λόγια ἔχουμε τίς C_t, I_t καί Y_t σάν συναρτήσεις τῶν προκαθορισμένων μεταβλητῶν (predetermined variables) T_t, G_t, Y_{t-1}. Χρησιμοποιώντας τίς ἐκτιμήσεις τῶν συντελεστῶν πού βρήκαμε καθώς καί δεδομένες τιμές τῶν T_t καί G_t (τήν τιμή τῆς Y_{t-1} τήν ξέρουμε) ὑπολογίζουμε, μέ βάση τήν ἀνηγμένη μορφή τοῦ ὑποδείγματος, τίς προβλέψεις (predictions) γιά τίς C_t, I_t καί Y_t γιά τήν ἑπόμενη περίοδο.

Τό ἑπόμενο στάδιο (βλέπε καί Wold (1969)) εἶναι νά συγκρίνουμε τίς προβλέψεις μέ τίς πραγματικές τιμές πού ἡ οἰκονομία ἔδωσε γιά τό χρόνο στόν ὁποῖο ἀναφέρονται αἱ προβλέψεις. Ἡ σύγκριση αὐτή μπορεῖ νά εἶναι ἱκανοποιητική. Ἄν ὅμως δέν εἶναι, τό ὑπόδειγμα θά πρέπη νά ἐπανεξεταστῆ σχετικά μέ τό ἄν χρειάζωνται μεταβολές στίς διαρθρωτικές ἐξισώσεις καί ἰδιαίτερα στά δυναμικά (dynamic) χαρακτηριστικά τους. Μεταβολές οὕτως ἤ ἄλλως θά χρειαστοῦν διότι μέ τή πάροδο τοῦ χρόνου ἀλλαγές γίνονται τόσο στή δομή (ἤ διάρθρωση) (structure) τῆς οἰκονομίας ὅσο καί στό διεθνές περιβάλλον μέσα στό ὁποῖο λειτουργεῖ ἡ οἰκονομία.

Τέλος πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι τά οἰκονομετρικά ὑποδείγματα μπορεῖ νά χρησιμοποιηθοῦν καί γιά τήν ἐκτίμηση στοιχείων πού λείπουν (Missing Data) (πάνω σ'αὐτό βλέπε καί τά ἄρθρα τῶν Affiti and Elashoff (1967), τοῦ συγγραφέα (1973) καί Sargan καί τοῦ συγγραφέα (1974)).

Ἀπό τό σημεῖο πού προσθέσαμε τούς διαταρακτικούς ὅρους στό ἁπλό μακροοικονομικό ὑπόδειγμα μέχρι καί τή προηγούμενη παράγραφο ἀναφερθήκαμε στίς διαφορές πού ὑπάρχουν ἀνάμεσα στήν Μαθηματική Οἰκονομική καί στήν Οἰκονομετρία.

Σχετικά μέ τίς διαφορές ἀνάμεσα στή Μαθηματική Στατιστική (Mathematical Statistics) καί τήν Οἰκονομετρία ἔγινε λόγος στό προηγούμενο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ. Στό ἄρθρο του (στό ὁποῖο ἀναφερθήκαμε πιό μπροστά) ὁ Wold (1954) δίνει τόν παρακάτω πίνακα, στόν ὁποῖο προσδιορίζεται μέ ἀρκετή σαφήνεια ἡ σχέση τῆς Οἰκονομετρίας μέ τή Στατιστική.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ	Μή πειραματικές	Πειραματικές
Περιγραφή	Παρουσίαση μέ διαγράμματα καί πίνακες Μέσοι, Διασπορά Καμπύλες συχνότητος, συσχέτιση Δειγματοληπτικές μέθοδοι γιά συχνότητες, μέσους Δεῖχτες ΒΔ	Παρουσίαση μέ πίνακες καί διαγράμματα (χρησιμοποιώντας ὁποιαδήποτε ἀπό τίς τεχνικές πού ἀναφέρονται στό ΒΔ τμῆμα τοῦ πίνακα). ΒΑ
Ἐξήγηση	ΝΔ Εἰδικοί κλάδοι ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ 1. Δημογραφία 2. ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ 3. Γενετική 4. Χρονολογικές σειρές	ΝΑ Σχεδιασμός Πειραμάτων Μέθοδοι Τυχαιοποιήσεως Ἔλεγχοι σημαντικότητος γιά μέσους, συχνότητες, κλπ. Ἀνάλυση Παλινδρομήσεως Ἀνάλυση Διακυμάνσεως

Σχετικά μέ τά (πιό ἐνδιαφέροντα) ΝΔ καί ΝΑ τμήματα τοῦ πίνακα αὐτοῦ ὁ Wold παρατηρεῖ ὅτι (καί αὐτό τό ἐπαναλαμβάνουν ὅλα σχεδόν τά ἐγχειρίδια τῆς Οἰκονομετρίας) στίς πειραματικές (experimental) ἐπιστῆμες ὁ ἐρευνητής ἔχει κάτω ἀπό τόν ἔλεγχό του τίς μεταβλητές πού θεωρεῖ σάν αἰτίες (causes) ἑνός φαινομένου κι᾽ἔτσι μπορεῖ καί πετυχαίνει τήν ἐξουδετέρωση τῶν διαταρακτικῶν ὅρων μέ τήν τυχαιοποίηση (randomnisation) ἐξασφαλίζοντας, μέ τόν τρόπο αὐτό, τήν ἀνεξαρτησία (independence) τῶν αἰτιῶν ἀπό τούς διαταρακτικούς ὅρους, ὁπότε ἡ ἐφαρμογή τῆς παλινδρομήσεως εἶναι θέμα πιά ρουτίνας. Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν ἀνάλυση τῆς διακυμάνσεως.

Στίς μή πειραματικές (non-experimental) ὅμως ἐπιστῆμες ὁ ἐρευνητής δέν μπορεῖ νά ἐξασφαλίση τίς προϋποθέσεις τοῦ πειράματος. Καί ὅταν ἀκόμα ἔχουμε ἕνα τυχαῖο δεῖγμα καί πάλι, ἐπειδή ἄν χρησιμοποιοῦμε ~~μιά~~ ἑρμηνευτική μεταβλητή (explanatory variable), ἡ μεταβλητή αὐτή μπορεῖ νά συσχετίζεται μέ ἄλλους παράγοντες. Ἔτσι δέν μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἔχουμε μιά σχέση αἰτίου - αἰτιατοῦ (cause-effect) ἀνάμεσα στήν ἑρμηνευτική (ἤ ἀνεξάρτητη (independent)) καί τήν ἐξαρτημένη (dependent), μεταβλητή. Γι'αὐτό τό λόγο στήν Οἰκονομετρία ἔχει μεγάλη σημασία ἡ ἐξειδίκευση (specification) τοῦ ὑποδείγματος.

Συνέπεια τῶν παραπάνω παρατηρήσεων εἶναι ὅτι ὁ ἔλεγχος τῆς σημαντικότητος τῶν ἀποτελεσμάτων ἔχει μικρότερη σημασία ἀπό τήν ἱκανότητα τοῦ ὑποδείγματος γιά τήν πρόβλεψη στό μέλλον. Γιά νά ὑπάρξη ἐπιτυχία στόν τομέα αὐτό χρειάζεται συντονισμός ἀνάμεσα στή Μαθηματική Στατιστική καί στά ειδικά προβλήματα τοῦ κλάδου καί αὐτός ἀκριβῶς ὁ συντονισμός ἔχει δημιουργήση αὐτό πού ἀποκαλέσαμε Θεωρητική Οἰκονομετρία, Οἰκονομετρική Θεωρία ἤ Οἰκονομετρικές Μεθόδους. Ἡ διαφοροποίηση ἀνάμεσα στή Μαθηματική Στατιστική καί στήν Οἰκονομετρία συνοψίζεται ὡς ἑξῆς ἀπό τόν Malinvaud (1966), σελ. VII

"Οἱ στατιστικές μέθοδοι πού χρησιμοποιοῦνται στήν Οἰκονομετρία ἔχουν, κατ'ἀρχήν, μιά κοινή βάση μέ ἐκεῖνες πού χρησιμοποιοῦνται σέ ἄλλους τομεῖς. Ἔχουν ὅμως ειδικά χαρακτηριστικά πού ἔχουν σχέση μέ τά ειδικά προβλήματα πού ὑπάρχουν στήν Οἰκονομική Ἐπιστήμη".

IV. Χρησιμότητα καὶ Ὅρια τῆς Οἰκονομετρίας

Πρίν ἀπό 34 χρόνια ὁ Davis (1941) παράθετε τά λόγια τοῦ Lord Kelvin (1889) σελ. 73

"Πολλές φορές έπαναλαμβάνω ὅτι ἄν μπορῆς νά μετρήσης αὐτό γιά τό ὁποῖο μιλᾶς καί νά τό ἐκφράσης σέ ἀριθμούς τότε κάτι ξέρεις γι'αὐτό. Ὅταν ὅμως δέν μπορεῖς νά τό μετρήσης καί δέν μπορεῖς νά τό δώσης σέ ἀριθμούς τότε ἡ γνώση σου εἶναι πολύ ἰσχνή καί κάθε ἄλλο παρά ἱκανοποιητική"

καί πρόσθετε ὅτι ἡ Οἰκονομετρία βοηθᾶ στό νά δώσουμε κάποιες ἀριθμητικές τιμές στίς σχέσεις γιά τίς ὁποῖες μιλᾶμε.

Δέν ὑπάρχει ἀμφιβολία πώς ἡ Οἰκονομετρία, στό διάστημα πού μεσολάβησε, πολλά πρόσφερε πρός τήν κατεύθυνση αὐτή οὕτως ὥστε, ὅπως γράφει ὁ Darmois (1952) σελ. 15

"Εἶναι ἐπιπόλαιο νά μή χρησιμοποιῆ κανείς τή νέα αὐτή τεχνική πού ἀντιπροσωπεύει ἡ Οἰκονομετρία καί νά δίνη τήν ἐντύπωση ὅτι οἱ οἰκονομολόγοι ἔρχονται σέ ἀντίθεση μέ τούς οἰκονομέτρες".

Πραγματικά οἱ οἰκονομολόγοι πολύ χρησιμοποίησαν καί χρησιμοποιοῦν στίς ἔρευνές τους τήν Οἰκονομετρία καί αὐτό ἀποδεικνύεται ἀπό μιά πρόχειρη ματιά σ'ὅλα τά οἰκονομικά ἐπιστημονικά περιοδικά τοῦ κόσμου. Ἐπιπλέον πολλές κυβερνήσεις καί μεγάλες ἐπιχειρήσεις χρησιμοποιοῦν οἰκονομετρικά ὑποδείγματα γιά θέματα οἰκονομικῆς πολιτικῆς καί προβλέψεων.

Ὅσο ἀναπτύσσονται καί συντονίζονται ἡ Μαθηματική Οἰκονομική, ἡ Οἰκονομική Στατιστική καί ἡ Θεωρητική Οἰκονομετρία τόσο μεγαλύτερη θά εἶναι ἡ συμβολή τῆς Ἐφαρμοσμένης Οἰκονομετρίας στήν Οἰκονομική Ἐπιστήμη καί τήν Οἰκονομική Πολιτική.

Παράλληλα ὅμως δέν θά πρέπη νά παραβλέπωνται καί τά ὅρια πού ὑπάρχουν στίς δυνατότητες τῆς Οἰκονομετρίας καί τῶν οἰκονομετρῶν. Γιά τήν πρώτη ὁ Mitchell (1937), σελ. 23 ἔγραφε

"Δέν ὑπάρχουν πολλές ἐλπίδες ὅτι ἡ ποσοτική ἀνάλυση θά μπορέση ποτέ νά λύση τά προβλήματα πού ἔχει θέσει ἡ ποιοτική ἀνάλυση, στή σημερινή μορφή τους. Αὐτό πού μποροῦμε νά προσδοκοῦμε εἶναι τό νά τεθοῦν τά προβλήματα μέ μιά καινούργια μορφή οὕτως ὥστε νά εἶναι δυνατή ἡ ἐφαρμογή στατιστικῶν μεθόδων σ'αὐτά".

Ἴσως αὐτή ἡ πρόβλεψη νά ἦταν πολύ ἀπαισιόδοξη ἄν κρίνη κανείς ἀπό τήν ἐπιτυχία πού ἀναφέρεται γιά τά μακροοικονομικά ὑποδείγματα ἀπό τόν Wold κ.ἄ. (1967). Ἀπό τήν ἄλλη μεριά ὅμως δέν θά πρέπη νά ξεχνᾶμε ὅτι ἡ ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων ἑνός ὑποδείγματος καί ἡ χρησιμοποίησή του γιά προβλέψεις καί οἰκονομική πολιτική βασίζονται στήν ὑπόθεση (ἄν τό ὑπόδειγμα ἦταν ἱκανοποιητικό) ὅτι οἱ τάσεις καί οἱ σχέσεις πού ἴσχυσαν στό παρελθόν καί πού συνοψίζονται στό ὑπόδειγμα θά ἐξακολουθήσουν νά ἰσχύουν καί στό μέλλον (Wold (1969)). Δηλαδή ὑποθέτουμε ὅτι ἡ δομή μιᾶς οἰκονομίας ἤ ἑνός περιβάλλοντος θά παραμείνη, βασικά, ἡ ἴδια. Τό πράγμα ὅμως ἀλλάζει ἄν εἴτε ἡ δομή ἀρχίζη νά μεταβάλλεται γρήγορα εἴτε, ὅπως παρατηρεῖ ὁ Marschack στό πρόλογο τοῦ βιβλίου τοῦ Christ (1966), ἡ οἰκονομική πολιτική ἀποβλέπει στήν ἀλλαγή τῶν μηχανισμῶν ἤ τοῦ περιβάλλοντος πού ἐπηρεάζει τίς οἰκονομικές μεταβλητές. Καί στίς δυό περιπτώσεις προβλέψεις μέ χρήση ὑποδειγμάτων πού ἴσχυαν κάτω ἀπό διαφορετικές συνθῆκες εἶναι δύσκολες ἄν ὄχι ἀδύνατες.

Ἐκτός ἀπό τά προβλήματα αὐτά ὑπάρχουν καί ἄλλα στά ὁποῖα ἀναφέρονται οἱ Duesenberry κ.ἄ. (1969) στήν περίπτωση μεγάλων οἰκονομετρικῶν ὑποδειγμάτων. Στά ὑποδείγματα αὐτά εἶναι δύσκολο νά εἶναι κανείς βέβαιος γιά τίς ἀκριβεῖς σχέσεις πού ὑπάρχουν ἀνάμεσα στίς πολλές ἐξαρτημένες μεταβλητές.

Φυσικά δέν θά πρέπη νά λησμονοῦμε ὅτι ὑπάρχουν, ὅπως μᾶς ὑπενθυμίζει ὁ Theil (1971) κεφ. 12, πάρα πολλά ἄλυτα προβλήματα στή Θεωρητική Οἰκονομετρία καί αὐτό προσθέτει καί ἄλλους περιορισμούς στίς δυνατότητες τῆς Οἰκονομετρίας.

Τέλος περιορισμοί ὑπάρχουν τόσο ἀπό τή πλευρά τῆς ὑπάρξεως τῶν κατάλληλων στοιχείων πού θά χρησιμοποιηθοῦν στήν ἐκτίμηση τῶν οἰκονομικῶν ὑποδειγμάτων, ὅσο καί ἀπό τήν πλευρά τῶν προγραμμάτων καί τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν πού χρειάζονται γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῶν ὑποδειγμάτων μέ τίς κατάλληλες μεθόδους (καί ὅταν ἀκόμα ὑπάρχουν τά ἀπαραίτητα στοιχεῖα).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

1. Εισαγωγὴ

Τό Κλασσικό Γραμμικό Ὑπόδειγμα (Classical Linear Model) χρησιμοποιήθηκε καί ἴσως νά ἐξακολουθήση νά χρησιμοποιῆται γιά πολύν καιρό ἀκόμα (βλέπε Klein (1960)) στήν Οἰκονομετρία παρά τίς (πολλές φορές) μή ρεαλιστικές ὑποθέσεις στίς ὁποῖες βασίζεται. Τό ὑπόδειγμα αὐτό, ὅπως ἀναφέρει ὁ Wold(1954),πρωτοχρησιμοποιήθηκε στίς φυσικές ἐπιστῆμες ὅπου τό πείραμα εἶναι δυνατό. Οἱ λόγοι πού ἀναφέραμε στήν εἰσαγωγή (τό ἀδύνατον τοῦ πειράματος καί οἱ ἀλληλεξαρτήσεις πού ὑπάρχουν) περιορίζουν σημαντικά τή χρησιμότητα τοῦ κλασσικοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος στήν ἐξήγηση τῶν οἰκονομικῶν καί τῶν ἄλλων κοινωνικῶν φαινομένων. Παρ' ὅλ'αὐτά θεωροῦμε ὅτι ἡ παρουσίαση καί ἡ ἀνάλυση τοῦ ὑποδείγματος αὐτοῦ εἶναι χρήσιμη, πρῶτα διότι ἐκεῖνοι πού τό χρησιμοποιοῦν (οἰκονομολόγοι, κοινωνιολόγοι, ψυχολόγοι ἤ ἐρευνητές σέ ἄλλους κλάδους τῶν κοινωνικῶν ἐπιστημῶν) θά πρέπη νά γνωρίζουν τά ὅρια μέσα στά ὁποῖα εἶναι ἐπιτρεπτή ἡ χρήση του καί διότι ἡ κατανόηση τῆς βασικῆς θεωρίας γύρω ἀπό τό ὑπόδειγμα αὐτό καί τούς στατιστικούς ἐλέγχους τῶν παραμέτρων του ἀποτελοῦν μιά καλή εἰσαγωγή στά ὑπόλοιπα θέματα τά ὁποῖα καλύπτει ὁ τόμος αὐτός.

Στό Κεφάλαιο αὐτό δίνουμε τό Κλασσικό Γραμμικό Ὑπόδειγμα σάν τό γραμμικό τμῆμα μιᾶς σειρᾶς τοῦ Taylor ,τίς βασικές ὑποθέσεις, τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων του (χωρίς καί μέ δεσμούς) μέ τή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καί τίς ἰδιότητες τῶν ἐκτιμητῶν πού δίνει ἡ μέθοδος αὐτή.

II. Τὸ Κλασσικὸ Γραμμικὸ Ὑπόδειγμα σὰν τὸ Γραμμικὸ Τμῆμα μιᾶς Σειρᾶς τοῦ Taylor

Στίς περισσότερες περιπτώσεις γιά τίς σχέσεις μέ τίς ὁποῖες ἀσχολοῦνται οἱ οἰκονομολόγοι (συναρτήσεις ζητήσεως, παραγωγῆς, καταναλώσεως κλπ.), ἡ οἰκονομική θεωρία δέν μπορεῖ νά προσδιορίση μιά συγκεκριμένη ἀλγεβρική μορφή. Γιά τό λόγο αὐτό ξεκινοῦμε μέ μιά συνάρτηση γενικῆς μορφῆς ὅπως ὁ Cramer (1971).

Πρίν προχωρήσουμε, εἶναι σκόπιμο νά κάνουμε μερικές διευκρινιστικές παρατηρήσεις σχετικά μέ τό συμβολισμό. Στό βιβλίο τοῦτο θ'ἀκολουθήσουμε τό συμβολισμό πού υἱοθετήσαμε στή Γραμμική Ἄλγεβρα (1975) (Γ.Α. ἀπ'ἐδῶ κι'ἐμπρός). Οἱ μεταβλητές θά ἀναφέρωνται σέ χρονολογικές σειρές καί γι'αὐτό οἱ δεῖχτες θά εἶναι t. Ἡ ἀνάλυση ὅμως, μέ μιά ἁπλή ἀντικατάσταση τοῦ δείχτη t μέ ἕνα δείχτη i, μπορεῖ νά ἐφαρμοστῆ ἐξίσου καί σέ διαστρωματικά στοιχεῖα. Σέ ἀντίθεση μέ πολλά συγγράμματα (ὅπως π.χ. Johnston (1972) καί Rowley (1973)) ἡ σειρά τῶν δειχτῶν στό κάθε στοιχεῖο τῆς μήτρας θά εἶναι ἡ φυσική (ὅπως π.χ. στόν Dhrymes (1970))δηλαδή οἱ δεῖχτες θά ἀναφέρωνται στίς γραμμές καί τίς στῆλες ὅπως ἐμφανίζονται στή μήτρα. Οἱ συναρτήσεις καί οἱ διάφορες σχέσεις θά ἀριθμοῦνται μέ δυό ἀριθμούς:ὁ πρῶτος θά ἀναφέρεται στό κεφάλαιο καί ὁ δεύτερος στή σχέση. Τέλος, ὅπως εἶναι συνήθεια στά μαθηματικά, ἡ ἐξαρτημένη μεταβλητή θά συμβολίζεται μέ y καί οἱ ἀνεξάρτητες ἤ ἑρμηνευτικές μεταβλητές μέ x_j.

Ἔχοντας ὑπόψη τίς διευκρινήσεις αὐτές ἡ γενική συνάρτηση μέ τήν ὁποία ξεκινοῦμε μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς

$$y = f(x^{*\prime}) \tag{2.1}$$

ὅπου

$$x^{*\prime} = (x_1, x_2, \ldots, x_r) \tag{2.2}$$

καί

$$r = (n-1) + m + k \qquad (2.3)$$

Ἄν συμβολίσουμε τίς παρατηρήσεις πάνω στίς μεταβλητές μέ y_t καί $x^*_{t.}$, ὅπου

$$x^*_{t.} = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tr}), \quad t = 1, \ldots, T \qquad (2.4)$$

καί ὑποθέσουμε ὅτι γιά ὅλες τίς παρατηρήσεις ἰσχύει ἡ συνάρτηση (2.1) τότε

$$y_t = f(x^*_{t.}) \qquad (2.5)$$

Τώρα θέλουμε νά ἀντικαταστήσουμε τή δεξιά πλευρά τῆς (2.5) μέ μιά σειρά τοῦ Taylor (Taylor Series) γύρω ἀπό τό σημεῖο

$$y_o, \quad \bar{x}^{*\prime} \qquad (2.6)$$

ὅπου

$$\bar{x}^{*\prime} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r), \qquad (2.7)$$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_{tj} \quad ; \quad j = 1, \ldots, r \qquad (2.8)$$

καί

$$y_o = f(\bar{x}^{*\prime}) \qquad (2.9)$$

Ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Taylor (βλέπε Στεριώτη (1973) σελ. 16, Courant (1936) σελ. 80, Goldberger (1964)σελ.41, καί Γ.Α. Κεφάλαιο 6) ἔχουμε:

$$y_t = y_o + \frac{\partial f}{\partial x^{*\prime}} (x^*_{t.} - \bar{x}^{*\prime})' + \frac{1}{2!} (x^*_{t.} - \bar{x}^{*\prime}) H (x^*_{t.} - \bar{x}^{*\prime})' + \cdots \qquad (2.10)$$

ὅπου: $$\frac{\partial f}{\partial x^{*\prime}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}\right) \tag{2.11}$$

καί

$$H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^* \partial x^{*\prime}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_r^2} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Χρησιμοποιώντας τό συμβολισμό τῶν ἀθροισμάτων ἡ (2.10) γράφεται ὡς ἑξῆς

$$y_t = y_o + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{tj} - \bar{x}_j) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_{ti} - \bar{x}_i)(x_{tj} - \bar{x}_j) + \ldots \tag{2.13}$$

Ἄν τώρα, στό δεῖγμα τῶν παρατηρήσεων πού ἔχουμε, ὁρισμένες ἀπό τίς μεταβλητές, ἅς ποῦμε k, παραμένουν σταθερές (ἅς ποῦμε $x_{tj} = \bar{x}_j$; $t = 1, \ldots, T$) τότε οἱ ὅροι $x_{tj} - \bar{x}_j$ ἀπό $j = (n-1)+m+1$, μέχρι $j = r$ θά εἶναι ἴσοι μέ τό μηδέν. Ἐπιπλέον στήν Οἰκονομική Θεωρία δέν ἐνδιαφέρουν ὅλες οἱ μεταβλητές ἀλλά (βλέπε Wicksteed (1914)), ἅς ποῦμε, μόνο n-1 ἀπ'αὐτές. Παραλείποντας, ἑπομένως, καί τίς m ἄσχετες μεταβλητές τά ἀθροίσματα πού ἀπομένουν θά εἶναι ἀπό j = 2 μέχρι j = n. Ἄν ἐπιπλέον ὑποθέσουμε (καί αὐτή εἶναι μιά ἀπό τίς βασικές ὑποθέσεις τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος) ὅτι οἱ διαφορές

$$x_{ti} - \bar{x}_i \quad \text{καί} \quad x_{tj} - \bar{x}_j$$

εἶναι μικρές καί, ἑπομένως, τά γινόμενα

$$(x_{ti} - \bar{x}_i)\,(x_{tj} - \bar{x}_j), \qquad i,j = 2,3,\ldots,n.$$

εἶναι πολύ μικρά καί, κατά συνέπεια, μποροῦμε νά παραλείψουμε τό δεύτερο ὅρο τῆς δεξιᾶς πλευρᾶς τῆς (2.13), μᾶς ἀπομένει τελικά ἡ σχέση (μέ τίς ἀνεξάρτητες μεταβλητές)

$$y_t = y_o + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_{tj} - \bar{x}_j) + u_t \tag{2.14}$$

ὅπου ὁ διαταρακτικός ὅρος u_t ἀντιπροσωπεύει, ἀνάμεσα στά ἄλλα, καί τήν ἐπίδραση τῶν m μεταβλητῶν πού παραλείψαμε διότι τίς θεωροῦμε, ἀπό ἄποψη οἰκονομικῆς θεωρίας, ἄσχετες. Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξεως στήν(2.13)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$j = 1,\ldots,n-1$ καί $i = (n-1)+1,\ldots,(n-1)+m$ εἶναι μηδέν, δηλαδή ὑποθέτουμε (καί αὐτή εἶναι μιά ἄλλη βασική ὑπόθεση τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος) ὅτι οἱ παραλειπόμενες μεταβλητές πού συνοψίζονται στό διαταρακτικό ὅρο u_t εἶναι **ἀσυσχέτιστες (uncorrelated)** μέ τίς μεταβλητές πού τελικά ἀπομένουν στό ὑπόδειγμα.

Ἡ σχέση (2.14) μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$y_t = y_o - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{x}_j + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} x_{tj} + u_t \tag{2.15}$$

Ἐφόσον οἱ μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ γιά τίς n-1 μεταβλητές ὑπολογίζονται γύρω ἀπό τό σημεῖο (2.6), ἕπεται ὅτι εἶναι οἱ ἴδιες γιά $t = 1,\ldots,T$ καί, ἑπομένως, μποροῦμε νά τίς ἀντικαταστήσουμε στήν (2.15) μέ τίς σταθερές

$$\beta_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}\,; \qquad j = 2,\ldots,n \tag{2.16}$$

Ἄν, ἐπιπλέον, συμβολίσουμε, μέ

$$\beta_1 = y_o - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \bar{x}_j = y_o - \sum_{j=2}^{n} \beta_j \bar{x}_j \qquad (2.17)$$

καί ἀντικαταστήσουμε τίς (2.16) καί (2.17) στήν (2.15) ἔχουμε:

$$y_t = \beta_1 + \sum_{j=2}^{n} \beta_j x_{tj} + u_t \qquad (2.18)$$

Τέλος ἄν ορίσουμε μιά μεταβλητή

$$x_{t1} \equiv 1 \quad , \quad t = 1,\ldots,T \qquad (2.19)$$

τότε ἡ (2.18) γράφεται ὡς ἑξῆς

$$y_t = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{tj} + u_t \qquad (2.20)$$

Ἄν θελήσουμε νά χρησιμοποιήσουμε διανύσματα καί θέσουμε

$$\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \qquad (2.21)$$

καί

$$\mathbf{x}_{t.} = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tn}) \qquad (2.22)$$

τότε μποροῦμε νά γράψουμε τή (2.20) μέ τό συμβολισμό τῶν διανυσμάτων, ὡς ἑξῆς:

$$y_t = \mathbf{x}_{t.}\boldsymbol{\beta} + u_t \qquad (2.23)$$

Αὐτό εἶναι τό γενικό γραμμικό ὑπόδειγμα μέ τό ὁποῖο (ἔχοντας ὑπόψη τίς ἐπιφυλάξεις πού διατυπώσαμε στήν εἰσαγωγή) θ'ἀσχοληθοῦμε σέ τοῦτο καί τό ἑπόμενο κεφάλαιο. Τό ὑπόδειγμα (2.23) μπορεῖ νά ἀφορᾶ ὁποιαδήποτε ἀπό τίς συναρτήσεις πού ἀναφέραμε στήν ἀρχή τοῦ τμήματος αὐτοῦ ἤ ὁποιαδήποτε ἄλλη συναρτησιακή σχέση.

Γι'αὐτό δέν τό συνδέουμε μέ κανένα συγκεκριμένο τμῆμα τῆς Οἰκονομικῆς Θεωρίας.

III. Οἱ βασικὲς Ὑποθέσεις

Ἀναφέραμε στό προηγούμενο τμῆμα ὅτι ἔχουμε παρατηρήσεις γιά T περιόδους. Κατά συνέπεια ἡ σχέση (2.23) ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει γιά T περιόδους. Οἱ παρατηρήσεις πού ἔχουμε ἀφοροῦν τίς μεταβλητές y_t καί x_{tj}, $j = 1,\dots,n$. Οἱ παράμετροι β_j καθώς καί οἱ παράμετροι τῆς κατανομῆς τῶν u_t, $t = 1,\dots,T$ εἶναι ἄγνωστοι.

Ἄν θέσουμε

$$y' = (y_1, y_2, \dots, y_T) \tag{2.24}$$

καί

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} & \dots & x_{Tn} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{T2} & \dots & x_{Tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1\cdot} \\ x_{2\cdot} \\ \vdots \\ x_{T\cdot} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Τότε μποροῦμε νά γράφουμε τήν (2.23) γιά ὅλες τίς περιόδους $t = 1,\dots,T$ ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{y} = X\beta + \mathbf{u} \tag{2.26}$$

Γιά νά μπορέσουμε νά προχωρήσουμε στήν ἐκτίμηση τῶν ἀγνώστων παραμέτρων τοῦ ὑποδείγματος (2.26) θά πρέπη νά κάνουμε ὁρισμένες ὑποθέσεις ὡς πρός τό πῶς προῆλθαν οἱ παρατηρήσεις πού ἔχουμε ($\mathbf{y}$:X). Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ μήτρα X παραμένει σταθερή σέ επαναλαμβανόμενα δείγματα (repeated samples) (μιά υπόθεση, βλέπε όμως καί παρατήρηση (γ) πιό κάτω, πού διευκολύνει τήν παρουσίαση τῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων) τότε οἱ μεταβολές τοῦ διανύσματος y ὀφείλονται, σέ κάθε δεῖγμα, ἀποκλειστικά στίς μεταβολές τοῦ διανύσματος τῶν διαταρακτικῶν ὅρων u. Οἱ ἰδιότητες ἐπομένως τῶν ἐκτιμητῶν τῶν παραμέτρων πού θά βροῦμε ἐξαρτιοῦνται ἀπό τίς ὑποθέσεις πού κάνουμε σχετικά μέ τό διάνυσμα u.

Πρίν προχωρήσουμε στίς ὑποθέσεις πού γίνονται συνήθως γιά τούς διαταρακτικούς ὅρους χρειάζεται νά κάνουμε μερικές συμπληρώσεις πάνω στά ὅσα ἀναφέρθηκαν γιά τούς ὅρους αὐτούς στό προηγούμενο τμῆμα αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου.

(α) Οἱ διαταρακτικοί ὅροι, ἐκτός ἀπό τίς ἐπιδράσεις τῶν m ἄσχετων μεταβλητῶν πού παραλείφτηκαν μπορεῖ ν'ἀντιπροσωπεύουν καί ἐπιδράσεις σχετικῶν μεταβλητῶν πού δέν περιλαμβάνονται στίς n-1 μεταβλητές τοῦ ὑποδείγματος (2.18). Οἱ ἐπιδράσεις ὅλων τῶν μεταβλητῶν πού δέν περιλαμβάνονται στό ὑπόδειγμα μπορεῖ νά εἶναι μικρές. Μπορεῖ ὅμως νά εἶναι καί μεγάλες (βλέπε Klein (1962) σελ. 29-31). Ἐφόσον δέν μποροῦμε νά τίς ἐντοπίσουμε (καί γι'αὐτό περιλαμβάνονται στούς διαταρακτικούς ὅρους u_t) αὐτό πού ἔχει σημασία εἶναι ὅτι οἱ διαταρακτικοί ὅροι θά πρέπη νά εἶναι πραγματικά τυχαῖες μεταβλητές (random variables). Τήν κατανομή ὅμως τῶν u_t μποροῦμε νά τήν ἀφήσουμε ἀπροσδιόριστη.

(β) Ἐκτός ἀπό τήν ἐπίδραση τῶν μεταβλητῶν πού παραλείφτηκαν οἱ u_t μπορεῖ, στήν περίπτωση μικροοικονομικῶν σχέσεων, νά περιλαμβάνουν καί στοιχεῖα πού ἀφοροῦν τό μή ντετερμινιστικό μέρος τῆς συμπεριφορᾶς τῶν ἀτόμων. Τό στοιχεῖο αὐτό ὑπάρχει καί ὅταν ἀκόμα οἱ n-1 μεταβλητές πού περιλαμβάνονται στό ὑπόδειγμα εἶναι τό σύνολο τῶν μεταβλητῶν πού ἐπηρεάζουν τήν ἐξαρτημένη μεταβλητή (βλέπε Goldberger (1964) σελ. 3).

(γ) Στό κεφάλαιο αὐτό θά ὑποθέσουμε ὅτι οἱ παρατηρήσεις στά διανύσματα $x_{t.}$ δέν περιέχουν σφάλματα στή μέτρηση τῶν μεταβλητῶν x_{tj}, $j = 2,...,n$. Στήν πράξη ὅμως (βλέπε Johnston (1972) σελ. 11) οἱ x_{tj} περιλαμβάνουν καί σφάλματα μετρήσεως (measurement errors). Στήν περίπτωση αὐτή οἱ διαταρακτικοί ὅροι περιλαμβάνουν καί τά σφάλματα αὐτά. (Μ' αὐτά ἀσχολούμαστε σέ ἄλλο τόμο).

Μετά τίς παρατηρήσεις αὐτές παραθέτουμε τώρα τίς βασικές ὑποθέσεις πού γίνονται συνήθως γιά τή μήτρα X καί τό διάνυσμα u στή (2.26).

(i) $|x_{tj}| < \chi$

Ἡ ὑπόθεση αὐτή σημαίνει ὅτι ἡ τιμή ὅλων τῶν $|x_{tj}|$ δέν αὐξάνει ἀπεριόριστα ὅσο αὐξάνει τό t. Εἶναι, δηλαδή ὁμοιόμορφα περατωμένες (uniformly bounded).

(ii) X εἶναι σταθερή (fixed) σέ ἐπαναλαμβανόμενα δείγματα.

Ἡ ὑπόθεση αὐτή δέν σημαίνει ὅτι $x_{tj} = x_{tk}$, $k \neq j$ γιά $t = 1,...,T$ διότι τότε δέν ἐκπληρώνεται ἡ ἑπόμενη ὑπόθεση.

(iii) $r(X) = n < T$.

δηλαδή ἡ μήτρα X ἔχει πλήρη βαθμό (fullrank), ἴσο μέ n, καί τό n (ὁ ἀριθμός τῶν μεταβλητῶν πού εἶναι καί ὁ ἀριθμός τῶν συντελεστῶν β_j πού θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε) εἶναι μικρότερος ἀπό τόν ἀριθμό τῶν παρατηρήσεων πού ἔχουμε (T).

Ἡ ὑπόθεση αὐτή σημαίνει ὅτι ὁ βαθμός τῆς μήτρας $X'X$ εἶναι ἐπίσης n καί, ἀφοῦ ἡ μήτρα αὐτή εἶναι $n \times n$, $\det(X'X) \neq 0$. Ἄρα ἡ $(X'X)^{-1}$ ὑπάρχει καί αὐτό ἀποτελεῖ βασικό ὅρο γιά τήν εὕρεση τῶν ἐκτιμητῶν τῶν παραμέτρων. Ἐφόσον $r(X) = n$ καί ἀφοῦ οἱ στῆλες τῆς μήτρας X εἶναι n, καμιά ἀπό τίς στῆλες αὐτές δέν εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένη ἀπό τίς ἄλλες. Τέλος $r < T$ διότι σέ ὁποιουσδήποτε ἐλέγχους σημαντικότητος ἤ ὑποθέσεων (tests of significance or hypotheses) χρειαζόμαστε ὁρισμένους βαθμούς ἐλευθερίας (degrees of freedom)

(iv) $E(u) = o$

Ἀναλυτικότερα ἡ ὑπόθεση αὐτή γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$E(u) = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = o$$

δηλαδή ἡ ἀναμενόμενη τιμή [ἤ μέσος (mean)] τοῦ διανύσματος u εἶναι ἴση μέ τό μηδενικό διάνυσμα. Ἡ ὑπόθεση αὐτή δικαιολογεῖται ἀπό τό γεγονός ὅτι στό ὑπόδειγμά μας ὑπάρχει καί ἡ παράμετρος β_1 καί στή περίπτωση πού δέν κάνουμε τήν ὑπόθεση (iv) γιά τό μέσο δέν θά μπορέσουμε νά τόν διακρίνουμε ἀπό τήν ἐκτίμηση τοῦ β_1.

(v) $E(uu') = \sigma^2 I$

Ἀναλυτικότερα ἡ ὑπόθεση μπορεῖ νά γραφτῆ μέ δυό τρόπους, εἴτε

$$E(u_t u_s) = \delta_{ts}\sigma^2$$

δηλαδή

$$E(u_t^2) = \sigma^2 \quad \text{καί} \quad E(u_t u_s) = 0, \quad s \neq t$$

ἤ ἀκόμα πιό ἀναλυτικά

$$E(uu') = E\left[\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_T \end{bmatrix}(u_1, u_2 \ldots u_T)\right] = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2)\ldots E(u_1u_T) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) \quad \ldots E(u_2u_T) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ E(u_Tu_1) & E(u_Tu_2)\ldots E(u_T^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \ldots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Ἡ ὑπόθεση αὐτή σημαίνει ὅτι ἔχουμε ὁμοσκεδαστικότητα (homoskedasticity), δηλαδή ἡ διακύμανση τῶν διαταρακτικῶν ὅρων εἶναι ἡ ἴδια σέ ὅλες τίς περιόδους καί ὅτι δέν ὑπάρχει αὐτοσυσχέτιση (autocorrelation) ἀνάμεσα στούς διαταρακτικούς ὅρους τῶν διαφόρων περιόδων.

IV. Ἡ Μέθοδος τῶν Ἐλαχίστων Τετραγώνων

Ἄν συμβολίσουμε τούς ἐκτιμητές τῶν β_j μέ b_j, $j = 1,\ldots,n$ (καί αὐτό θά γίνεται σέ ὅσες περιπτώσεις ὑπάρχουν λατινικά γράμματα ἀντίστοιχα μέ τά ἑλληνικά) καί θέσουμε

$$b' = (b_1, b_2,\ldots,b_n) \tag{2.27}$$

καί ορίσουμε τά κατάλοιπα (residuals) ὡς ἑξῆς:

$$\hat{u}_t = y_t - x_{t.}b = y_t - \sum_{j=1}^{n} b_j x_{tj} \tag{2.28}$$

καί θέσουμε

$$\hat{u}' = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_T) \tag{2.29}$$

καί έπομένως

$$\hat{u} = y - Xb \tag{2.30}$$

Τότε ή μέθοδος τῶν Ἐλαχίστων Τετραγώνων (Least Squares) ἀποσκοπεῖ στήν ἐλαχιστοποίηση τοῦ ἀθροίσματος

$$\varphi = \hat{u}'\hat{u} = \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \sum_{j=1}^{n} b_j x_{tj})^2 \tag{2.31}$$

δηλαδή στήν ἐλαχιστοποίηση τῶν τετραγώνων τῶν καταλοίπων.

Ἀντικαθιστώντας τήν (2.30) στή (2.31) ἔχουμε

$$\begin{aligned} \varphi = \hat{u}'\hat{u} &= (y-Xb)'(y-Xb) = (y'-b'X')(y-Xb) = \\ &= y'y - b'X'y - y'Xb + b'X'Xb \\ &= y'y - 2b'X'y + b'X'Xb \end{aligned} \tag{2.32}$$

ἀφοῦ $b'X'y = y'Xb$.

Γιά νά βροῦμε γιά ποιές τιμές τοῦ b ή (2.32) δίνει ἐλάχιστο θά πρέπη νά παραγωγίσουμε τήν φ ὡς πρός b καί νά ἐξισώσουμε τό ἀποτέλεσμα μέ τό μηδενικό διάνυσμα, δηλαδή (βλέπε Γ.Α.σελ. 176-177)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = -2X'y + 2X'Xb = 0 \tag{2.33}$$

Ἡ (2.33) δίνει τίς κανονικές ἐξισώσεις (normal equations)

$$(X'X)b = X'y \tag{2.34}$$

Ἐφόσον, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση (iii) ὁ βαθμός τῆς μήτρας X εἶναι n ἡ X'X εἶναι μή ἰδιάζουσα. Πολλαπλασιάζοντας τήν (2.34) μέ $(X'X)^{-1}$ ἀπό τά ἀριστερά, ἔχουμε

$$b = (X'X)^{-1} X'Y \tag{2.35}$$

Ἡ (2.35) εἶναι ὁ **ἐκτιμητής** (estimator) τοῦ διανύσματος β πού προκύπτει ἀπό τή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Γιά νά δοῦμε ἄν ἔχουμε ἐλάχιστο παίρνουμε τήν παράγωγο δεύτερης τάξεως τῆς φ ὡς πρός b, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b \partial b'} = \frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right) = \frac{\partial}{\partial b'}(-2X'y + 2X'Xb) = 2X'X \tag{2.36}$$

Ἐφόσον (βλέπε Γ.Α.σελ.133) ἡ X'X εἶναι θετικά ὁρισμένη ἕπεται ὅτι ἡ (2.35) δίνει ἐλάχιστο.

Ἡ παράμετρος σ^2 εἶναι ἄγνωστη, ὅπως ἄγνωστοι εἶναι καί οἱ διαταρακτικοί ὅροι u_t. Οἱ ἐκτιμήσεις πού ἔχουμε γιά τούς τελευταίους εἶναι τά κατάλοιπα $\hat{u}_t$. Ἀπό τά κατάλοιπα αὐτά θά βροῦμε τόν ἐκτιμητή τῆς σ^2, s^2. Ἀντικαθιστώντας τήν (2.35) στή (2.30) ἔχουμε

$$\hat{u} = Y - Xb = Y - X(X'X)^{-1}X'y \tag{2.37}$$

Ἀντικαθιστώντας τήν (2.26) στήν (2.37) ἔχουμε

$$\begin{aligned}\hat{u} &= X\beta + u - X(X'X)^{-1} X'(X\beta + u) = \\ &= X\beta + u - X\beta - X(X'X)^{-1} X'u = u - X(X'X)^{-1} X'u = \\ &= (I - X(X'X)^{-1} X')u \end{aligned} \tag{2.38}$$

θέτοντας

$$Q = I - X(X'X)^{-1} X' \tag{2.39}$$

μποροῦμε νά γράψουμε τή (2.38) συνοπτικά

$$\hat{u} = Qu \tag{2.40}$$

Ἡ Q εἶναι συμμετρική καί (ἀφοῦ QQ = Q) ταυτοδύναμη μήτρα(βλέπε Γ.Α. σελ. 26). Κατά συνέπεια

$$\hat{u}'\hat{u} = (Qu)'\, Qu = u'Q'Qu = u'QQu = u'Qu \tag{2.41}$$

Ἄν πάρουμε τήν ἀναμενόμενη τιμή τῆς (2.41) ἔχουμε

$$E(\hat{u}'\hat{u}) = E(u'Qu) \tag{2.42}$$

Ἐφόσον ὅμως (2.42) εἶναι ἕνας ἀριθμός, τό ἴχνος τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός. Ἄρα

$$E(u'Qu) = E[\operatorname{tr}(u'Qu)] \tag{2.43}$$

Ἐφαρμόζοντας τώρα τίς ἰδιότητες τοῦ ἴχνους (βλ. Γ.Α. σελ. 111-112) ἔχουμε:

$$E[\operatorname{tr}(u'Qu)] = E[\operatorname{tr}(Quu')] = \operatorname{tr}[E(Quu')] \tag{2.44}$$

Ἐφόσον ἡ μήτρα Q εἶναι σταθερή, ἔχουμε

$$\operatorname{tr}[E(Quu')] = \operatorname{tr}[QE(uu')] \tag{2.45}$$

Ἀντικαθιστώντας στή (2.45) τήν $E(uu')$ μέ τήν ἴση της, ἀπό τήν ὑπόθεση (v) ἔχουμε

$$\operatorname{tr}[QE(uu')] \doteq \operatorname{tr}[Q\sigma^2 I] = \sigma^2 \operatorname{tr}(Q) = \sigma^2(T-n) \tag{2.46}$$

Ἐφόσον $\operatorname{tr}(Q) = T-n$ (βλέπε Γ.Α. σελ. 114).

Ἑπομένως ἄν πάρουμε σάν ἐκτιμητή τῆς σ^2 τήν

$$s^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-n} \tag{2.47}$$

῾Ο ἐκτιμητής αὐτός εἶναι ἀμερόληπτος (unbiased) διότι

$$E(s^2) = \frac{E(\hat{u}'\hat{u})}{T-n} = \sigma^2 \frac{(T-n)}{(T-n)} = \sigma^2 \qquad (2.48)$$

Γιά νά ὑπολογίσουμε τήν s^2 παρατηροῦμε ὅτι

$$b'X'Xb = b'(X'X)(X'X)^{-1}X'y = b'X'y \qquad (2.49)$$

῎Αρα

$$\hat{u}'\hat{u} = (y'-b'X)(y-Xb) = y'y - 2b'X y + b'X'Xb \qquad (2.50)$$

$$= y'y - b'X'Xb = y'y - b'X'y =$$

$$= y'y - y'X(X'X)^{-1}X'y$$

$$= y'(I - X(X'X)^{-1}X')y = y'Qy \qquad (2.51)$$

῾Επομένως

$$s^2 = \frac{y'y - b'X'y}{T-n} = \frac{y'Qy}{T-n} \qquad (2.52)$$

V. Τὸ Θεώρημα τῶν Gauss-Markov

Τό θεώρημα ὀφείλεται στίς ἐργασίες τῶν Gauss (1821-3) καί Markov (1912).

Θεώρημα: ῾Ο ἐκτιμητής τοῦ β πού προκύπτει ἀπό τή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, δηλ. τό $b = (X'X)^{-1}X'y$ εἶναι γραμμικός, ἀμερόληπτος καί ἄριστος μέ τήν ἔννοια ὅτι, σέ σύγκριση μέ ὁποιοδήποτε ἄλλο γραμμικό καί ἀμερόληπτο ἐκτιμητή, ἔχει τή μικρότερη διακύμανση. Δηλαδή τό διάνυσμα b εἶναι ῎Αριστος Γραμμικός ᾽Αμερόληπτος ᾽Εκτιμητής -(Α.Γ.Α.Ε.) (Best Linear Unbiased Estimator - B.L.U.E.).

'Απόδειξη:

(α) Τό ὅτι ὁ ἐκτιμητής εἶναι γραμμικός ὡς πρός y προκύπτει ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ X εἶναι σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση (ii) μιά σταθερή μήτρα, κι'ἐπομένως καί ἡ μήτρα

$$A' = (X'X)^{-1}X' \tag{2.53}$$

εἶναι σταθερή καί κατά συνέπεια ὁ ἐκτιμήτης

$$b = (X'X)^{-1}X'y = A'y \tag{2.54}$$

εἶναι γραμμικός ὡς πρός y.

(b) Γιά νά δοῦμε ἄν ὁ ἐκτιμητής εἶναι ἀμερόληπτος πρέπει νά βροῦμε τήν ἀναμενόμενη τιμή τοῦ b. Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι ὁ b μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$b = (X'X)^{-1}X'y = (X'X)^{-1}X'(X\beta+u) = (X'X)^{-1}(X'X)\beta + A'u$$
$$= \beta + A'u \tag{2.55}$$

'Επομένως

$$E(b) = E(\beta + A'u) = \beta + E(A'u) = \beta + A'E(u) = \beta \tag{2.56}$$

ἄρα ὁ b εἶναι ἀμερόληπτος ἐκτιμητής.
Τό ἀποτέλεσμα (2.56) προκύπτει ἀπό τίς ὑποθέσεις (ii) καί (iv).

(c) Γιά ν'ἀποδείξουμε ὅτι ὁ ἐκτιμητής εἶναι ἄριστος θά πρέπη πρῶτα νά βροῦμε τή μήτρα διακυμάνσεως συνδιακυμάνσεως (Variance Covariance Matrix) τῆς b (πού τή συμβολίζουμε μέ $\text{Var}(b)$). 'Από τίς (2.55) καί (2.56) ἔχουμε

$$b - \beta = b - E(b) = A'u \tag{2.57}$$

῎Αρα

$$\mathrm{Var}(b) = E[\{b - E(b)\}\{b - E(b)\}]' =$$
$$= E[(b-\beta)(b-\beta)'] = E[A'uu'A] =$$
$$= E[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}] = (X'X)^{-1}X'\sigma^2 IX(X'X)^{-1}$$
$$= \sigma^2(X'X)^{-1}(X'X)(X'X)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1} \qquad (2.58)$$

῎Αν δέν ξέρουμε τήν σ^2 τήν ἀντικαθιστοῦμε μέ τήν s^2 (σχέση (2.52)).

᾿Από τίς διαστάσεις τῆς μήτρας X βλέπουμε ὅτι ἡ μήτρα A' εἶναι $n\times T$. ῎Αν πάρουμε τώρα ἕνα ἄλλο ἐκτιμητή b^* πού εἶναι γραμμικός καί ἀμερόληπτος ὅπως καί ὁ b, μποροῦμε νά τόν γράψουμε σάν:

$$b^* = (A' + C')y \qquad (2.59)$$

ὅπου ἡ C', ὅπως καί ἡ A' εἶναι μιά σταθερή $n\times T$ μήτρα, ἀλλά δέν προσδιορίζουμε τό βαθμό της, δηλαδή, ἐφόσον $n < T$, $r(C) \leqslant n$. Εἴδαμε πιό πάνω ὅτι ἄν $r(X) = n$ τότε ἡ $(X'X)$ εἶναι θετικά ὁρισμένη. Κατά παρόμοιο τρόπο ἐφόσον $r(C) \leqslant n$, ἡ $C'C$ εἶναι θετικά ἡμιορισμένη (βλέπε καί Goldberger (1964) σελ. 37).

᾿Εφόσον ξεκινοῦμε μέ τήν ὑπόθεση ὅτι ὁ ἐκτιμητής b^* εἶναι ἀμερόληπτος ἕπεται ὅτι:

$$E(b^*) = E[(A'+C')y] = E[(A'+C')(X\beta + u)] =$$
$$= E[A'(X\beta+u)] + E[C'(X\beta+u)] =$$
$$= \beta + E[C'X\beta] + C'E(u) = \beta + C'X\beta \qquad (2.60)$$

Γιά νά εἶναι ἡ (2.60) ἴση μέ τό β θά πρέπη νά ἰσχύουν οἱ συνθῆκες

$$C'X = 0 \implies X'C = 0 \qquad (2.61)$$

Γιά νά βροῦμε τή μήτρα διακυμάνσεως - συνδιακυμάνσεως τοῦ ἐκτιμητῆ b* προχωροῦμε ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ b. Ἐφόσον ὁ b* εἶναι ἀμερόληπτος καί ἰσχύει ἡ (2.61) ἔχουμε:

$$b^* - \beta = (A' + C')u \tag{2.62}$$

Ἑπομένως

$$\mathrm{Var}(b^*) = E\left[(b^*-\beta)(b^*-\beta)'\right] = E\left[(A'+C')uu'(A+C)\right] =$$

$$= \sigma^2 (A'+C')(A+C) = \sigma^2 (A'A + A'C + C'A + C'C)$$

$$= \sigma^2 (A'A + C'C) \tag{2.63}$$

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό προκύπτει ἀπό τό γεγονός ὅτι

$$A'C = C'A = 0 \tag{2.64}$$

ἐπειδή ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (2.61)

Ἐφόσον ὅμως

$$A'A = (X'X)^{-1} X'X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1} \tag{2.65}$$

ἡ (2.63) μπορεῖ νά γραφτῆ

$$\mathrm{Var}(b^*) = \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2 C'C = \mathrm{var}(b) + \sigma^2 C'C \tag{2.66}$$

Κατά συνέπεια

$$\mathrm{Var}(b^*) - \mathrm{Var}(b) = \sigma^2 C'C \tag{2.67}$$

Καί ἐφόσον ἡ μήτρα $C'C$ εἶναι θετικά ἡμιορισμένη ἀποδείξαμε ὅτι ὁ b εἶναι ἄριστος ἐκτιμητής.

Γιά νά γίνη ξεκάθαρη ἡ τελευταία αὐτή ἰδιότητα σημειώνουμε ὅτι ἄν πάρουμε ἕνα γραμμικό συνδυασμό τῶν β_j

$$\alpha_1 = g'\beta \tag{2.68}$$

ὅπου ἡ g' εἶναι ἕνα σταθερό διάνυσμα μέ n συντεταγμένες καί ἄν πάρουμε σάν ἐκτιμητή τοῦ β τόν b, τότε ὁ ἐκτιμητής τοῦ α_1 εἶναι

$$a_1 = g'b \tag{2.69}$$

Ὁπότε

$$a_1 - \alpha_1 = g'(b-\beta) \tag{2.70}$$

καί

$$E[(a_1-\alpha_1)(a_1-\alpha_1)'] = g'\{E[(b-\beta)(b-\beta)']\}g \tag{2.71}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο ἄν πάρουμε σάν ἐκτιμηιή τοῦ β τόν b^* τότε ἔχουμε ἕνα ἄλλο ἐκτιμητή τοῦ α_1, δηλαδή τόν

$$a_1^* = g'b^* \tag{2.72}$$

καί, ὅπως καί προηγουμένως, ἡ $Var(g'b^*)$ εἶναι

$$E[(a_1^*-\alpha_1)(a_1^*-\alpha_1)'] = g'E[(b^*-\beta)(b^*-\beta)']g \tag{2.73}$$

Ἄν τώρα ἀφαιρέσουμε τή (2.71) ἀπό τή (2.73) ἔχουμε:

$$g'\{(E(b^*-\beta)(b^*-\beta)') - (E(b-\beta)(b-\beta)')\}g \tag{2.74}$$

Ἀντικαθιστώντας μέσα στήν ἀγκύλη τῆς (2.74) τή (2.67) ἔχουμε:

$$g'\{Var(b^*) - Var(b)\}g = \sigma^2 g'(C'C)g \geq 0 \tag{2.75}$$

Ἐφόσον ἡ $C'C$ εἶναι θετικά ἡμιορισμένη. Μ'αὐτό ἀποδείξαμε ὅτι τό θεώρημα τῶν Gauss Markov ἰσχύει καί γιά τό γραμμικό συνδυασμό (2.68) τῶν b_j. Στήν περίπτωση πού $g' = (1,0,\ldots,0)$ ἡ (2.75) εἶναι:

$$Var(b_1^*) - Var(b_1) \geq 0 \tag{2.76}$$

δηλ. $Var(b_1^*) \geqslant Var(b_1)$ (2.77)

Ἡ (2.77) ἀποτελεῖ ἀπόδειξη, στήν εἰδική περίπτωση πού ἐξετάζουμε τόν ἐκτιμητή b_1 τῆς β_1, ὅτι ὁ ἐκτιμητής αὐτός ἔχει διακύμανση μικρότερη ἤ ἴση ἀπ'ὁποιονδήποτε ἄλλο ἐκτιμητή b_1^*.

VI. Ἡ Συνέπεια τοῦ b

Ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τή Στατιστική (βλέπε Κεβόρκ (1972 β), σελ. 100) ἕνας ἐκτιμητής εἶναι ἀμερόληπτος ἄν

$$E(b) = \beta \tag{2.78}$$

Ἄν δέν ἰσχύη ἡ (2.78) τότε ἡ μεροληψία (bias) τοῦ ἐκτιμητή εἶναι ἴση μέ

$$E(b) - \beta \tag{2.79}$$

Ἄν τό μέγεθος τοῦ δείγματος αὐξάνη ($T \to \infty$) καί

$$\lim_{T\to\infty} \{E(b)\} = \beta \tag{2.80}$$

ὁ ἐκτιμητής b λέγεται ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος (asymptotically unbiased). Ἄν ἡ (2.80) δέν ἰσχύη τότε ἡ ἀσυμπτωτική μεροληψία (asymptotic bias) εἶναι ἴση μέ

$$\lim_{T\to\infty} E(b) - \beta \tag{2.81}$$

Μπορεῖ ν'ἀποδειχτῆ ὅτι ἄν ἕνας ἐκτιμητής εἶναι ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος καί ἡ διακύμανσή του τείνει πρός τό μηδέν ὁ ἐκτιμητής αὐτός εἶναι συνεπής (consistent) (βλέπε Dhrymes (1970) σελ. 90 καί Κεβόρκ σελ. 102).

Μέ βάση τήν ὑπόθεση (i) ἡ μήτρα (βλέπε Dhrymes (1970) σελ. 146)

$$M = \left(\frac{X'X}{T} \right) \tag{2.82}$$

ἔχει πεπερασμένα στοιχεῖα. Αὐτό σέ συνδυασμό μέ τήν ὑπόθεση (iii) ἔχει σάν συνέπεια ὅτι ἡ ἀντίστροφη τῆς M ὑπάρχει καί ἄρα ἀντιστρέφοντας τήν (2.82) ἔχουμε:

$$M^{-1} = \left(\frac{X'X}{T} \right)^{-1} \Longrightarrow (X'X)^{-1} = \frac{M^{-1}}{T} \tag{2.83}$$

Πρῶτα βλέπουμε ὅτι ἐφόσον ἰσχύουν ἡ (2.83) καί ἡ (2.56) ὁ ἐκτιμητής b εἶναι ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος, δηλαδή

$$\lim_{T\to\infty} E(b) = \beta \tag{2.84}$$

Ἐπίπλεον (χρησιμοποιώντας τίς σχέσεις (2.83) καί (2.58))ἔχουμε:

$$\lim_{T\to\infty} E\left[(b-\beta)(b-\beta)'\right] = \lim_{T\to\infty} Var(b) =$$

$$\lim_{T\to\infty} \left\{\sigma^2 (X'X)^{-1}\right\} = \lim_{T\to\infty} \left\{\sigma^2 \frac{M^{-1}}{T}\right\} =$$

$$\sigma^2 \lim_{T\to\infty} \left(\frac{M^{-1}}{T} \right) = \sigma^2\, 0 = 0 \tag{2.85}$$

Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ (2.84) καί (2.85), ὁ ἐκτιμητής b εἶναι συνεπής.

VII. Τὸ Κλασσικὸ Γραμμικὸ Ὑπόδειγμα μὲ Γραμμικοὺς Δεσμοὺς

Ἄν γνωρίζουμε ὅτι οἱ παράμετροι συνδέονται μεταξύ τους μέ ὁρισμένες σχέσεις καί θελήσουμε νά λάβουμε ὑπόψη τίς σχέσεις αὐτές τότε προχωροῦμε ὅπως ἀναφέρεται στή Γ.Α. (σελ. 177 κ.έ.),δηλαδή χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange (Lagrange multipliers)(βλέπε καί Theil (1961) καί (1971) σελ. 43-45).

Ἄν οἱ παράμετροι β συνδέονται μέ τή σχέση

$$R\beta = r \qquad (2.86)$$

ὅπου R εἶναι μιά σταθερή μήτρα $p \times n$ καί r ἕνα (ἐπίσης σταθερό) διάνυσμα μέ p συντεταγμένες. Ὁ βαθμός τῆς μήτρας R εἶναι p, πού εἶναι καί ὁ ἀριθμός τῶν σχέσεων μέ τίς ὁποῖες συνδέονται οἱ παράμετροι, δηλαδή ὁ ἀριθμός τῶν δεσμῶν ἤ περιορισμῶν (constraints).

Γιά τόν ἐκτιμητή τοῦ β, b^c θά πρέπη νά ἰσχύη μιά σχέση παρόμοια μέ τήν (2.86), δηλαδή,

$$Rb^c = r \qquad (2.87)$$

Τό πρόβλημα τώρα εἶναι ἡ ἐλαχιστοποίηση τῆς (2.32) (μέ τό νέο ἐκτιμητή b^c) μέ τό δεσμό (2.87).

Ἄν τό διάνυσμα τῶν πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange εἶναι:

$$\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \qquad (2.88)$$

τότε ἡ συνάρτηση πού πρέπει νά ἐλαχιστοποιηθῆ ὡς πρός b^c καί λ εἶναι:

$$\psi = y'y - 2b^{c\prime}X'y + b^{c\prime}X'Xb^c - \lambda'(r - Rb^c) \qquad (2.89)$$

Οἱ συνθῆκες πρώτης τάξεως (first order conditions) γιά τήν ἐλαχιστοποίηση τῆς (2.89) εἶναι:

$$\frac{\partial\psi}{\partial b^c} = -2X'y + 2X'Xb^c + R'\lambda = 0 \qquad (2.90)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = -r + Rb^c = 0 \qquad (2.91)$$

Ἀπό τήν (2.90) ἔχουμε:

$$R'\lambda = 2X'y - 2X'Xb^c \qquad (2.92)$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν (2.92) μέ τή μήτρα $R(X'X)^{-1}$ έχουμε

$$R(X'X)^{-1}R'\lambda = 2[R(X'X)^{-1}X'y - Rb^c] \qquad (2.93)$$

Ἐφόσον $r(R) = p < n$ καί ἡ $(X'X)^{-1}$ εἶναι θετικά ὁρισμένη ἕπεται ὅτι (βλ. Γ.Α. σελ. 133) καί ἡ μήτρα $R(X'X)^{-1}R'$ εἶναι θετικά ὁρισμένη καί ὅτι ἡ ἀντίστροφή της

$$D \equiv [R(X'X)^{-1}R']^{-1} \qquad (2.94)$$

ὑπάρχει.

Πολλαπλασιάζοντας τή (2.93) μέ τή μήτρα D ἀπό τά ἀριστερά ἔχουμε:

$$\lambda = 2D[R(X'X)^{-1}X'y - Rb^c] \qquad (2.95)$$

ἀντικαθιστώντας τίς (2.35) καί (2.87) στή (2.95) ἔχουμε:

$$\lambda = 2D(Rb - r) \qquad (2.96)$$

Ἀντικαθιστώντας τήν (2.96) στή (2.90) ἔχουμε:

$$-2X'y + 2X'Xb^c + 2R'D(Rb - r) = 0 \qquad (2.97)$$

ἤ

$$(X'X)b^c = X'y - R'D(Rb - r) \qquad (2.98)$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν (2.98) μέ $(X'X)^{-1}$ ἀπό τά ἀριστερά ἔχουμε τελικά:

$$b^c = b + (X'X)^{-1}R'D(r - Rb) \qquad (2.99)$$

Ἑπομένως ὁ καινούργιος ἐκτιμητής b^c διαφέρει ἀπό τόν ἐκτιμητή b μόνο ἐφόσον ὁ τελευταῖος δέν ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη (2.87).

Γιά νά δοῦμε ἄν ἔχουμε μέγιστο ἤ ἐλάχιστο ἐξετάζουμε πλαισιωμένες πρωτεύουσες ἐλάσσονες ὁρίζουσες (bordered principal minors) τῆς μήτρας

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\lambda'} & \frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial b^{c'}} \\ \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial b^c\partial\lambda'} & \frac{\partial^2\psi}{\partial b^c\partial b^{c'}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ \\ R' & 2X'X \end{bmatrix} \qquad (2.100)$$

(βλέπε Γ.Α. σελ.184).

VIII. Ὑποδιαίρεση τῆς Μήτρας τῶν Ἀνεξάρτητων Μεταβλητῶν σὲ Δυὸ Ὑπομῆτρες

Γιά πολλούς λόγους ὁ ἐρευνητής μπορεῖ νά θέλη νά ὑποδιαιρέση τίς ἀνεξάρτητες μεταβλητές σέ δυό ὁμάδες καί νά ξεχωρίση τίς ἐπιδράσεις τῆς καθεμιᾶς πάνω στήν ἐξαρτημένη μεταβλητή.

Γιά τό λόγο αὐτό ἀποδεικνύουμε στό τμῆμα αὐτό τό ἀκόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα: "Αν ὑποδιαιρέσουμε τή μήτρα τῶν n ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν τοῦ ὑποδείγματος (2.26) σέ δυό ὑπομῆτρες, δηλαδή:

$$X = (X_1 \vdots X_2) \qquad (2.101)$$

ὅπου X_1 καί X_2 εἶναι ὑπομῆτρες διαστάσεων $T\times n_1$ καί $T\times n_2$, $n_1+n_2=n$ καί ἄν, ἀνάλογα, ὑποδιαιρέσουμε, τό διάνυσμα β τοῦ (2.26) σέ δυό ὑποδιανύσματα β_1 καί β_2 μέ n_1 καί n_2 συντεταγμένες, δηλαδή:

$$\beta' = (\beta_1' \ , \beta_2') \qquad (2.102)$$

τότε ὁ ἐκτιμητής τοῦ β_2, b_2 πού προκύπτει ἀπό τήν ἐκτίμηση τοῦ ὑποδείγματος

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u \qquad (2.103)$$

εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν ἐκτιμητή τοῦ β^*_2, b^*_2 πού προκύπτει ἀπό τήν ἐκτίμηση (καί στίς δυό περιπτώσεις μέ τή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων) τοῦ ὑποδείγματος:

$$y^* = X_2^*\beta_2^* + u^* \tag{2.104}$$

ὅπου $y^* = y - X_1 b_y$ καί $X_2^* = X_2 - X_1 B_2$ (2.105)

καί ὅπου

$$b_y = (X_1'X_1)^{-1} X_1'y \text{ καί } B_2 = (X_1'X_1)^{-1} X_1'X_2 \tag{2.106}$$

Ἐπιπλέον τά κατάλοιπα τῶν δυό παλινδρομήσεων (regressions) εἶναι ἴσα, δηλαδή:

$$\hat{u} = \hat{u}^* \tag{2.107}$$

καί

$$\mathrm{Var}(b_2) = \mathrm{Var}(b_2^*) \tag{2.108}$$

Πρίν προχωρήσουμε στήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος παρατηροῦμε, ὅτι ἀπό τίς σχέσεις (2.105) καί (2.106) προκύπτει ὅτι ἡ (2.104) εἶναι ἡ παλινδρόμηση πού ἔχει σάν ἐξαρτημένη μεταβλητή τά κατάλοιπα τῆς y καί ἀνεξάρτητες μεταβλητές τά κατάλοιπα τῶν X_1 πού ἀπομένουν μετά τήν ἀφαίρεση (τόσο ἀπό τήν y ὅσο καί τίς X_1) τῆς διακυμάνσεως πού ὀφείλεται στίς μεταβλητές X_2.

Ἀπόδειξη:

Ἡ ἀπόδειξη θά γίνη σέ τρία στάδια

(i) Πρῶτα ἀποδεικνύουμε ὅτι $b_2 = b_2^*$

Ἄν ἐκτιμήσουμε τό ὑπόδειγμα μέ τή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων τότε ἔχουμε τίς ἀκόλουθες κανονικές ἐξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'y \\ X_2'y \end{bmatrix} \tag{2.109}$$

ὅπου

b_1 καί b_2 εἶναι οἱ ἐκτιμητές τῶν β_1 καί β_2.

Οἱ (2.109) γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$$X_1'X_1b_1 + X_1'X_2b_2 = X_1'y \quad (2.110)$$

$$X_2'X_1b_1 + X_2'X_2b_2 = X_2'y \quad (2.111)$$

Ὑποθέτοντας ὅτι $r(X_1) = n_1$ (καί ἄρα ἡ $X_1'X_1$ εἶναι θετικά ὁρισμένη κι' ἑπομένως ἡ $(X_1'X_1)^{-1}$ ὑπάρχει), πολλαπλασιάζουμε τήν (2.110) ἀπό τά ἀριστερά μέ $(X_1'X_1)^{-1}$ καί ἐπιλύνουμε ὡς πρός b_1 ὁπότε ἔχουμε:

$$b_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y - (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2b_2 \quad (2.112)$$

Ἀντικαθιστώντας τήν (2.112) στήν (2.111) ἔχουμε:

$$X_2'X_1\left[(X_1'X_1)^{-1}X_1'y - (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2b_2\right] + X_2'X_2b_2 = $$
$$= X_2'y \quad (2.113)$$

Μετά ἀπό τούς πολλαπλασιασμούς καί τήν ἀνακατάταξη τῶν ὅρων μποροῦμε νά γράψουμε τήν (2.113) ὡς ἑξῆς:

$$\left\{X_2'[I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']X_2\right\}b_2 = X_2'[I-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']y \quad (2.114)$$

Ἄν τώρα θέσουμε:

$$Q_1 = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \quad (2.115)$$

τότε ἡ (2.114) γράφεται:

$$(X_2'Q_1X_2)b_2 = X_2'Q_1y \quad (2.116)$$

Οἱ κανονικές ἐξισώσεις ἐξάλλου τῆς (2.104) εἶναι:

$$(X_2^{*\prime}X_2^*)b_2^* = X_2^{*\prime}y^* \qquad (2.117)$$

Ἂν ἀντικαταστήσουμε τίς (2.106) στίς (2.105) καί χρησιμοποιήσουμε τήν (2.113) ἔχουμε:

$$y^* = y-X_1b_y = y-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'y = [I-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']y = Q_1y \qquad (2.118)$$

καί

$$X_2^* = X_2-X_1B_2 = X_2-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2 =$$

$$= [I-X_1(X_1'X)^{-1}X_1']X_2 = Q_1X_2 \qquad (2.119)$$

Ἀντικαθιστώντας τίς (2.118) καί (2.119) στήν (2.117) ἔχουμε:

$$(X_2'Q_1'Q_1X_2)b_2^* = X_2'Q_1'Q_1y \qquad (2.120)$$

καί ἐφόσον ἡ Q_1 εἶναι μιά ταυτοδύναμη καί συμμετρική μήτρα ($Q_1'Q_1 = Q_1Q_1 = Q_1$) ἔπεται ὅτι ἡ (2.120) καί (2.116) εἶναι ἴσες καί ἄρα ἀποδείξαμε ὅτι:

$$b_2 = b_2^* \qquad (2.121)$$

(ii) Ἡ ἑπόμενη ἀπόδειξη ἀφορᾶ τά κατάλοιπα ἀπό τίς δυό παλινδρομήσεις (2.103) καί (2.104)

Ἂν πάρουμε τίς παρατηρήσεις στίς ἀνεξάρτητες μεταβλητές γιά τήν περίοδο t καί τίς χωρίσουμε σέ δυό ὑποδιανύσματα (ὁ πρῶτος δείχτης ἀναφέρεται στήν ἀντιστοιχία μέ τίς μῆτρες X_1 καί X_2 καί ἡ . δείχνει ὑποδιάνυσμα-γραμμή):

$$x_{1t.} = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{t,n_1}) \qquad (2.122)$$

καί

$$x_{2t.} = (x_{t,n_1+1},\ x_{t,n_1+2},\ldots,x_{tn}) \qquad (2.123)$$

τότε τό κατάλοιπο γιά τή περίοδο t ἀπό τήν παλινδρόμηση (2.103) εἶναι:

$$\hat{u}_t = y_t - x_{1t.}b_1 - x_{2t.}b_2 \qquad (2.124)$$

ἐξάλλου ἄν θέσουμε

$$x^*_{1t.} = (x^*_{t1},\ x^*_{t2},\ldots,x^*_{tn_1}) \qquad (2.125)$$

τά κατάλοιπα γιά τήν περίοδο t ἀπό τήν παλινδρόμηση (2.104) εἶναι:

$$\hat{u}^*_t = y^*_t - x^*_{2t.}b^*_2 \qquad (2.126)$$

Ἀφοῦ ὅμως ἰσχύει ἡ (2.121) μποροῦμε ν'ἀντικαταστήσουμε τήν b^*_2 μέ τή b_2. Ἄν ἐπιπλέον ἀντικαταστήσουμε τίς y^*_t καί $x^*_{2t.}$ μέ τίς ἴσες τους (βλέπε (2.118) καί (2.119)) ἔχουμε:

$$\hat{u}^*_t = y_t - x_{1t.}(X_1'X_1)^{-1}X_1'y - x_{2t.}b_2 + x_{1t.}(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2b_2 \qquad (2.127)$$

Ἄν τώρα ἀφαιρέσουμε τή (2.127) ἀπό τή (2.124) ἔχουμε:

$$\hat{u}_t - \hat{u}^*_t = -x_{1t.}b_1 + x_{1t.}(X_1'X_1)^{-1}X_1'y - $$

$$- x_{1t.}(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2b_2 \qquad (2.128)$$

Ἄν $u_t = u^*_t$ τότε ἡ (2.128) θά πρέπη νά εἶναι ἴση μέ τό μηδέν, δηλαδή:

$$x_{1t.}[(b_1 - (X_1'X_1)^{-1}X_1'y + (X_1'X_1)^{-1}X_1'X_2b_2] = 0 \qquad (2.129)$$

'Αφοῦ $x_{1t.} \neq 0$ τότε θά πρέπη νά ἔχουμε:

$$b_1 + (X_1'X_1)^{-1} X_1'X_2b_2 = (X_1'X_1)^{-1} X_1'y \tag{2.130}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τήν (2.130) μέ $(X_1'X_1)$ ἀπό τά ἀριστερά ἔχουμε:

$$(X_1'X_1)b_1 + (X_1'X_2)b_2 = X_1'y$$

καί αὐτή ἡ σχέση εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν (2.110), ἄρα

$$\hat{u} = \hat{u}^* \tag{2.131}$$

(iii) Τέλος ἀποδεικνύουμε ὅτι $Var(b_2) = Var(b_2^*)$.

'Εφόσον ἰσχύει ἡ (2.131) ἔπεται ὅτι:

$$s^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-n} = \frac{\hat{u}^{*\prime}\hat{u}^*}{T-n} \tag{2.132}$$

Τή (2.132) διαιροῦμε μέ $T-n = T-(n_1+n_2)$ διότι τό σύνολο τῶν παραμέτρων πού ἔχουν ἐκτιμηθῆ στή περίπτωση τῆς παλινδρομήσεως (2.103) εἶναι ξεκάθαρο ὅτι εἶναι $n_1 + n_2$. Καί στή περίπτωση ὅμως τῆς (2.104) ξεκινοῦμε ἀπό μιά ἐξαρτημένη μεταβλητή, τήν y^*, πού εἶναι τά κατάλοιπα ἀπό τήν y μετά τήν ἐκτίμηση n_1 παραμέτρων. Σ' αὐτές πρέπει νά προστεθοῦν καί οἱ n_2 πού βρίσκουμε μέ τήν παλινδρόμηση (2.104). 'Εφόσον, κατά συνέπεια, ἰσχύει ἡ (2.131) ἰσχύει καί ἡ (2.132).

Ἡ $Var(b_2^*)$ βρίσκεται ὅπως καί ἡ $Var(b)$ στή (2.58) καί εἶναι (ἄν δέν ξέρουμε τήν σ^2) ἴση μέ

$$Var(b_2^*) = s^2(X_2'Q_1X_2)^{-1} \tag{2.132}$$

'Απομένει τώρα νά βροῦμε, τή $Var(b_2)$

Ἄν θέσουμε:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} = V \qquad (2.133)$$

τότε

$$\mathrm{Var}(b_2) = s^2 V_{22} \qquad (2.133)$$

Σύμφωνα ὅμως μέ ὅσα δείξαμε στήν Γ.Α. (σελ. 55-57)

$$V_{22} = [X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} X_1'X_2]^{-1} =$$

$$= \{X_2'[I - X_1(X_1'X)^{-1} X_1']X_2\}^{-1} = (X_2'Q_1X_2)^{-1} \qquad (2.134)$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τή (2.134) στή (2.133) βλέπουμε ὅτι

$$\mathrm{Var}(b_2) = \mathrm{Var}(b_2^*) \quad . \qquad (2.135)$$

καί μ'αὐτό συμπληρώνεται ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος.

Ὅπως ἀναφέραμε καί στήν ἀρχή τοῦ τμήματος αὐτοῦ τό θεώρημα πού μόλις ἀποδείξαμε ἔχει πολλές χρήσεις καί μπορεῖ ἀκόμα καί νά ἐπεκταθῆ καί στά συστήματα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων (βλέπε καί τήν ἐργασία τοῦ συγγραφέα (1971) σελ. 60-61). Στό ἑπόμενο (καί τελευταῖο,τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ)τό ἐξειδικεύουμε στήν περίπτωση τῆς ἁπλῆς παλινδρομήσεως.

IX. Ἡ Ἁπλῆ Παλινδρόμηση σάν Παράδειγμα τοῦ Κλασσικοῦ Γραμμικοῦ Ὑποδείγματος

Ἡ ἁπλή παλινδρόμηση (simple regression), μέ τό συμβολισμό πού υἱοθετήσαμε στό Κεφάλαιο αὐτό, γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + u_t \ ; \quad t = 1,2,\ldots,T \qquad (2.136)$$

Ἡ μήτρα X εἶναι:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{T1} & x_{T2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & x_{12} \\ 1 & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{T2} \end{bmatrix} \qquad (2.137)$$

Ἄν ἐφαρμόσουμε τή μέθοδο πού ἀναπτύξαμε στή (2.35) κ.ἑ. ἔχουμε πρῶτα

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} T & \sum x_{t2} \\ \sum x_{t2} & \sum x_{t2}^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{T\sum x_{t2}^2 - (\sum x_{t2})^2} \begin{bmatrix} \sum x_{t2}^2 & -\sum x_{t2} \\ -\sum x_{t2} & T \end{bmatrix} \qquad (2.138)$$

ὅπου ὅλα τά ἀθροίσματα στίς (2.138) κ.ἑ. εἶναι ἀπό $t = 1$ ἕως $t = T$.

Ἐπιπλέον ἔχουμε:

$$X'y = \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{t2} y_t \end{bmatrix} \qquad (2.139)$$

Ἑπομένως

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} X'y = \frac{1}{T\sum x_{t2}^2 - (\sum x_{t2})^2} \begin{bmatrix} \sum x_{t2}^2 & -\sum x_{t2} \\ -\sum x_{t2} & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{t2} y_t \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{T\sum x_{t2}^2 - (\sum x_{t2})^2} \begin{bmatrix} \sum x_{t2}^2 \sum y_t - \sum x_{t2} \sum x_{t2} y_t \\ T\sum x_{t2} y_t - \sum x_{t2} \sum y_t \end{bmatrix} \qquad (2.140)$$

καί

$$\mathrm{Var}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{s^2}{T\sum x_{t2}^2-(\sum x_{t2})^2}\begin{bmatrix} \sum x_{t2}^2 & -\sum x_{t2} \\ -\sum x_{t2} & T \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

Ἄν ἐφαρμόσουμε τό θεώρημα πρέπει πρῶτα νά βροῦμε τά b_y καί B_2 πού (στή περίπτωση αὐτή) εἶναι ἀριθμοί. Οἱ μῆτρες X_1 καί X_2 εἶναι, ἀντίστοιχα, τό πρῶτο καί τό δεύτερο διάνυσμα τῆς (2.137). Ἄρα

$$b_y = (X_1'X_1)^{-1}\ X_1'y\ = \frac{1}{T}\sum y_t \equiv \bar{y} \quad (2.142)$$

καί

$$B_2 = (X_1'X_1)^{-1}\ X_1'X_2 = \frac{1}{T}\sum x_{t2} \equiv \bar{x}_2 \quad (2.143)$$

Ἐπομένως, ἄν θέσουμε

$$i' = (1,1,\ldots,1) \equiv x_{\cdot 1}' \quad (2.144)$$

ἔχουμε

$$y^* = y - x_{\cdot 1}\bar{y} \equiv y - i\bar{y} \quad \text{καί} \quad X_2^* = X_2 - x_{\cdot 1}\bar{x}_2 \equiv X_2 - i\bar{x}_2 \quad (2.145)$$

Ἡ παλινδρόμηση πού ἀντιστοιχεῖ στή (2.104) εἶναι:

$$y^* = X_2^*\beta_2^* + u^* \quad (2.146)$$

καί ἄρα

$$b_2^* = (X_2^{*\prime}X_2^*)^{-1}\ X_2^{*\prime}y^* = \frac{1}{\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)(y_t-\bar{y}) =$$

$$= \frac{\sum x_{t2}y_t - \dfrac{\sum x_{t2}\sum y_t}{T}}{\sum x_{t2}^2 - \dfrac{(\sum x_t)^2}{T}} = \frac{T\sum x_{t2}y_t - \sum x_{t2}\sum y_t}{T\sum x_{t2}^2-(\sum x_t)^2} \quad (2.147)$$

'Επιπλέον $\quad Var(b_2^*) = s^2(x_2^{*\prime}x_2^*)^{-1} = \dfrac{s^2}{\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2} \quad (2.148)$

Συγκρίνοντας τήν (2.147) καί (2.148) μέ τή δεύτερη γραμμή τῶν (2.140) καί (2.141) βλέπουμε ὅτι εἶναι ἀκριβῶς οἱ ἴδιες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΣΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

1. Εἰσαγωγικὰ στὴν Ἀρχὴ τῆς Μεγίστης Πιθανότητος

Πρίν ἐφαρμόσουμε τήν ἀρχή τῆς μεγίστης πιθανότητος (Maximum Likelihood Principle) θεωροῦμε σκόπιμο νά παρουσιάσουμε τά βασικά στοιχεῖα τῆς ἀρχῆς αὐτῆς (βλέπε καί Mood and Graybill (1963) σελ. 178-184 καί Dhrymes (1970) σελ. 114-123)).

Ἄν ἔχουμε μιά τυχαία μεταβλητή x μέ συνάρτηση πυκνότητος (density function)

$$f(x;\theta) \tag{3.1}$$

ὅπου θ εἶναι μιά ἄγνωστη παράμετρος, τότε ὁ ἐκτιμητής μεγίστης πιθανότητος τῆς παραμέτρου $\theta, \tilde{\theta}$ εἶναι ἐκεῖνος πού μεγιστοποιεῖ τή συνάρτηση $f(x;\theta)$. Ἄν, δηλαδή, ἔχουμε ἕναν ὁποιοδήποτε ἄλλο ἐκτιμητή τῆς $\theta, \hat{\theta}$, ὁ ἐκτιμητής $\tilde{\theta}$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$f(x;\tilde{\theta}) > f(x;\hat{\theta}) \tag{3.2}$$

Ὁ ἐκτιμητής $\tilde{\theta}$ μπορεῖ νά βρεθῆ μέ τήν παραγώγιση τῆς (3.1) καί τήν ἐξίσωση τῆς παραγώγου μέ τό μηδέν.

Ἄν τώρα πάρουμε ἕνα ~~τυχαῖο δεῖγμα~~ (random sample) n τυχαίων μεταβλητῶν x_i; $i = 1,\ldots,n$ μέ συνάρτηση πυκνότητος τή (3.1) τότε (βλέπε καί Λαμπράκη (1972) σελ. 114) ἡ (ἀπό ´οινοῦ) συνάρτηση πιθανότητος (likelihood function) εἶναι

$$\mathcal{L} = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\ldots f(x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \tag{3.3}$$

Ὅπως στήν προηγούμενη περίπτωση ὁ $\tilde{\theta}$ εἶναι ἐκεῖνος ὁ ἐκτιμητής πού μεγιστοποιεῖ τήν (3.1), ἔτσι καί στήν περίπτωση τῆς (3.3) ὁ ἐκτιμητής μεγίστης πιθανότητος τῆς $\theta, \tilde{\theta}$ εἶναι ἐκεῖνος πού μεγιστοποιεῖ τήν (3.3) (ἐφόσον ἡ συνάρτηση αὐτή ἔχει μέγιστο καί ἱκανοποιοῦνται ὁρισμένες συνθῆκες (βλέπε Mood and Graybill(1963)) Στήν περίπτωση τῆς (3.1) ὁ $\tilde{\theta}$ εἶναι συνάρτηση τῆς γνωστῆς τυχαίας μεταβλητῆς x καί στήν περίπτωση τῆς (3.3) τῶν x_i; $i = 1,2,\ldots,n$. Γιά νά βροῦμε τόν ἐκτιμητή στήν τελευταία περίπτωση ἐπιλύνουμε τήν ἐξίσωση,

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\theta} = 0 \tag{3.4}$$

ὡς πρός θ.

'Αντί γιά μιά, μπορεῖ νά ἔχουμε πολλές ἄγνωστες παραμέτρους, ἄς ποῦμε $p < n$. Τότε ἡ συνάρτηση πιθανότητος (πάλι ἐφόσον οἱ x_i εἶναι τυχαῖες μεταβλητές) εἶναι:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p) \tag{3.5}$$

Στήν περίπτωση αὐτή γιά νά βροῦμε τούς ἐκτιμητές μεγίστης πιθανότητος $\tilde{\theta}_j$, ἐπιλύνουμε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_j} = 0 \ ; \quad j = 1,2,\ldots,p \tag{3.6}$$

'Εφόσον ὁ λογάριθμος τῆς $\mathcal{L}$ εἶναι μονότονη συνάρτηση (monotonic or monotone function)
ἔπεται ὅτι οἱ τιμές θ_j πού μεγιστοποιοῦν τήν

$$L = \log\mathcal{L} \tag{3.7}$$

μεγιστοποιοῦν καί τήν (3.5).

ΙΙ. Ἐφαρμογὴ τῆς Μεθόδου τῆς Μεγίστης Πιθανότητος στὸ Κλασσικὸ Γραμμικὸ Ὑπόδειγμα

Ἐφόσον, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση (ii) στό Κεφάλαιο 2, ἡ X εἶναι σταθερή σέ ἐπαναλαμβανόμενα δείγματα, μποροῦμε νά διατυπώσουμε τίς ὑποθέσεις (iv) καί (v) σάν ἀναμενόμενες τιμές κάτω ἀπό τή συνθήκη (conditional) ὅτι ἡ X εἶναι σταθερή (βλέπε Theil (1971) σελ. 109-110).

(iv.a) $E(y|X) = X\beta$

(v.a) $Var\ (y/X) = E\left[(y-X\beta)\ (y-X\beta)'/X\right] = \sigma^2 I$

Ἄν στίς ὑποθέσεις αὐτές προσθέσουμε καί τήν ὑπόθεση ὅτι τό διάνυσμα y ἀκολουθεῖ τήν κανονική κατανομή (normal distribution) δηλαδή ὑποθέσουμε ὅτι οἱ y_t εἶναι ἀνεξάρτητες (independent) τυχαῖες μεταβλητές καί ἀκολουθοῦν ὅλες τήν κανονική κατανομή, δηλαδή

(vi) y_t εἶναι $N(x_{t.}\beta,\ \sigma^2)$

τότε μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἀρχή τῆς μεγίστης πιθανότητος, πού παρουσιάσαμε στό προηγούμενο τμῆμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ. Στήν περίπτωση τοῦ κλασσικοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος ἡ συνάρτηση πυκνότητος, ἐφόσον ἰσχύει ἡ συνθήκη (vi) εἶναι:

$$f(y_t;\ x_{t.}\beta,\ \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\cdot(y_t-x_{t.}\beta)^2} = (\sigma^2 2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t-x_{t.}\beta)^2} \quad (3.8)$$

καί ἡ συνάρτηση πιθανότητος γιά τή y_t, $t = 1,2,\ldots,T$, εἶναι:

$$\mathcal{L}(y;\ X\beta,\sigma^2 I) = \prod_{t=1}^{T} (\sigma^2 2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t-x_{t.}\beta)^2}$$

$$= (\sigma^2 2\pi)^{-\frac{T}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(y_t-x_{t.}\beta)^2} \quad (3.9)$$

'Εφαρμόζοντας τό λογαριθμικό μετασχηματισμό (logarithmic transformation) (3.7) στήν (3.9) ἔχουμε:

$$L = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - T\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - x_{t.}\beta)^2 \qquad (3.10)$$

'Εφόσον

$$(y-X\beta)'(y-X\beta) = \sum_{t=1}^{T}(y_t - x_{t.}\beta)^2 \qquad (3.11)$$

ἡ (3.10) γίνεται:

$$L = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - T\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)'(y-X\beta)$$

$$= -\frac{T}{2}\log(2\pi) - T\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y-2y'X\beta+\beta'X'X\beta) \qquad (3.12)$$

Τό πρόβλημά μας τώρα εἶναι νά βροῦμε τούς ἐκτιμητές μεγίστης πιθανότητος τῶν β καί σ^2. Γιά τό σκοπό αὐτό παραγωγίζουμε τήν (3.12) ὡς πρός β καί σ. Οἱ παράγωγοι αὐτοί εἶναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + 2X'X\beta) \qquad (3.13)$$

καί

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{T}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}(y-X\beta)'(y-X\beta) \qquad (3.14)$$

Ἄν ἐξισώσουμε τήν (3.13) μέ τό μηδέν καί τήν ἐπιλύσουμε ὡς πρός $\widetilde{\beta}$ (πού εἶναι ὁ ἐκτιμητής μεγίστης πιθανότητος τοῦ β) βρίσκουμε:

$$\widetilde{\beta} = (X'X)^{-1}X'y \qquad (3.15)$$

ἀλλά τό δεξιό μέλος τῆς (3.15) εἶναι τό ἴδιο μέ τό δεξιό μέλος τῆς (2.35), δηλαδή,

$$\tilde{\beta} = b \tag{3.16}$$

Ἄρα ὁ Ἐκτιμητής Μεγίστης Πιθανότητος (Ε.Μ.Π.) τοῦ β εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν Ἐκτιμητή τῶν Ἐλαχίστων Τετραγώνων (Ε.Ε.Τ.).

Ἐξισώνοντας τήν (3.14) μέ τό μηδέν, ἀντικαθιστώντας τήν β μέ τήν (3.15) καί ἐπιλύνοντας ὡς πρός σ^2 ἔχουμε

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{(y-X\tilde{\beta})'(y-X\tilde{\beta})}{T} \tag{3.17}$$

καί ἀφοῦ ἰσχύει ἡ (3.16), χρησιμοποιώντας τήν (2.30) ἔχουμε:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{(y-Xb)'(y-Xb)}{T} = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T} \tag{3.18}$$

Συγκρίνοντας τήν (3.18) μέ τήν (2.47) βλέπουμε ὅτι ὁ Ε.Μ.Π τῆς σ^2 δέν εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν s^2. Ἐφόσον ὁ τελευταῖος εἶναι ἀμερόληπτος, ὁ πρῶτος δέν εἶναι. Ἄν τώρα ἐπιλύσουμε τήν (2.47) ὡς πρός $\hat{u}'\hat{u}$ ἔχουμε:

$$\hat{u}'\hat{u} = (T-n)s^2 \tag{3.19}$$

Ἀντικαθιστώντας τήν (3.19) στή (3.18) ἔχουμε

$$\tilde{\sigma}^2 = \left(\frac{T-n}{T}\right) s^2 \tag{3.20}$$

Ἐφόσον ὅμως ὁ ἀριθμός τῶν ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν, n, παραμένει σταθερός, ἔχουμε:

$$\lim_{T\to\infty} \left(\frac{T-n}{T}\right) = 1 \tag{3.21}$$

Ἑπομένως,

$$\lim_{T\to\infty} E(\tilde{\sigma}^2) = \lim_{T\to\infty} E\left[\left(\frac{T-n}{T}\right)s^2\right] = \lim_{T\to\infty}\left[\left(\frac{T-n}{T}\right) E(s^2)\right] = $$
$$= 1.\sigma^2 = \sigma^2 \tag{3.22}$$

Κατά συνέπεια ὁ Ε.Μ.Π. τῆς σ^2, $\tilde{\sigma}^2$, εἶναι ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ σ^2 εἶναι γνωστή καί παραγωγίσουμε τήν (3.13) ὡς πρός β', ἔχουμε:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'} = -\left(\frac{X'X}{\sigma^2}\right) \tag{3.23}$$

Ἐφόσον ἡ σ^2 εἶναι θετική καί ἡ $(X'X)$ θετικά ὁρισμένη, ἔπεται ὅτι ἡ (3.23) εἶναι ἀρνητικά ὁρισμένη καί ἄρα ἔχουμε μέγιστο.

Τέλος (βλέπε Kendall and Stuart, vol 2 (1973) σελ. 53).

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = -\left\{E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'}\right]\right\}^{-1} = \left(\frac{X'X}{\sigma^2}\right)^{-1} = \sigma^2(X'X)^{-1} \tag{3.24}$$

Μιά σύγκριση ἀνάμεσα στήν (3.24) καί (2.58) δείχνει ὅτι:

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}) = \mathrm{Var}(b) \tag{3.25}$$

Ἄν ἰσχύουν οἱ (iv.α) καί (v.α) καί διατυπώναμε τήν ὑπόθεση (vi) ὡς ἑξῆς:

$$\text{(vi.α)}\quad \mathbf{y} \text{ εἶναι } N(X\beta, \sigma^2 I) \tag{3.26}$$

τότε θά μπορούσαμε νά ἐφαρμόζαμε ἀπευθείας τήν κανονική κατανομή γιά T μεταβλητές (βλέπε Dhrymes (1970) σελ. 12) δηλαδή,

$$\mathcal{L}(\mathbf{y};\ X\beta, \sigma^2 I) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}}(\det \sigma^2 I)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-X\beta)'(\sigma^2 I)^{-1}(\mathbf{y}-X\beta)}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{T}{2}}(\sigma^{2T})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}-X\beta)'(\mathbf{y}-X\beta)} \tag{3.27}$$

καί ὁ λογαριθμικός μετασχηματισμός τῆς (3.27), δίνει τήν (3.12).

III. Ἔλεγχος Σημαντικότητος ἑνός Στοιχείου τοῦ Διανύσματος b

Γιά τόν ἔλεγχο αὐτό χρειάζεται ν'ἀποδείξουμε πρῶτα τά ἑξῆς:

(a) Ἐφόσον ἰσχύει ἡ (vi.α), ἔπεται (βλέπε Mood and Graybill(1963) σελ. 226) ὅτι (ἀφοῦ ἰσχύει καί ἡ ὑπόθεση (ii) τοῦ Κεφαλαίου 2)

$$u \text{ εἶναι } N(0, \sigma^2 I) \tag{3.28}$$

Ἄν τώρα ὁρίσουμε

$$v = H'u \tag{3.29}$$

ὅπου H εἶναι μιά σταθερή ὀρθογώνια μήτρα τέτοια ὥστε,

$$Q = H\Lambda H' \tag{3.30}$$

ὅπου Q εἶναι ἡ (2.39) καί Λ εἶναι ἡ μήτρα μέ τίς χαρακτηριστικές ρίζες τῆς Q πού, σύμφωνα μέ ὅσα δείξαμε στή Γ.Α.σελ. 116, εἶναι ἴσες μέ τή μονάδα ἤ τό μηδέν, τότε, ἡ σχέση (2.41) μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$\hat{u}'\hat{u} = u'Qu = u'H\Lambda H'u = v'\Lambda v \tag{3.31}$$

Ἄν τώρα θέσουμε

$$v' = (v_1', v_2') \tag{3.32}$$

ὅπου

v_1 καί v_2 εἶναι ὑποδιανύσματα μέ (ἀντίστοιχα) T-n καί n συντεταγμένες καί ἐφόσον (βλέπε Γ.Α. σελ. 110)

$$r(Q) = tr(Q) = T-n \tag{3.33}$$

ἕπεται ὅτι ἡ μήτρα Λ ἔχει T-n στοιχεῖα στή διαγώνιό της, πού εἶναι ἴσα μέ τή μονάδα ἐνῶ τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν, ἄρα

$$v'\Lambda v = (v_1', v_2') \begin{bmatrix} I_{T-n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1'v_1 \tag{3.34}$$

Ἐφόσον ἡ H εἶναι σταθερή μήτρα καί ἐφόσον ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις (iv) καί (v) τοῦ Κεφαλαίου 2, ἔχουμε:

$$E(v) = H'E(u) = o \tag{3.35}$$

καί

$$E(vv') = E(H'uu'H) = H'E(uu')H =$$

$$\sigma^2 H'IH = \sigma^2 H'H = \sigma^2 I \tag{3.36}$$

Ἐπομένως, ἐφόσον ἰσχύει καί ἡ (3.28), ἔχουμε ὅτι:

$$v \text{ εἶναι } N(O, \sigma^2 I) \tag{3.37}$$

Ἄν γράψουμε

$$v_1' = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1,T-n}) \tag{3.38}$$

Τότε ἡ (3.34) μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς

$$v_1'v_1 = \sum_{i=1}^{T-n} v_{1i}^2 \tag{3.39}$$

Ἄν τώρα διαιρέσουμε τήν (2.41) διά σ^2, ἔχουμε:

$$\frac{\hat{u}'\hat{u}}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{T-n} v_{1i}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{T-n} \left(\frac{v_{1i}}{\sigma}\right)^2 \tag{3.40}$$

Ἐφόσον ὅμως ἰσχύει ἡ (3.37) ἔπεται ὅτι,

$$\frac{v_{1i}}{\sigma} \text{ εἶναι } N(0,1) \tag{3.41}$$

Ἄρα (βλέπε Mood and Graybill (1963) σελ. 223)

$$\sum_{i=1}^{T-n} \left(\frac{v_{1i}}{\sigma}\right)^2 \text{ εἶναι } \chi^2_{T-n} \tag{3.42}$$

(b) Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις (ii) τοῦ Κεφαλαίου 2 καί (vi) τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ, ἔπεται (βλέπε Dhrymes (1970) σελ. 15) ὅτι:

$$b \quad \text{εἶναι } N\left((X'X)^{-1}XX'\beta,\ (X'X)^{-1}X'\sigma^2 IX(X'X)^{-1}\right) =$$

$$= N(\beta, \sigma^2 (X'X)^{-1}) \tag{3.43}$$

Ἄν θέσουμε

$$V = (X'X)^{-1} \tag{3.44}$$

καί τό διαγώνιο στοιχεῖο στή θέση i τῆς (3.44) εἶναι v_{ii}, τότε,

$$b_i \quad \text{εἶναι} \quad N(\beta_i, \sigma^2 v_{ii}) \tag{3.45}$$

καί

$$\frac{b_i - \beta_i}{\sigma\sqrt{v_{ii}}} \quad \text{εἶναι} \quad N(0,1) \tag{3.46}$$

(c) Τέλος ἐφόσον

$$E(\hat{u}) - E(Qu) - QE(u) = o \tag{3.47}$$

ἔπεται ὅτι:

$$E\left[(\hat{u}-o)(b-\beta)'\right] = E\left[(I-X(X'X)^{-1}X')uu'X(X'X)^{-1}\right]$$

$$= \sigma^2 \left[(I-X(X'X)^{-1}X')X(X'X)^{-1}\right]$$

$$= \sigma^2 \left[X(X'X)^{-1} - X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}\right] = 0 \tag{3.48}$$

ὅπου 0 εἶναι ἡ $T \times n$ μηδενική μήτρα.

Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ σχέσεις (3.42), (3.46) καί (3.48), ἔπεται (βλέπε Mood and Graybill (1963) σελ. 233) ὅτι ἡ

$$t = \frac{\dfrac{b_i-\beta_i}{\sigma\sqrt{v_{ii}}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{u}'\hat{u}}{\sigma^2(T-n)}}} = \frac{\dfrac{b_i-\beta_i}{\sigma\sqrt{v_{ii}}}}{\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{s^2}} = \frac{b_i-\beta_i}{s\sqrt{v_{ii}}} \qquad (3.49)$$

ἀκολουθεῖ τήν **κατανομή τοῦ Student t(Student's t distribution)** μέ (T-n) βαθμούς ἐλευθερίας (ὁ παρανομαστής $s\sqrt{v_{ii}}$ στήν (3.49) εἶναι, φυσικά, τό **τυπικό σφάλμα ἐκτιμήσεως (standard error of estimate)** τῆς β_i).

Ἄν τώρα ἔχουμε μιά συγκεκριμένη τιμή τῆς β_i, ἄς ποῦμε β_i^o, μπορεῖ νά θέλουμε νά κάνουμε ἕναν ἀπό τούς ἀκολούθους τρεῖς **ἐλέγχους (tests)** (βλέπε καί Κεβόρκ (1972β) σελ. 161-3) **στό ἐπίπεδο στατιστικῆς σημαντικότητος (level of significance)** α

Ἐλεγχομένη Ὑπόθεση (Maintained Hypothesis)	Διαζευκτική Ὑπόθεση (Alternative Hypothesis)	
H_o: $\beta_i = \beta_i^o$	H_1: $\beta_i \neq \beta_i^o$	(3.50)
H_o: $\beta_i = \beta_i^o$	H_1: $\beta_i > \beta_i^o$	(3.51)
H_o: $\beta_i = \beta_i^o$	H_1: $\beta_i < \beta_i^o$	(3.52)

Στήν περίπτωση (3.50) ἔχουμε ἕνα **δικατάληκτο κριτήριο ἐλέγχου (two-tailed test)**. Γιά νά κάνουμε τόν ἔλεγχο ἀντικαθιστοῦμε τήν β_i^o στήν (3.49) καί ἐξετάζουμε ἄν

$$\left|\frac{b_i-\beta_i^o}{s\sqrt{v_{ii}}}\right| > t_{\alpha/2} \qquad (3.53)$$

ὅπου ἡ $t_{\alpha/2}$ εἶναι ἡ τιμή πού δίνεται στούς πίνακες γιά τήν κατανομή τοῦ Student t στό ἐπίπεδο στατιστικῆς σημαντικότητος α/2 γιά T-n βαθμούς ἐλευθερίας (βλέπε Πίνακες Κεβόρκ (1972ε). Στήν περί -

πτωση πού ή ἀνισότητα (3.53) ἰσχύει ἀπορρίπτουμε τήν H_o καί δεχόμαστε τήν H_1.

Μιά ὑποπερίπτωση τῆς (3.50) πού παρουσιάζεται πολύ συχνά στήν Ἐφαρμοσμένη Οἰκονομετρία εἶναι ἡ ἐξακρίβωση τοῦ κατά πόσον ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητή x_i ἀσκεῖ στατιστικά σημαντική ἐπίδραση πάνω στήν ἐξαρτημένη μεταβλητή y (πάλι στό ἐπίπεδο σημαντικότητος α). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ $\beta_i^o = 0$, ὁπότε ἐξετάζουμε ἄν ἰσχύη ἡ ἀνισότητα

$$\left| \frac{b_i}{s\sqrt{v_{ii}}} \right| > t_{\alpha/2} \tag{3.54}$$

Ἄν ἰσχύη ἡ (3.54) τότε συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ἐπίδραση τῆς x_i εἶναι σημαντική.

Στίς περιπτώσεις (3.51) καί (3.52) ἔχουμε τό **μονοκατάληκτο κριτήριο ἐλέγχου (one-tailed test)** καί γιά μέν τήν περίπτωση τῆς (3.51) δεχόμαστε τήν H_1 ἄν ἰσχύη ἡ ἀνισότητα

$$\frac{b_i - \beta_i^o}{s\sqrt{v_{ii}}} > t_\alpha \tag{3.55}$$

ἐνῶ γιά τήν (3.52) δεχόμαστε τήν H_1 ἄν ἰσχύη ἡ ἀνισότητα

$$\frac{b_i - \beta_i^o}{s\sqrt{v_{ii}}} < -t_\alpha \tag{3.56}$$

Εἶναι, φυσικά, αὐτονόητο ὅτι σ'ὅλες τίς περιπτώσεις τῶν ἐλέγχων (3.50), (3.51) καί (3.52) θά ἔχουμε ἐξέταση ἄν τό πρόσημο τῆς b_i εἶναι ἐκεῖνο πού μᾶς λέει ἡ θεωρία.

Ὅπως εἶναι γνωστό (βλέπε, π.χ., Mood and Graybill (1963) σελ. 252).

$$P\left\{- t_{\alpha/2} < \frac{b_i - \beta_i}{s\sqrt{v_{ii}}} \le t_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha \tag{3.57}$$

ὅπου P συμβολίζει τήν πιθανότητα.

Ἡ (3.57) μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$P\left\{b_i - t_{\alpha/2} s\sqrt{v_{ii}} < \beta_i < b_i + t_{\alpha/2} s\sqrt{v_{ii}}\right\} = 1-\alpha \qquad (3.58)$$

Στό ἐπίπεδο στατιστικῆς σημαντικότητος α, κατά συνέπεια, τό 100(1-α) διάστημα ἐμπιστοσύνης (confidence interval) τῆς β_i εἶναι:

$$b_i \pm t_{a/2}\, s\sqrt{v_{ii}} \qquad (3.59)$$

IV. Ὁ Συντελεστής Προσδιορισμοῦ

Πρίν προχωρήσουμε σέ ἄλλους στατιστικούς ἐλέγχους θεωροῦμε σκόπιμο νά δώσουμε, στό τμῆμα αὐτό, τόν ὁρισμό τοῦ συντελεστῆ προσδιορισμοῦ (coefficient of determination).

Γιά τό σκοπό αὐτό θά πρέπη ν'ἀποδείξουμε πρῶτα τά ἑξῆς:

Ἀπό τήν (2.34) ἔχουμε:

$$X'y - X'Xb = X'(y-Xb) = 0 \qquad (3.60)$$

Ἡ (3.60) δείχνει (βλέπε Γ.Α. σελ. 14) ὅτι ἡ μήτρα X καί τό διάνυσμα y-Xb εἶναι ὀρθογώνια.

Ἀφοῦ ἰσχύει ἡ (3.60) ἔπεται ὅτι:

$$x'_{.j}(y-Xb) = 0 \qquad (3.61)$$

ὅπου $x_{.j}$ εἶναι ἡ στήλη j τῆς μήτρας X. Ἄν πάρουμε τήν πρώτη στήλη (j=1), δηλ. τήν (2.144), τότε σύμφωνα μέ τήν (3.61), ἔχουμε:

$$i'(y-Xb) = 0 \qquad (3.62)$$

Σύμφωνα ὅμως μέ τόν ὁρισμό (2.37), ἡ (3.62) μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$i'\hat{u} = \sum \hat{u}_t = 0 \qquad (3.63)$$

ὅπου τό ἄθροισμα αὐτό, ὅπως καί τά ἑπόμενα,εἶναι ἀπό t=1 μέχρι t=T.

Μέ ἄλλα λόγια τό ἄθροισμα τῶν καταλοίπων εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν.

Ἄν θέσουμε

$$\hat{y} = Xb \qquad (3.64)$$

καί χρησιμοποιήσουμε τίς (2.50) καί (3.64) μποροῦμε νά γράψουμε

$$\hat{u}'\hat{u} = y'y - \hat{y}'\hat{y} \qquad (3.65)$$

Μέ τό συμβολισμό τῶν ἀθροισμάτων ἡ (3.65) γράφεται ὡς:

$$\sum \hat{u}_t^2 = \sum y_t^2 - \sum \hat{y}_t^2 \qquad (3.66)$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τήν (3.64) στήν (3.62) τότε,

$$i'(y-\hat{y}) = \sum y_t - \sum \hat{y}_t = 0 \qquad (3.67)$$

Ἐφ'ὅσον ἰσχύει ἡ (3.67), μποροῦμε νά προσθέσουμε στήν(3.66) τή διαφορά

$$\frac{\left(\sum y_t\right)^2}{T} - \frac{\left(\sum \hat{y}_t\right)^2}{T} \qquad (3.68)$$

χωρίς νά ἀλλάξη τό ἀποτέλεσμα. Ἄρα ἔχουμε:

$$\sum \hat{u}_t^2 = \sum y_t^2 - \sum \hat{y}_t^2 + \frac{\left(\sum y_t\right)^2}{T} - \frac{\left(\sum \hat{y}_t\right)^2}{T} =$$

$$= \left[\sum y_t^2 - \frac{\left(\sum y_t\right)^2}{T} \right] - \left[\sum \hat{y}_t^2 - \frac{\left(\sum y_t\right)^2}{T} \right]$$

$$= \sum (y_t - \bar{y})^2 - \sum (\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2 \qquad (3.69)$$

ὅπου

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{T} \quad \text{καί} \quad \bar{\hat{y}} = \frac{\sum \hat{y}_t}{T} \tag{3.70}$$

Ἄν τώρα διαιρέσουμε τήν (3.69) διά

$$\sum (y_t - \bar{y})^2 \neq 0 \tag{3.71}$$

ἔχουμε:

$$\frac{\sum \hat{u}_t^2}{(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum (\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} \tag{3.72}$$

Ἀπό τήν (3.65) καί (3.66) φαίνεται ὅτι ἡ (3.72) μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y} = 1 - \frac{\hat{y}'\hat{y}}{y'y} \tag{3.73}$$

Ὁ συντελεστής προσδιορισμοῦ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$R^2 = \frac{\hat{y}'\hat{y}}{y'y} = \frac{b'X'Xb}{y'y} = \frac{b'X'y}{y'y} \tag{3.74}$$

καί ἄρα ἡ (3.73) γράφεται ὡς,

$$\frac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y} = 1 - R^2 \tag{3.75}$$

Ὁπότε ὁ συντελεστής προσδιορισμοῦ μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y} = 1 - \frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} \tag{3.76}$$

Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τή (3.72)

$\sum(y_t-\bar{y})^2$ = Συνολική Διακύμανση (Total Variance)

$\sum(\hat{y}_t-\bar{\hat{y}})^2$ = Ἑρμηνευόμενη Διακύμανση (Explained Variance)

$\sum\hat{u}_t^2$ = Ἀνερμήνευτη Διακύμανση (Unexplained Variance).

Ἐξάλλου ἀπό τήν (3.73) ἔχουμε

$y'y$ = Συνολικό Ἄθροισμα Τετραγώνων-(ΣΑΤ)-(Total Sum of Squares)-(TSS)

$\hat{y}'\hat{y}$ = Ἑρμηνευόμενο Ἄθροισμα Τετραγώνων -(ΕΑΤ) - (Explained Sum of Squares)-(ESS)

$\hat{u}'\hat{u}$ = Ἄθροισμα Τετραγώνων Καταλοίπων-(ΚΑΤ)- (Sum of Squared Residuals)-(RSS)

Ἑπομένως μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ὁ συντελεστής προσδιορισμοῦ (πολλαπλασιασμένος μέ 100) ἀντιπροσωπεύει τό ποσοστό ἐκεῖνο τῆς συνολικῆς διακυμάνσεως πού ἑρμηνεύεται ἀπό τίς ἀνεξάρτητες μεταβλητές πού περιλαμβάνονται στό ὑπόδειγμα (2.26) ἤ ποσοστό πού ἀντιπροσωπεύει τό ΕΑΤ στό ΣΑΤ.

Φυσικά ἀπό τήν (3.65) ἔχουμε:

$$\text{ΣΑΤ} = \text{ΕΑΤ} + \text{ΚΑΤ} \tag{3.77}$$

Ἀπό τήν (3.75) ἔχουμε:

$$1-R^2 = \frac{\sum\hat{u}_t}{\sum(y_t-\bar{y})^2} \tag{3.78}$$

Ὅπως εἶναι φανερό σ'αὐτά τά ἀθροίσματα τετραγώνων δέν λαμβάνονται ὑπόψη οἱ βαθμοί ἐλευθερίας (ἤ ὁ ἀριθμός τῶν ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν). Γιά νά γίνη αὐτό χρησιμοποιοῦνται στόν ἀριθμητή τῆς

(3.78) ὁ ἀμερόληπτος ἐκτιμητής τῆς σ^2 καί στόν παρανομαστή ὁ ἀμερόληπτος ἐκτιμητής τῆς διακυμάνσεως τῶν y_t, ὁπότε τόν R^2 ἀντικαθιστᾶ ὁ $\bar{R}^2$, δηλαδή ὁ **διορθωμένος (corrected)** ἤ **προσαρμοσμένος (adjusted)** συντελεστής προσδιορισμοῦ. Ἔχουμε, δηλαδή,

$$1-\bar{R}^2 = \frac{\dfrac{\sum \hat{u}_t^2}{T-n}}{\dfrac{\sum (y_t-\bar{y})^2}{T-1}} = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sum (y_t-\bar{y})^2}\left(\frac{T-1}{T-n}\right) = (1-R^2)\left(\frac{T-1}{T-n}\right) \quad (3.79)$$

Ἄν ἐπιλύσουμε τήν (3.79) ὡς πρός $\bar{R}^2$ βρίσκουμε:

$$\bar{R}^2 = 1-(1-R^2)\left(\frac{T-1}{T-n}\right) = 1-(1-R^2)\left(\frac{T-n+n-1}{T-n}\right) =$$

$$= R^2-(1-R^2)\left(\frac{n-1}{T-n}\right) \quad (3.80)$$

Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τήν (3.80), συνήθως $\bar{R}^2 < R^2$ ἀφοῦ $(1-R^2)>0$

Ὅταν ὅμως $n=1$ ἤ ὅταν $R^2=1$, τότε $\bar{R}^2= R^2$

Ὅπως σημειώνει ὁ Theil (1971), σελ. 179, ὁ διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμοῦ δέν εἶναι ἀμερόληπτος διότι τά ἀνάλογα τῶν R^2 καί $\bar{R}^2$ δέν ἔχουν ὁριστῆ στόν πληθυσμό (βλέπε ὅμως καί Barten (1962)).

Ἀπό τήν (3.80) φαίνεται ὅτι ἡ διαφορά

$$R^2-\bar{R}^2 = (1-R^2)\left(\frac{n-1}{T-n}\right) \quad (3.81)$$

εἶναι μεγαλύτερη ὅσο μικρότερος εἶναι ὁ παρανομαστής τοῦ κλάσματος $\left(\frac{n-1}{T-n}\right)$. Ἄν τό T παραμένει σταθερό, ὁ παρανομαστής γίνεται μικρότερος ὅσο αὐξάνει ὁ ἀριθμός τῶν ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν (κι' ἑπομένως τῶν παραμέτρων πού ἐκτιμοῦμε στό ὑπόδειγμα (2.26)). Ὑπάρχει μάλιστα καί περίπτωση πού, στή σχέση (3.80) ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ δεξιοῦ μέλους νά εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν πρῶτο ὁπότε ὁ $\bar{R}^2$ εἶναι ἀρνητικός.

Ἀπό τήν ἄλλη μεριά ἄν τό n παραμένη σταθερό καί τό $T \to \infty$ τό δεξιό μέλος τῆς (3.81) τείνει πρός τό μηδέν, ὁπότε ὁ $\bar{R}^2 \to R^2$

V. Ἔλεγχος Σημαντικότητος τοῦ Ὑποδιανύσματος b_2

Στό τμῆμα III τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ ἀσχοληθήκαμε μέ τόν ἔλεγχο τῆς σημαντικότητος ἑνός στοιχείου τοῦ διανύσματος b. Στό τμῆμα αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ τόν ἔλεγχο τῆς σημαντικότητος(χρησιμοποιώντας τήν ὁρολογία καί τό συμβολισμό τοῦ τμήματος VIII τοῦ Κεφαλαίου 2)τῶν n_2 στοιχείων τοῦ διανύσματος b πού ἀποτελοῦν τό ὑποδιάνυσμα

$$b_2' = (b_{n_1+1}, b_{n_1+2}, \ldots, b_n) \tag{3.82}$$

Γιά τό σκοπό αὐτό ἀρχίζουμε ἀπό τό ὑπόδειγμα

$$y = X_1\beta_1^* + u_1 \tag{3.83}$$

δηλαδή τό ὑπόδειγμα μέ n_1 ἀνεξάρτητες μεταβλητές.

Ὁ Συντελεστής προσδιορισμοῦ τοῦ ὑποδείγματος αὐτοῦ εἶναι

$$R_1^2 = 1 - \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{y'y} \tag{3.84}$$

Ὅπως εἴδαμε στό προηγούμενο τμῆμα ὁ συντελεστής προσδιορισμοῦ τοῦ ὑποδείγματος (2.103) πού περιλαμβάνει τίς n_1+n_2 μεταβλητές εἶναι ὁ (3.76).

Ἀφαιρώντας τήν (3.84) ἀπό τήν (3.76) ἔχουμε:

$$R^2 - R_1^2 = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y} - 1 + \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{y'y} = \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}'\hat{u}}{y'y} \tag{3.85}$$

Ἡ (3.85) δείχνει τό ποσοστό τῆς διακυμάνσεως τῶν y_t πού ἐρμηνεύεται ἀπό τήν προσθήκη τῶν n_2 ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν. Γιά νά δοῦμε ἄν τό ποσοστό αὐτό εἶναι στατιστικά σημαντικό χρησιμοποιοῦμε τό λόγο

$$\frac{\dfrac{\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}'\hat{u}}{y'y}}{\dfrac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y}} = \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}'\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}} \tag{3.86}$$

Ἄν στό ὑπόδειγμα (2.103) κάνουμε τήν ὑπόθεση

$$H_0 : \beta_2 = o \tag{3.87}$$

καί ἄν διατηρήσουμε τίς ὑποθέσεις (iv) καί (v) τοῦ Κεφαλαίου 2 γιά τά u, τότε, ἄν ἡ (3.87) γίνη ἀποδεκτή, οἱ διαταρακτικοί ὅροι τῆς (2.103) καί τῆς (3.83) εἶναι οἱ ἴδιοι, δηλαδή

$$u = u_1 \tag{3.88}$$

Ἐφόσον ἰσχύει ἡ (3.87), τότε, ἐφαρμόζοντας τά ὅσα ἀναπτύξαμε στό Κεφάλαιο 2, τά κατάλοιπα ἀπό τήν ἐκτίμηση τοῦ ὑποδείγματος (3.83) εἶναι

$$\hat{u}_1 = [I - X_1(X_1'X_1)^{-1} X_1'] u \tag{3.89}$$

Ἀντικαθιστώντας τήν (2.38) καί (3.89) στήν (3.86) ἔχουμε:

$$\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}'\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}} = \frac{u'[I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']u - u'[I - X(X'X)^{-1}X']u}{u'[I - X(X'X)^{-1}X']u} \tag{3.90}$$

Χρησιμοποιώντας τήν (2.133) μποροῦμε νά γράφουμε τ ν ἀριθμητή τῆς (3.90) ὡς ἑξῆς:

$$u'[X(X'X)^{-1}\ X' - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']u =$$

$$= u'\left\{X\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}X' - X\begin{bmatrix}(X_1'X_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}X'\right\}u \qquad (3.91)$$

Σύμφωνα μέ ὅσα δείξαμε στή Γ.Α. (σελ. 55-57)

$$(X_1'X_1)^{-1} = V_{11} - V_{12}V_{22}^{-1}V_{21} \qquad (3.92)$$

'Αντικαθιστώντας τήν (3.92) στήν (3.91) ἔχουμε:

$$u'\left\{X\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}X' - X\begin{bmatrix}V_{11}-V_{12}V_{22}^{-1}V_{21} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}X'\right\}u =$$

$$= u'\left\{X\begin{bmatrix}V_{12}V_{22}^{-1}V_{21} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}X'\right\}u \qquad (3.93)$$

Ἄν θέσουμε

$$K = \begin{bmatrix}V_{12}V_{22}^{-1}V_{21} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix} \qquad (3.94)$$

Τότε ἡ (3.93) γράφεται

$$u'(X\,K\,X')u \qquad (3.95)$$

Ἄν ἰσχύη ἡ (3.87) τότε ἡ (2.57) σέ συνδυασμό μέ τή (2.133) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$(b-\beta) = \begin{bmatrix} b_1-\beta_1 \\ b_2-0 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}\; X'u = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} X'u \quad (3.96)$$

'Από τή (3.96) βλέπουμε ότι

$$b_2 = (V_{21} \quad V_{22})X'u \quad (3.97)$$

'Από τήν (3.97) βλέπουμε ότι ή (3.93) μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$b_2' \; V_{22}^{-1} b_2 = u'X \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} V_{22}^{-1} \; (V_{21} \; V_{22}) \; X' \; u \quad (3.98)$$

'Επομένως ή (3.95) καί ή (3.98) εἶναι ἴσες.

"Αν θέσουμε

$$Q_2 = XKX' \quad (3.99)$$

καί ἀντικαταστήσουμε τίς (2.41) καί (3.95) στήν (3.86) ἔχουμε:

$$\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}'\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}} = \frac{u'Q_2u}{u'Q\,u} \quad (3.100)$$

"Αν τέλος ἀντικαταστήσουμε τίς (2.50) καί (3.98) στήν (3.86) ἔχουμε:

$$\frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}'\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}} = \frac{b_2'V_{22}^{-1}b_2}{\underline{y}'\underline{y}-b'V^{-1}\;b} \quad (3.101)$$

ὅπου, ὅπως φαίνεται ἀπό τήν (2.133), $V^{-1} = X'X$.

'Η (3.101) δείχνει καθαρότερα ὅτι ὁ ἔλεγχος ἀφορᾶ τό b_2 ἐνῶ ἡ (3.100) εἶναι πιό χρήσιμη σ'ὅ,τι ἀκολουθεῖ.

Ἐξετάζοντας τήν (3.100) βλέπουμε ὅτι πρόκειται γιά τό λόγο δυό τετραγωνικῶν μορφῶν. Ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τό προηγούμενο κεφάλαιο ἡ Q εἶναι μιά ταυτοδύναμη μήτρα καί

$$r(Q) = T-n = T-n_1-n_2 \tag{3.102}$$

Ἄν χρησιμοποιήσουμε τίς (2.41) καί (2.115) μποροῦμε νά γράψουμε τήν τετραγωνική μορφή $u'Q_2u$ ὡς ἑξῆς:

$$u'(Q_1 - Q)u \tag{3.103}$$

Κατά συνέπεια

$$Q_2 = Q_1 - Q \tag{3.104}$$

Ἐφόσον οἱ Q_1 καί Q εἶναι συμμετρικές ἕπεται ὅτι καί ἡ Q_2 εἶναι συμμετρική.

Ἐπιπλέον

$$\begin{aligned} Q_2Q_2 &= (X(X'X)^{-1}X' - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1')(X(X'X)^{-1}X' - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1') = \\ &= X(X'X)^{-1}X' - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'X(X'X)^{-1}X' - X(X'X)^{-1}X'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \\ &+ X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \end{aligned} \tag{3.105}$$

Ἄν πάρουμε τήν

$$X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1X(X'X)^{-1}X' =$$

$$X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1(X_1 \vdots X_2)(X'X)^{-1}\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} =$$

$$(X_1 \vdots X_2)\begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X'X(X'X)^{-1}\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \tag{3.106}$$

καί κατά τόν ἴδιο τρόπο

$$X(X'X)^{-1}X'X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' = X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \qquad (3.107)$$

Ἄρα

$$Q_2Q_2 = X(X'X)^{-1}X' - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' = Q_2 \qquad (3.108)$$

Ἑπομένως ἡ Q_2 εἶναι ταυτοδύναμη

$$\begin{aligned} r(Q_2) &= r[X(X'X)^{-1}X' - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'] = \\ &= tr[(X'X)(X'X)^{-1}] - tr[(X_1'X_1)(X_1'X_1)^{-1}] = \\ &= n - n_1 = n_2 \end{aligned} \qquad (3.109)$$

Τέλος

$$QQ_2 = (I - X(X'X)^{-1}X')(XKX') = XKX' - XKX' = 0 \quad (3.110)$$

Μέ τόν τρόπο πού ἀποδείξαμε τήν (3.42), ἐφόσον ἰσχύουν οἱ (3.28) καί ἡ (3.109), μποροῦμε ν'ἀποδείξουμε ὅτι:

$$\frac{u'Q_2u}{\sigma^2} \quad \text{εἶναι} \quad \chi^2_{n_2} \qquad (3.111)$$

Τέλος ἀφοῦ ἰσχύει καί ἡ (3.110) ὁ λόγος (βλέπε Mood and Graybill (1963) σελ. 231)

$$\frac{\dfrac{u'Q_2u}{\sigma^2(n^2)}}{\dfrac{u'Q\,u}{\sigma^2(T-n)}} = \frac{u'Q_2u}{u'Q\,u}\;\frac{T-n}{n_2} \quad \text{εἶναι} \quad F_{n_2,T-n} \qquad (3.112)$$

Αὐτό εἶναι τό κριτήριο πού χρησιμοποιοῦμε γιά νά δοῦμε ἄν τό ὑποδιάνυσμα b_2 εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδενικό διάνυσμα.

VI. Εἰδικὲς Περιπτώσεις γιὰ τὸ Ὑποδιάνυσμα b_2

(i) Ἡ πρώτη περίπτωση πού θά ἐξετάσουμε εἶναι ἐκείνη ὅπου

$$X_1 = x_{\cdot 1} \quad \text{καί} \quad X_2 = (x_{\cdot 2}, x_{\cdot 3}, \ldots, x_{\cdot n}) \tag{3.113}$$

Στήν περίπτωση αὐτή θέλουμε νά διαπιστώσουμε ἄν τό σύνολο τῶν ἐκτιμήσεων τῶν παραμέτρων τῶν (n-1) ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν (ἡ $x_{\cdot 1}$ δέν εἶναι ἑρμηνευτική μεταβλητή) εἶναι στατιστικά σημαντικό.

Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τήν (3.113), τό ὑπόδειγμα (3.83) ἐξειδικεύεται στήν παλινδρόμηση.

$$y = i\beta_1 + u_1 \tag{3.114}$$

καί, ἐπομένως

$$b_1 = (i'i)^{-1} i'y = \frac{1}{T}\sum y_t = \bar{y} \tag{3.115}$$

Κατά συνέπεια

$$\hat{u}_1'\hat{u}_1 = (y'-i'\bar{y})(y-i\bar{y}) = y'y - T\bar{y}^2 = \sum y_t^2 - \frac{\left(\sum y_t\right)^2}{T} =$$

$$\sum (y_t-\bar{y})^2 \tag{3.116}$$

Ἐφαρμόζοντας τήν (3.76) ἔχουμε:

$$R_1^2 = 1 - \frac{\sum(y_t-\bar{y})^2}{\sum(y_t-\bar{y})^2} = 0 \tag{3.117}$$

Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ σχέσεις (3.76) καί (3.84), ἡ (3.112) μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$\frac{u'Q_2u}{u'Qu} \; \frac{T-1-n_2}{n_2} = \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1 - \hat{u}'\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}} \; \frac{T-1-n_2}{n_2} = \frac{R^2-R_1^2}{1-R^2} \; \frac{T-1-n_2}{n_2} \tag{3.118}$$

'Αντικαθιστώντας τήν (3.117) στήν (3.118) ἔχουμε:

$$\frac{R^2}{1-R^2}\left(\frac{T-n}{n-1}\right) \text{εἶναι } F_{n-1,T-n} \qquad (3.119)$$

'Η (3.119) δίνει τήν κατανομή τοῦ συντελεστῆ προσδιορισμοῦ. Ταυτόχρονα ἡ σχέση αὐτή μπορεῖ νά χρησιμοποιηθῆ γιά νά ἐξακριβωθῆ ἄν τό ποσοστό τῆς διακυμάνσεως πού ἑρμηνεύεται ἀπό τίς n-1 μεταβλητές εἶναι στατιστικά σημαντικό. Γιά νά γίνη σαφέστερη ἡ ἀνάλυση ἀντικαθιστοῦμε στήν (3.119) τίς σχέσεις (3.74) καί(3.75) κι'ἔχουμε:

$$\frac{\dfrac{\hat{y}'\hat{y}}{y'y}}{\dfrac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y}}\left(\frac{T-n}{n-1}\right) = \frac{b'X'y}{\hat{u}'\hat{u}}\left(\frac{T-n}{n-1}\right) \qquad (3.120)$$

Μέ βάση τήν (3.120) καταρτίζουμε τόν ἀκόλουθο πίνακα (βλέπε καί Κεβόρκ (1972γ) σελ. 19) ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως:

Πίνακας 1

Πηγή Μεταβλητικότητος	'Αθροίσματα Τετραγώνων	Βαθμοί 'Ελευθερίας	Μέσος 'Αθροισμάτων Τετραγώνων
X_2	$b'X'y$	n-1	$b'X'y$ / n-1
κατάλοιπα	$\hat{u}'\hat{u}$	T-n	$\hat{u}'\hat{u}$ / T-n
Σύνολο	$y'y$	T-1	$y'y$ / T-1

Ἄν ἐκτιμήσουμε ἕνα συγκεκριμένο ὑπόδειγμα, τότε ἐξετάζουμε ἄν ἡ τιμή πού βρίσκουμε ἐφαρμόζοντας εἴτε τήν (3.119) εἴτε τήν (3.120), εἶναι (στό ἐπίπεδο σημαντικότητος α πού θά διαλέξουμε) μεγαλύτερη (γιά n-1 καί T-n βαθμούς ἐλευθερίας) ἀπό ἐκείνη πού δίνουν οἱ πίνακες τῆς κατανομῆς F. Ἄν εἶναι, τότε καταλήγουμε στό συμπέρασμα ὅτι τό ποσοστό τῆς διακυμάνσεως πού ἑρμηνεύεται ἀπό τίς n-1 ἀνεξάρτητες μεταβλητές (καί ἄρα καί τό ὑποδιάνυσμα b_2 πού ἀντιστοιχεῖ στίς μεταβλητές αὐτές) εἶναι στατιστικά σημαντικό, καί, κατά συνέπεια, ἡ (3.87) ἀπορρίπτεται.

(ii) Ἀπό τήν περίπτωση (i) φαίνεται καθαρά ὅτι μποροῦμε ν' ἀγνοήσουμε στήν ἀνάλυση τήν $x_{.1}$. Κατά συνέπεια στήν περίπτωση πού χωρίζουμε τίς ἑρμηνευτικές μεταβλητές σέ δυό ὁμάδες μποροῦμε νά θέσουμε,

$$X_1 = (x_{.2}, x_{.3}, \ldots, x_{.n_1}) \tag{3.121}$$

καί

$$X_2 = (x_{.n_1+1}, x_{.n_2+1}, \ldots, x_{.n}) \tag{3.122}$$

Στήν περίπτωση αὐτή τό ἄθροισμα τετραγώνων πού προκύπτει ἀπό τήν (3.83) εἶναι:

$$\begin{aligned} b_1^{*\prime} X_1' X_1 b_1^* &= b_1^{*\prime} X_1' y = y' X_1 (X_1' X_1)^{-1} X_1' y = \\ &= y'[I-Q_1]y \end{aligned} \tag{3.123}$$

ἐνῶ τό ἄθροισμα τετραγώνων πού προκύπτει ἀπό τήν προσθήκη τῶν X_2 εἶναι:

$$\begin{aligned} & b'X'Xb - b_1^{*\prime} X_1' X_1 b_1^* = b'X'y - b_1^{*\prime} X_1' y = \\ & = y'X(X'X)^{-1} X'y - y'[I-Q_1]y = y'[I-Q]y - y'[I-Q_1]y = \\ & = y'(Q_1-Q)y = y'Q_2 y \end{aligned} \tag{3.124}$$

Ἄν ἡ ὑπόθεση (3.87) ἀληθεύει, τότε, ἀκολουθώντας τήν ἴδια πορεία ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς (3.91) μποροῦμε νά γράφουμε τήν (3.124) ὅπως τήν (3.98).

Ὁ πίνακας ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως στήν περίπτωση πού οἱ X_1 καί X_2 ὁρίζονται ὅπως οἱ (3.121) καί (3.122) εἶναι:

Πίνακας 2

Πηγή Μεταβλητικότητος	Ἀθροίσματα Τετραγώνων	Βαθμοί Ἐλευθερίας	Μέσος Ἀθροισμάτων Τετραγώνων
X_1	$b_1^{*\prime}X_1'y = y'(I-Q_1)y$	n_1-1	
X_2	$b'X'y-b_1^{*\prime}X_1'y = y'Q_2y$	$n-n_1$	$y'Q_2y/n_2$
$(X_1 \vdots X_2)$	$b'X'y = y'(I-Q)y$	$n-1$	
Κατάλοιπα	$\hat{u}'\hat{u} = y'y-b'X'y$ $= y'Qy$	$T-n$	$y'Qy/T-n$
Σύνολο	$y'y$	$T-1$	

Γιά νά ἐλέγξουμε τήν (3.87) ὑπολογίζουμε τήν τιμή τοῦ λόγου

$$\frac{\frac{y'Q_2y}{n_2}}{\frac{y'Qy}{T-n}} = \frac{y'Q_2y}{y'Qy}\left(\frac{T-n}{n_2}\right) = \frac{b'X'y-b_1^{*\prime}X_1'y}{y'y-b'X'y}\left(\frac{T-n}{n_2}\right) =$$

$$= \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1-\hat{u}'\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}}\left(\frac{T-n}{n_2}\right) \qquad (3.123)$$

πού, ὅπως εἴδαμε στήν (3.112) εἶναι $F_{n_2,T-n}$. Ἄν ἡ τιμή αὐτή εἶναι μεγαλύτερη ἀπ'ἐκείνην πού δίνουν οἱ πίνακες τῆς κατανομῆς F γιά n_2 καί T-n βαθμούς ἐλευθερίας, οἱ ἐκτιμήσεις τοῦ ὑποδιανύσματος β_2 εἶναι στατιστικά σημαντικές, δηλαδή τό ποσοστό τῆς διακυμάνσεως πού ἑρμηνεύεται ἀπό τίς n_2 ἀνεξάρτητες μεταβλητές εἶναι στατιστικά σημαντικό, καί κατά συνέπεια , ἡ (3.87) ἀπορρίπτεται.

VII. Πρόβλεψη

Στά προηγούμενα τμήματα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ ἀσχοληθήκαμε μέ τόν ἔλεγχο τῆς σημαντικότητος τῶν ἐκτιμήσεων ὑποομάδων ἤ τοῦ συνόλου τῶν παραμέτρων τοῦ γραμμικοῦ ὑποδείγματος. Ὅπως ὅμως ἀναφέραμε στό Κεφάλαιο 1, μεγάλη σημασία ἔχει τό ἄν καί κατά πόσον οἱ προβλέψεις τῶν τιμῶν πού δίνει τό ὑπόδειγμα ἀνταποκρίνονται στήν πραγματικότητα.

Ὅπως ἀναφέρει ὁ Johnston (1972) (σελ. 38-43 καί 152-5) θά πρέπη νά διακρίνουμε δυό περιπτώσεις:

(i) Ἄν τό διάνυσμα τῶν ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν γιά τό χρόνο πού ἀκολουθεῖ τήν περίοδο τοῦ δείγματος (δηλ. T+1) προβλέπεται νά εἶναι

$$\mathbf{x}^0_{T+1.} = (1, x^0_{T+1,2}, x^0_{T+1,3}, \ldots, x^0_{T+1,n}) \qquad (3.126)$$

Τό ἐρώτημα εἶναι: Σύμφωνα μέ τό ὑπόδειγμα πού ἐκτιμήσαμε ποιά εἶναι ἡ ἀναμενόμενη (ἤ μέση) τιμή τῆς ἐξαρτημένης μεταβλητῆς στό χρόνο T+1 στήν περίπτωση πού ἰσχύει τό ὑπόδειγμα (2.26) καί οἱ ὑποθέσεις (i)-(vi). Ἡ τιμή αὐτή εἶναι

$$E[y_{T+1}|\mathbf{x}^0_{T+1.}] = E[\mathbf{x}^0_{T+1.}\beta + u_{T+1}|\mathbf{x}^0_{T+1.}] = \mathbf{x}^0_{T+1.}\beta \qquad (3.127)$$

Ὅπως ἀποδείξαμε στό τέλος τοῦ τμήματος V τοῦ Κεφαλαίου 2 τό θεώρημα τῶν Gauss-Markov ἰσχύει καί γιά ἕνα γραμμικό συνδυασμό τῶν b_j. Ἄν στήν (2.69) ἀντικαταστήσουμε τό a_1 μέ $\hat{y}_{T+1}$ καί τό g' μέ τό $\mathbf{x}^0_{T+1.}$ τότε ὁ ἐκτιμητής

$$\hat{y}_{T+1} = \mathbf{x}^0_{T+1.}b \qquad (3.128)$$

εἶναι Α.Γ.Α.Ε. τῆς (3.127).

Ἄν τώρα θελήσουμε νά ὁρίσουμε διάστημα ἐμπιστοσύνης γιά τόν

(3.127) τότε, κάνοντας τίς άναγκαῖες άντικαταστάσεις στήν(2.71), ἔχουμε

$$\operatorname{Var}(\hat{y}_{T+1}) = x^0_{T+1.}\{E(b-\beta)(b-\beta)'\}x^{0'}_{T+1.} =$$

$$= \sigma^2 x^0_{T+1.}(X'X)^{-1}x^{0'}_{T+1.} \tag{3.129}$$

Ἐφόσον ἰσχύει ἡ (3.43) ἔχουμε,

$$x^0_{T+1.}b \quad \text{εἶναι } N(x^0_{T+1.}\beta,\ \sigma^2 x^0_{T+1.}(X'X)^{-1}x^{0'}_{T+1.}) \tag{3.130}$$

καί άφοῦ ὁ άμερόληπτος έκτιμητής τῆς σ^2 εἶναι ὁ s^2, ἕπεται ὅτι ἡ

$$t = \frac{x^0_{T+1.}b - x^0_{T+1.}\beta}{s\sqrt{x^0_{T+1.}(X'X)^{-1}x^{0'}_{T+1.}}} \tag{3.131}$$

άκολουθεῖ τήν κατανομή τοῦ Student t μέ T-n βαθμούς έλευθερίας. Ἑπομένως τό 100(1-α) διάστημα έμπιστοσύνης γιά τήν (3.127) εἶναι:

$$x^0_{T+1.}b \pm t_{\alpha/2}s\sqrt{x^0_{T+1.}(X'X)^{-1}x^{0'}_{T+1.}} \tag{3.132}$$

(ii) Ἡ προηγούμενη περίπτωση άφοροῦσε τήν άναμενόμενη (μέση)τιμή τῆς y_{T+1}. Σέ ὁρισμένες ὅμως περιπτώσεις θέλουμε νά δοῦμε ἄν μιά τιμή τῆς y_t πού παρατηροῦμε στό χρόνο T+1, ἡ y^0_{T+1},μαζύ μέ τήν (3.126) μποροῦσε νά προέλθη άπό τό ἴδιο ὑπόδειγμα πού έκτιμήσαμε γιά τήν περίοδο άπό t=1 μέχρι t=T. Στήν περίπτωση αὐτή χρειάζεται νά βροῦμε ἕνα διάστημα έμπιστοσύνης γιά τήν y_{T+1} καί ὄχι, ὅπως στήν προηγούμενη περίπτωση, τήν $E(y_{T+1})$.

Ἄν ἰσχύη τό ὑπόδειγμα (2.26) μέ τίς ὑποθέσεις (i)-(vi) τότε ἡ πραγματική τιμή τῆς y_{T+1} εἶναι:

$$y_{T+1} = x^0_{T+1.}\beta + u_{T+1} \tag{3.133}$$

ἐνῶ ἡ πρόβλεψη εἶναι:

$$\hat{y}_{T+1} = x^0_{T+1.}b \tag{3.134}$$

Ἑπομένως

$$\hat{y}_{T+1} - y_{T+1} = x^0_{T+1.}(b-\beta) + u_{T+1} \tag{3.133}$$

Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις (i)-(vi)

$$E[\hat{y}_{T+1} - y_{T+1}] = 0$$

καί

$$Var(\hat{y}_{T+1} - y_{T+1}) = E\{[x^0_{T+1.}(b-\beta)+u_{T+1}][x^0_{T+1.}(b-\beta)+u_{T+1}]'\}$$

$$=\sigma^2+\sigma^2\, x^0_{T+1.}(X'X)^{-1}\, x^{0\,\prime}_{T+1.} = \sigma^2[1+x^0_{T+1.}(X'X)^{-1}x^{0\,\prime}_{T+1.}] \tag{3.134}$$

Ἑπομένως 100(1-α) διάστημα ἐμπιστοσύνης γιά τήν y^0_{T+1} εἶναι

$$x^0_{T+1.}\, b \pm t_{\alpha/2}\, s\sqrt{1+x^0_{T+1.}(X'X)^{-1}x^{0\,\prime}_{T+1.}} \tag{3.135}$$

Ἄν ἡ y^0_{T+1} βρίσκεται στό διάστημα (3.135) τότε δεχόμαστε τήν ὑπόθεση ὅτι προέρχεται ἀπό μιά δομή πού ἐξηγεῖται ἱκανοποιητικά ἀπό τό ὑπόδειγμα (2.26).

VIII. Ἐφαρμογὴ στὴν Ἁπλὴ Παλινδρόμηση

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ (2.47) ἐξειδικεύεται στήν

$$s^2 = \frac{\sum \hat{u}_t^2}{T-2} = \frac{\sum(y_t-b_1x_{t1}-b_2x_{t2})^2}{T-2} \tag{3.136}$$

καί ἀφοῦ βρήκαμε τήν (2.148) ὁ ἔλεγχος τῆς ὑποθέσεως

$$H_o\colon \beta_2 = 0 \tag{3.137}$$

γίνεται μέ τόν ὑπολογισμό τῆς

$$t = \frac{b_2\sqrt{\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}}{s} \tag{3.138}$$

Ἐνῶ τό 100(1-α) διάστημα ἐμπιστοσύνης γιά τήν β_2 εἶναι

$$b_2 \pm t_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}} \tag{3.139}$$

Στήν περίπτωση αὐτή ἀφοῦ ἰσχύει ἡ (3.46) ἕπεται ὅτι ἡ

$$\left(\frac{b_2-\beta_2}{\sigma/\sqrt{\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}}\right)^2 \quad \text{εἶναι} \quad \chi_1^2 \tag{3.140}$$

καί ἐφόσον ἡ

$$\frac{\sum\hat{u}_t^2}{\sigma^2} \quad \text{εἶναι} \quad \chi_{T-2}^2 \tag{3.141}$$

καί ἡ (3.141) εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν (3.140) ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\dfrac{(b_2-\beta_2)^2}{\sigma^2/\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}}{\sum\hat{u}_t^2/\sigma^2(T-2)} = \frac{(b_2-\beta_2)^2\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}{\sum\hat{u}_t^2/(T-2)} \text{εἶναι } F_{1,T-2} \tag{3.142}$$

Ἡ ὑπόθεση, ἑπομένως, (3.137) μπορεῖ νά ἐλεγχθῆ ὑπολογίζοντας τήν τιμή τῆς

$$\frac{b_2^2\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}{\sum\hat{u}_t^2/(T-2)} \tag{3.143}$$

καί συγκρίνοντάς την μέ τήν τιμή πού δίνεται στούς πίνακες τῆς κατανομῆς F γιά 1 καί T-2 βαθμούς ἐλευθερίας. Ὁ πίνακας τῆς ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως εἶναι ὅπως ὁ Πίνακας 1 μέ n=2.

Γιά τό διάστημα ἐμπιστοσύνης στήν ἀναμενόμενη τιμή τῆς y_{T+1} ὅταν γνωρίζουμε τό

$$x^0_{T+1.} = (1,\ x^0_{T+1,2}) \tag{3.144}$$

πρέπει νά ὑπολογίσουμε τήν (3.127).

Ἐφόσον στήν περίπτωση αὐτή

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{T\sum x_{t2}^2-(\sum x_{t2})^2}\begin{bmatrix}\sum x_{t2}^2 & -\sum x_{t2}\\ -\sum x_{t2} & T\end{bmatrix}$$

ἕπεται ὅτι:

$$(1,x^0_{T+1,2})(X'X)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ x^0_{T+1,2}\end{bmatrix} = \frac{\sum x_{t2}^2-2x^0_{T+1,2}\sum x_{t2}+T(x^0_{T+1,2})^2}{T\sum x_{t2}-(\sum x_{t2})^2} \tag{3.145}$$

Διαιρώντας τόν ἀριθμητή καί παρανομαστή τῆς (3.145) διά T καί προσθέτοντας καί ἀφαιρώντας ἀπό τόν ἀριθμητή $\frac{(\sum x_{t2})^2}{T^2}$ ἡ (3.145) γίνεται:

$$\frac{1}{T} + \frac{(x^0_{T+1,2}-\bar{x}_2)^2}{\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2} \tag{3.146}$$

Ἑπομένως τό 100(1-α) διάστημα ἐμπιστοσύνης τῆς $E(y_{T+1}/x^0_{T+1.})$ εἶναι

$$b_1+b_2x^0_{T+1,2} \pm t_{\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{T} + \frac{(x^0_{T+1,2} - \bar{x}_2)^2}{\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}} \qquad (3.147)$$

Τέλος τό διάστημα ἐμπιστοσύνης τῆς y_{T+1} εἶναι

$$b_1+ b_2x^0_{T+1,2} \pm t_{\alpha/2}\, s\sqrt{1+\frac{1}{T} + \frac{(x^0_{T+1,2} - \bar{x}_2)^2}{\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΛΑΣΣΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

Ι. Εἰσαγωγὴ

Καί στίς τρεῖς εἰδικές ἐφαρμογές μέ τίς ὁποῖες θά ἀσχοληθοῦμε στό Κεφάλαιο αὐτό θά χρησιμοποιήσουμε **ψευδομεταβλητές** (dummy variables). Ἡ χρήση τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν εἶναι γενικότερη (βλέπε, π.χ., Orcutt et al. (1961), Goldberger (1964)).

Οἱ ψευδομεταβλητές χρησιμοποιοῦνται ὅταν θέλουμε νά δοῦμε ἄν ἡ ὑποδιαίρεση ἑνός συνόλου **παρατηρήσεων** (observations) σέ ὑποσύνολα εἶναι στατιστικά σημαντική ἤ ὅταν θέλουμε νά ἀπαλλάξουμε τά στοιχεῖα πού χρησιμοποιοῦμε ἀπό τή διακύμανση πού ὀφείλεται στήν ὑποδιαίρεση αὐτή.

Ἄν π.χ. ἔχουμε ἕνα σύνολο παρατηρήσεων S πού ὑποδιαιρεῖται σέ p ὑποσύνολα S_j, $j = 1,\ldots,p$ τότε οἱ ψευδομεταβλητές ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$d_{tj} = \begin{cases} 1 & \text{ἄν ἡ παρατήρηση } \in S_j \\ 0 & \text{ἄν ἡ παρατήρηση } \notin S_j \end{cases} \quad j = 1,2,\ldots,p \qquad (4.1)$$

ὅπου τά σύμβολα $\in$ καί $\notin$ σημαίνουν, ἀντίστοιχα, "ἀνήκει στό"," δέν ἀνήκει στό".

Ἡ ἀνάλυση τοῦ τμήματος II ἀναφέρεται σέ χρονολογικές σειρές. Μέ μιά ἁπλή ἀλλαγή τοῦ δείχτη t σέ i ὅμως, μπορεῖ νά ἐπεκταθῆ σέ διαστρωματικά στοιχεῖα.

Τά προβλήματα στά ὁποῖα θά ἀναφερθοῦμε μετά τίς ἐφαρμογές εἶναι ἐκεῖνα πού δέν θά θιγοῦν σέ ἑπόμενα κεφάλαια τοῦ τόμου αὐτοῦ ἤ τῶν τόμων πού θά ἀκολουθήσουν. Γι'αὐτό καί ὁ ἀριθμός τους εἶναι περιορισμένος. Στό θέμα αὐτό ἀκολουθοῦμε κυρίως τόν Theil (1971), στόν ὁποῖον παραπέμπουμε τόν ἀναγνώστη γιά περισσότερες λεπτομέρειες.

II. Ἀπαλλαγὴ τῶν Στατιστικῶν Στοιχείων ἀπὸ τὴν Ἐποχικότητα

Ἄν ἔχουμε τριμηνιαῖες παρατηρήσεις γιά μιά μεταβλητή y_t καί θέλουμε νά τίς ἀπαλλάξουμε ἀπό τήν ἐποχικότητα ὁρίζουμε τίς ἑξῆς ψευδομεταβλητές

$$d_{tj} = \begin{cases} 1 & \text{ἄν} \quad y_t \in S_j \\ 0 & \text{ἄν} \quad y_t \notin S_j \end{cases} \qquad j = 1,2,3,4 \qquad (4.2)$$

Ἄν οἱ παρατηρήσεις γιά τήν y_t εἶναι σέ χρονολογική σειρά ($1^{\text{ο}}$ τρίμηνο, $2^{\text{ο}}$ τρίμηνο, κ.λ.π.), τότε τά διανύσματα τῶν ψευδομεταβλητῶν γιά τά 8 πρῶτα τρίμηνα (δυό χρόνια) μαζύ μέ τό διάνυσμα γιά τήν y_t ἔχουν ὡς ἑξῆς:

Ἐξαρτημένη Μεταβλητή			Διανύσματα Ψευδομεταβλητῶν				
Χρόνος	Τρίμηνο	Παρατήρηση	$d_{.1}$	$d_{.2}$	$d_{.3}$	$d_{.4}$	(4.3)
1	I	y_1	1	0	0	0	
1	II	y_2	0	1	0	0	
1	III	y_3	0	0	1	0	
1	IV	y_4	0	0	0	1	
2	I	y_5	1	0	0	0	
2	II	y_6	0	1	0	0	
2	III	y_7	0	0	1	0	
2	IV	y_8	0	0	0	1	

Κατά παρόμοιο τρόπο ὁρίζονται οἱ ψευδομεταβλητές καί γιά τά ὑπόλοιπα τρίμηνα.

Τό γραμμικό ὑπόδειγμα πού θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε στήν περίπτωση αὐτή εἶναι τό ἑξῆς:

$$y_t = \sum_{j=1}^{4} \gamma_j d_{tj} + u_t \qquad (4.4)$$

Ἄν θέσουμε

$$y' = (y_1, y_2, \ldots, y_T) \qquad (4.5)$$

$$D = (d_{\cdot 1}, d_{\cdot 2}, d_{\cdot 3}, d_{\cdot 4}) \qquad (4.6)$$

ὅπου τά $d_{\cdot j}$, $j = 1,2,3,4$ ἔχουν T συντεταγμένες,

$$\gamma' = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \qquad (4.7)$$

$$u' = (u_1, u_2, \ldots, u_T) \qquad (4.8)$$

τότε τό ὑπόδειγμα (4.3) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$y = D\gamma + u \qquad (4.9)$$

Στίς περισσότερες περιπτώσεις ἐκτιμήσεως συντελεστῶν ὑποδειγμάτων μέ ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές, ὑπάρχει στό πρόγραμμα προσδιορισμένη ἡ (2.144). Στήν περίπτωση αὐτή δέν μποροῦμε νά ὁρίσουμε τίς ψευδομεταβλητές ὅπως στήν (4.2) διότι, ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τήν (4.3) (βλέπε καί Suits (1957))

$$\sum_{i=1}^{4} d_{\cdot j} = i \equiv d^*_{\cdot 1} \qquad (4.10)$$

Κατά συνέπειαν, ἄν σχηματίζαμε μιά νέα μήτρα πού θά περιεῖχε τόσο τό διάνυσμα i ὅσο καί τή μήτρα (4.6) οἱ στῆλες τῆς μήτρας αὐτῆς θά ἦταν γραμμικά ἐξαρτημένες κι'ἐπομένως δέν θά ἴσχυε ἡ ὑπόθεση (iii) τοῦ Κεφαλαίου 2.

Στήν περίπτωση αὐτή χρειάζεται νά ὁρίσουμε τίς ψευδομεταβλητές διαφορετικά. Ἕνας τρόπος ὁρισμοῦ τῶν (νέων) ψευδομεταβλητῶν, εἶναι ὁ ἑξῆς:

$$d^*_{tj} = \begin{cases} 1 & \text{ἄν } y_t \in S_{j-1} \\ 0 & \text{ἄν } y_t \notin S_{j-1} \end{cases} \qquad j = 2,3,4 \tag{4.11}$$

Ἄν πάρουμε (πάλι) τίς παρατηρήσεις γιά τά 8 πρῶτα τρίμηνα τῆς y_t θά ἔχουμε τήν ἑξῆς διάταξη:

(4.12)

y	$d^*_{\cdot 1}$	$d^*_{\cdot 2}$	$d^*_{\cdot 3}$	$d^*_{\cdot 4}$
y_1	1	1	0	0
y_2	1	0	1	0
y_3	1	0	0	1
y_4	1	0	0	0
y_5	1	1	0	0
y_6	1	0	1	0
y_7	1	0	0	1
y_8	1	0	0	0

Τό ὑπόδειγμα πού θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε στήν περίπτωση αὐτή εἶναι:

$$y_t = \sum_{j=1}^{4} \gamma^*_j d^*_{tj} + u_t \tag{4.13}$$

Ἂν θέσουμε,

$$D^* = (d^*_{\cdot 1}\,,\ d^*_{\cdot 2},\ d^*_{\cdot 3},\ d^*_{\cdot 4}) \tag{4.14}$$

ὅπου τά διανύσματα $d^*_{\cdot j}$ ἔχουν T συντεταγμένες καί $r(D^*) = 4$

$$\gamma^{*\prime} = (\gamma^*_1,\ \gamma^*_2,\ \gamma^*_3,\ \gamma^*_4) \tag{4.15}$$

τότε τό ὑπόδειγμα (4.13) γράφεται

$$y = D^*\gamma^* + u \tag{4.16}$$

ὅπου τά διανύσματα **y** καί **u** ἔχουν ὁριστῆ στίς (4.5) καί (4.8).

Γιά νά ἐκτιμήσουμε τά ὑποδείγματα (4.9) καί (4.16) ἐφαρμόζουμε τήν (2.35). Γιά τό ὑπόδειγμα (4.9) ἔχουμε:

$$c = (D'D)^{-1}D'y \tag{4.17}$$

καί γιά τό ὑπόδεγμα (4.16)

$$c^* = (D^{*\prime}D^*)^{-1}\ D^{*\prime}y \tag{4.18}$$

ὅπου **c** καί **c*** εἶναι, ἀντίστοιχα, οἱ ἐκτιμητές τῶν γ καί γ*.

Ἂν γιά τό τρίμηνο j ἔχουμε T_j παρατηρήσεις, τότε στή σχέση (4.17) ἡ μήτρα $(D'D)^{-1}$ εἶναι

$$(D'D)^{-1} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

καί

$$D'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{t\in s_1} y_t \\ \\ \sum_{t\in s_2} y_t \\ \\ \sum_{t\in s_3} y_t \\ \\ \sum_{t\in s_4} y_t \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Κατά συνέπεια

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \\ c_2 \\ \\ c_3 \\ \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \\ \bar{y}_2 \\ \\ \bar{y}_3 \\ \\ \bar{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t\in s_1} y_t/T_1 \\ \\ \sum_{t\in s_2} y_t/T_2 \\ \\ \sum_{t\in s_3} y_t/T_3 \\ \\ \sum_{t\in s_4} y_t/T_4 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Ἄν πάρουμε τή μήτρα:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

τότε

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Μιά σύγκριση ἀνάμεσα στίς μῆτρες D καί D* δείχνει ὅτι:

$$D^* = DF \quad (4.24)$$

δηλαδή ἡ μήτρα D^* προέρχεται ἀπό τή μήτρα D μετά ἀπό μιά σειρά στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν πού γίνονται (μέ τή μήτρα F) στίς στῆλες τῆς τελευταίας.

Γιά νά διαπιστωθῆ ἡ σχέση ἀνάμεσα στίς c_j καί c_j^* ἀντικαθιστοῦμε τήν (4.24) στήν (4.18) καί ἔχουμε:

$$c^* = \{(DF)'(DF)\}^{-1}(DF)'y = \{F'(D'D)F\}^{-1}F'D'y =$$

$$F^{-1}(D'D)^{-1}F'^{-1}F'D'y = F^{-1}(D'D)^{-1}D'y = F^{-1}c \quad (4.25)$$

Ἄν τέλος ἀντικαταστήσουμε τήν (4.21) στήν (4.25) ἔχουμε:

$$c^* = \begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ c_3^* \\ c_4^* \end{bmatrix} = F^{-1}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_4 \\ c_1-c_4 \\ c_2-c_4 \\ c_3-c_4 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Ἐφόσον

$$FF^{-1} = I \quad (4.27)$$

ἕπεται ὅτι,

$$y = D\gamma + u = (DF)(F^{-1}\gamma) + u = D^* \gamma^* + u \qquad (4.28)$$

Τά κατάλοιπα ἐπομένως ἀπό τίς (4.16) καί (4.9) εἶναι ἴσα, δηλαδή

$$\hat{u} = y - D^*c = y - Dc = y - D^*(D^{*\prime}D^*)^{-1} D^{*\prime}y$$

$$= (I - D(D'D)^{-1} D')y \qquad (4.29)$$

Τά κατάλοιπα αὐτά εἶναι τά καινούργια στοιχεῖα γιά τήν y πού εἶναι ἀπαλλαγμένα ἀπό τήν ἐποχικότητα.

Ἀπό τήν ἐποχικότητα μποροῦμε νά ἀπαλλάξουμε (στήν περίπτωση πάντα τῶν τριμηνιαίων στοιχείων) καί τή μήτρα τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν ὅπως τήν ὁρίσαμε στήν (3.113). Τά ἀντίστοιχα τῶν(4.9) καί (4.16) εἶναι τότε,

$$X_2 = D\Gamma + U \qquad (4.30)$$

καί

$$X_2 = D^*\Gamma^* + U \qquad (4.31)$$

Ἐνῶ τό ἀντίστοιχο τῆς (4.29) εἶναι:

$$\hat{U} = X_2 - DC = X_2 - D^*C^* \qquad (4.32)$$

ὅπου

$$C = (D'D)^{-1} D'X_2 \qquad (4.33)$$

καί

$$C^* = (D^{*\prime}D^*)^{-1} D^{*\prime}X_2 = F^{-1} C \qquad (4.34)$$

εἶναι ἀντίστοιχα οἱ ἐκτιμητές τῶν Γ καί Γ*.

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς (4.5), (4.6) καί (4.21) στήν (4.29) θά δοῦμε ὅτι οἱ νέες μεταβλητές δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά οἱ ἀποκλίσεις (deviations) τῶν τριμηνιαίων παρατηρήσεων ἀπό τούς μέσους τῶν ἀντίστοιχων τριμήνων. Στίς περιπτώσεις ὅμως πού οἱ χρονολογικές σειρές παρουσιάζουν μιά ὁρισμένη τάση (trend) καθώς καί κυκλικές διακυμάνσεις (cyclical variations) δέν εἶναι δυνατόν ἡ ἁπλή μέθοδος πού ἀναπτύξαμε στό τμῆμα αὐτό νά θεωρηθῆ ἱκανοποιητική, διότι οἱ τριμηνιαῖοι μέσοι ἐπηρεάζονται ἀπό τά χαρακτηριστικά αὐτά τῶν χρονολογικῶν σειρῶν. Γιά ν' ἀντιμετωπίση τό πρόβλημα αὐτό ὁ Jorgenson (1964) ἐφαρμόζει μιά μέθοδο πού δίνεται περιληπτικά στόν Johnston (1972).

III. Ἀνάλυση Διακυμάνσεως μὲ Ψευδομεταβλητὲς

Ἄν συγκεντρώσουμε τίς παρατηρήσεις πού ἀναφέρονται στό κάθε τρίμηνο σέ ὁμάδες, μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε δυό δεῖχτες γιά νά τίς προσδιορίσουμε.

Ἄν θέσουμε y_{sj} γιά τήν παρατήρηση s στό τρίμηνο j τότε θά ἔχουμε:

$$y_{s1},\quad s = 1,\dots,T_1$$
$$y_{s2},\quad s = 1,\dots,T_2$$
$$y_{s3},\quad s = 1,\dots,T_3$$
$$y_{s4},\quad s = 1,\dots,T_4$$

Ἄν ἐπιπλέον ὁρίσουμε τίς ψευδομεταβλητές ὅπως στήν (4.2), τότε ἡ νέα (μέ ἀριστερά τήν παλιά) κατάταξη τῆς ἐξαρτημένης μεταβλητῆς καί τῶν ψευδομεταβλητῶν εἶναι ἡ ἑξῆς:

Ἐξαρτημένη Μεταβλητή	$d^{+}_{\cdot 1}$	$d^{+}_{\cdot 2}$	$d^{+}_{\cdot 3}$	$d^{+}_{\cdot 4}$
$y_1 \equiv y_{11}$	1	0	0	0
$y_5 \equiv y_{21}$	1	0	0	0
$y_9 \equiv y_{31}$	1	0	0	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$y_{T_1 1}$	1	0	0	0
$y_2 \equiv y_{12}$	0	1	0	0
$y_6 \equiv y_{22}$	0	1	0	0
$y_{10} \equiv y_{32}$	0	1	0	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$y_{T_2 2}$	0	1	0	0
$y_3 \equiv y_{13}$	0	0	1	0
$y_7 \equiv y_{23}$	0	0	1	0
$y_{11} \equiv y_{33}$	0	0	1	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$y_{T_3 3}$	0	0	1	0
$y_4 \equiv y_{14}$	0	0	0	1
$y_8 \equiv y_{24}$	0	0	0	1
$y_{12} \equiv y_{34}$	0	0	0	1
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$y_{T_4 4}$	0	0	0	0

(4.35)

Ἄν θέσουμε,

$$y^{+'} = (y_{11}, y_{21}, \dots, y_{T_4 4}) \qquad (4.36)$$

$$D^{+} = (d^{+}_{\cdot 1}, d^{+}_{\cdot 2}, d^{+}_{\cdot 3}, d^{+}_{\cdot 4}) \qquad (4.37)$$

(ὅπου οἱ σταυροί στίς $d^{+}_{\cdot j}$ καί D^{+} δέν ἔχουν καμιά σχέση, ἀντί- στοιχα, μέ τίς προσημασμένες ἐλάσσονες ὁρίζουσες ἤ τήν προσαρτη- μένη μήτρα)

τότε τό ὑπόδειγμα πού θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε εἶναι:

$$y^{+} = D^{+}\gamma + u^{+} \qquad (4.38)$$

ὅπου τό διάνυσμα u^{+}, ὁρίζεται ἀνάλογα μέ τό διάνυσμα y^{+}.

Ὁ ἐκτιμητής τοῦ γ στήν (4.38) εἶναι ὁ (4.17), διότι

$$(D^{+'}D^{+})^{-1} = (D'D)^{-1} \qquad (4.39)$$

καί

$$D^{+'}y^{+} = D'y \qquad (4.40)$$

Ἡ κατάταξη (4.35) συνδέει τό τμῆμα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ μέ τήν κατά παράδοση ἀνάλυση τῆς διακυμάνσεως, διότι ἡ κατάταξη αὐ- τή θά μποροῦσε νά ἀφορᾶ ὁ,τιδήποτε στοιχεῖα πού εἶχαν ὑποδιαιρε- θῆ σέ τέσσερις ὑποομάδες. Φυσικά ἡ ἀνάλυση μπορεῖ νά ἀφορᾶ p ἀν- τί 4 ὁμάδες.

Μέ τό συμβολισμό τῆς κατατάξεως (4.35) μποροῦμε νά γράψουμε τόν ἐκτιμητή τοῦ γ ὡς ἐξῆς:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{T_1} y_{s1}/T_1 \\ \sum_{s=1}^{T_2} y_{s2}/T_2 \\ \sum_{s=1}^{T_3} y_{s3}/T_3 \\ \sum_{s=1}^{T_4} y_{s4}/T_4 \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

'Από τίς σχέσεις αὐτές προκύπτουν τά ἑξῆς :

$$\sum_{s=1}^{T_j} y_{sj} = T_j \bar{y}_j \tag{4.42}$$

καί

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{s=1}^{T_j} y_{sj}/T = \sum_{j=1}^{4} T_j \bar{y}_j/T \tag{4.43}$$

'Εφόσον

$$\hat{u} = y - D^{+}c \tag{4.44}$$

ἕπεται ὅτι

$$\hat{u}_{sj} = y_{sj} - \bar{y}_j \tag{4.45}$$

καί

$$\hat{u}'\hat{u} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{s=1}^{T_j} \hat{u}_{sj}^2 = \sum_{j=1}^{4} \sum_{s=1}^{T_j} (y_{sj}-\bar{y}_j)^2 \tag{4.46}$$

'Από τήν ἄλλη μεριά

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{s=1}^{T_j} (y_{sj}-\bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{4} \sum_{s=1}^{T_j} \{(y_{sj}-\bar{y}_j) + (\bar{y}_j-\bar{y})\}^2 = \tag{4.47}$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \sum_{s=1}^{T_j} (y_{sj}-\bar{y}_j)^2 + \sum_{j=1}^{4} T_j(\bar{y}_j-\bar{y})^2 \tag{4.48}$$

ἀφοῦ

$$\sum_{j=1}^{4}\sum_{s=1}^{T_j}(y_{sj}-\bar{y}_j)(\bar{y}_j-\bar{y}) = 0 \qquad (4.49)$$

Διαιρώντας τήν (4.48) διά τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς σχέσεως αὐτῆς καί ἀνακατατάσσοντας τούς ὅρους της, ἔχουμε:

$$\frac{\sum_{j=1}^{4} T_j(\bar{y}_j-\bar{y})^2}{\sum_{j=1}^{4}\sum_{s=1}^{T_j}(y_{sj}-\bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{4}\sum_{s=1}^{T_j}(y_{sj}-\bar{y}_j)^2}{\sum_{j=1}^{4}\sum_{s=1}^{T_j}(y_{sj}-\bar{y})^2} \qquad (4.50)$$

Χρησιμοποιώντας τήν ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στήν (3.72) καί (3.73), τόν ὁρισμό (3.74) καί τήν (4.46) μποροῦμε νά γράψουμε:

$$\frac{R^2}{1-R^2}\left(\frac{T-4}{3}\right) = \frac{y'y-\hat{u}'\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}}\left(\frac{T-4}{3}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{4} T_j(\bar{y}_j-\bar{y})^2}{\sum_{j=1}^{4}\sum_{s=1}^{T_j}(y_{sj}-\bar{y}_j)^2}\left(\frac{T-4}{3}\right) \qquad (4.51)$$

πού, ἐφόσον ἰσχύει ἡ ὑπόθεση (vi) τοῦ Κεφαλαίου 2, εἶναι $F_{3,T-4}$.

Ἐφόσον ἰσχύει ἡ σχέση (4.25) ἡ ἀνάλυση διακυμάνσεως πού γίνεται μέ τήν (4.51) μπορεῖ νά ἑρμηνευτῆ σάν τόν ἔλεγχο τῆς ὑποθέσεως

$$H_0:\ \gamma_1-\gamma_4 = \gamma_2-\gamma_4 = \gamma_3-\gamma_4 = 0 \qquad (4.52)$$

τῆς ὑποθέσεως δηλαδή ὅτι οἱ διαφορές ἀνάμεσα στίς γ_j; $j = 1,2,3$, δέν εἶναι στατιστικά σημαντικές.

Ἀπό ἄποψη, ἐπομένως, ἐλέγχου τῶν ὑποθέσεων (ὅπως γράφει ὁ Goldberger (1964) σελ. 230), ὁ τρόπος ἀναλύσεως τῆς διακυμάνσεως πού παρουσιάσαμε στό τμῆμα αὐτό καί ὁ κλασσικός τρόπος (βλέπε Κεβόρκ (1972δ)), δίνουν τά ἴδια ἀποτελέσματα. Ὅταν ὅμως ἔχουμε πολλαπλά κριτήρια κατατάξεως τῶν παρατηρήσεων καί στήν κάθε τελική ὑποομάδα ὑπάρχει ἄνισος ἀριθμός παρατηρήσεων, τότε ἡ μέθοδος τοῦ τμήματος αὐτοῦ, πού μπορεῖ νά ἐπεκταθῆ καί νά καλύψη τίς περιπτώσεις πολλαπλῶν κριτηρίων κατατάξεως (βλέπε Orcutt et al. (1961) καί ἐργασία τοῦ συγγραφέα (1975 α,β)) εἶναι ἡ μόνη δυνατή. Ἐπιπλέον ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι ἡ ἐνδεικνυόμενη ὅταν ἐρευνοῦμε τή σχέση ἀνάμεσα στήν ἀναμενόμενη τιμή μιᾶς ἐξαρτημένης μεταβλητῆς καί σέ μιά ἑρμηνευτική μεταβλητή.

IV. Ἀνάλυση τῆς Συνδιακυμάνσεως

Ἡ ἀνάλυση συνδιακυμάνσεως (covariance analysis) εἶναι συνδυασμός τῆς περιπτώσεως πού ἐξετάσαμε στό προηγούμενο τμῆμα καί τῆς περιπτώσεως (i) τοῦ τμήματος VI στό προηγούμενο Κεφάλαιο. Ὁ συνδυασμός αὐτός προκύπτει ὅταν χρησιμοποιοῦμε χρονολογικές σειρές σέ διαστρωματικά στοιχεῖα, ὅπως παρατηρήσεις γιά p ἑταιρεῖες γιά διάφορες χρονικές περιόδους.

Στή γενική περίπτωση ὑποθέτουμε ὅτι τό δεῖγμα πού ἔχουμε γιά ὅλη τήν περίοδο ἀποτελεῖται ἀπό T παρατηρήσεις πού μποροῦν νά ὑποδιαιρεθοῦν σέ p ὁμάδες. Οἱ παρατηρήσεις γιά τήν κάθε ὁμάδα εἶναι T_i καί

$$\sum_{i=1}^{p} T_i = T \tag{4.53}$$

Οἱ παρατηρήσεις αὐτές ἀφοροῦν μιά ἐξαρτημένη μεταβλητή καί n - 1 ἑρμηνευτικές μεταβλητές. Ἄν ἀκολουθήσουμε τό συμβολισμό τοῦ τελευταίου τμήματος, τότε οἱ παρατηρήσεις ἀφοροῦν τίς

$$y_{ti} \quad \text{καί} \quad x_{tji}, \quad i = 1,\ldots,p, \quad j = 2,\ldots,n \tag{4.54}$$

$$\text{καί} \quad t = 1,\ldots,T_i \quad \text{γιά τήν ὁμάδα } i$$

Ἄν προσθέσουμε καί τό σταθερό ὅρο

$$x_{t1i} \equiv 1 \quad \text{γιά} \quad t = 1,\ldots,T_i \quad \text{καί} \quad i = 1,\ldots,p \tag{4.55}$$

τότε μποροῦμε νά γράψουμε τό διάνυσμα τῶν παρατηρήσεων γιά τήν ἐξαρτημένη μεταβλητή καί τή μήτρα τῶν παρατηρήσεων γιά τίς ἀνεξάρτητες μεταβλητές τῆς ἀντιπροσωπευτικῆς ὁμάδας i, ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{y}_i \quad \text{καί} \quad X_i = (x_{\cdot 1i}, x_{\cdot 2i}, \ldots, x_{\cdot ni}) \tag{4.56}$$

Πιό ἀναλυτικά ἡ (4.56) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{y}_i = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{T_i i} \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{12i} & \cdots & x_{1ni} \\ 1 & x_{22i} & \cdots & x_{2ni} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & x_{T_i 2i} & \cdots & x_{T_i ni} \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

Ἄν τόσο οἱ σταθερές ὅσο καί οἱ κλίσεις διαφέρουν ἀνάμεσα στίς ὁμάδες, τότε θά πρέπη νά χρησιμοποιήσουμε τίς παλινδρομήσεις,

$$y_{ti} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} x_{tji} + u_{ti}, \quad i=1,\ldots,p \tag{4.58}$$

Ἄν θέσουμε,

$$\beta_i' = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, \ldots, \beta_{ni}) \tag{4.59}$$

καί

$$\mathbf{u}_i' = (u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{T_i i}) \tag{4.60}$$

τότε ἡ (4.58), γιά ὅλες τίς παρατηρήσεις, μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{y}_i = X_i \beta_i + \mathbf{u}_i, \quad i = 1,2,\ldots,p \tag{4.61}$$

Ἂν θέλουμε νά γράψουμε ὅλες τίς p ἐξισώσεις μαζύ, τότε θέτουμε,

$$y' = (y_1', y_2', \ldots, y_p') \tag{4.62}$$

$$X^+ = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X_2 & \ldots & 0 \\ . & 0 & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ 0 & 0 & \ldots & X_p \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

$$\beta^{+\prime} = (\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_p') \tag{4.64}$$

καί

$$u' = (u_1', u_2', \ldots, u_p') \tag{4.65}$$

καί ὅλες οἱ ἐξισώσεις γράφονται

$$y = X^+\beta^+ + u \tag{4.66}$$

Ἂν θέσουμε,

$$G = \begin{bmatrix} I & 0 & \ldots & 0 & I \\ 0 & I & 0 & \ldots & I \\ . & 0 & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ 0 & 0 & \ldots & & I \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

ὅπου I εἶναι ἡ ταυτοτική μήτρα, διαστάσεων n×n καί ἡ G εἶναι (pn) × (pn). Ἡ ἀντίστροφη τῆς G εἶναι

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & -I \\ 0 & I & 0\dots & -I \\ . & 0 & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & I \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

ἄρα ἡ (4.66) μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:

$$y = (X^{+}G)(G^{-1}\beta^{+}) + u \tag{4.69}$$

Ἡ (4.69) γράφεται ἀναλυτικότερα ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_{p-1} \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & & X_1 \\ 0 & X_2 & 0\dots & & X_2 \\ . & 0 & & & . \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ 0 & 0\dots & X_{p-1} & & X_{p-1} \\ 0 & 0\dots & 0 & & X_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 - \beta_p \\ \beta_2 - \beta_p \\ . \\ . \\ . \\ \beta_{p-1} - \beta_p \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_{p-1} \\ u_p \end{bmatrix} = \tag{4.70}$$

$$= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_{p-1} \\ X_p \end{bmatrix} \beta_p + \begin{bmatrix} X_1(\beta_1 - \beta_p) \\ X_2(\beta_2 - \beta_p) \\ . \\ . \\ . \\ X_{p-1}(\beta_{p-1} - \beta_p) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ . \\ . \\ u_{p-1} \\ u_p \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

Ἄν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι δέν ὑπάρχουν διαφορές στίς κλίσεις, δηλαδή

$$\beta_{ji}-\beta_{jp}=0,\ i=1,\ldots,p-1 \quad \text{καί } j=2,\ldots,n \tag{4.72}$$

ἀλλά ὑπάρχουν διαφορές στίς σταθερές, δηλαδή

$$\beta_{1i}-\beta_{1p}\neq 0 \tag{4.73}$$

τότε ἄν ὑποδιαιρέσουμε τή μήτρα X_i ὡς ἑξῆς:

$$X_i=(i_{T_i}\vdots X_i^*)\equiv(i_i\vdots X_i) \tag{4.74}$$

ὅπου ἡ i_{T_i} εἶναι ἕνα διάνυσμα μέ T_i μονάδες καί

$$X_i^*=(x_{\cdot 2i},\, x_{\cdot 3i},\ldots,x_{\cdot ni}) \tag{4.75}$$

τότε μποροῦμε νά γράφουμε τήν (4.71) ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_1 & \vdots & X_1^*\\ i_2 & \vdots & X_2^*\\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ i_p & \vdots & X_p^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_p^*\\ \beta^* \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} i_1\gamma_1^*\\ i_2\gamma_2^*\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ i_{p-1}\gamma_{p-1}^*\\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ u_p \end{bmatrix} \tag{4.76}$$

ὅπου

$$\gamma_p^*\equiv\beta_{1p} \quad \text{καί} \quad \gamma_i^*\equiv\beta_{1i}-\beta_{1p},\ i=1,\ldots,p-1 \tag{4.77}$$

καί

$$\beta^{*\prime}=(\beta_2,\,\beta_3,\ldots,\beta_n)\equiv(\beta_{2p},\beta_{3p},\ldots,\beta_{np}) \tag{4.78}$$

Ἄν τώρα θέσουμε

$$X^* = \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p^* \end{bmatrix} \tag{4.79}$$

$$D^* = \begin{bmatrix} i_1 & 0 & \cdots & 0 & i_1 \\ 0 & i_2 & & & i_2 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & i_{p-1} & i_{p-1} \\ 0 & \cdot & \cdots & & i_p \end{bmatrix} \tag{4.80}$$

καί

$$\gamma^{*\prime} = (\gamma_1^*,\ \gamma_2^*,\ldots,\gamma_p^*) \tag{4.81}$$

ἡ (4.76) μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$y = D^*\gamma^* + X^*\beta^* + u \tag{4.82}$$

Τέλος ἄν ὑποθέσουμε ὅτι δέν ὑπάρχουν διαφορές οὔτε στίς κλίσεις οὔτε στίς σταθερές, δηλαδή,

$$\beta_{ji} - \beta_{jp} = 0,\ i = 1,\ldots,p-1 \text{ καί } j = 1,\ldots,n \tag{4.83}$$

τότε ὁ μεσαῖος ὅρος τῆς (4.71) εἶναι μηδέν. Ἄν ἐπιπλέον θέσουμε,

$$\beta \equiv \beta_p \tag{4.84}$$

καί

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p \end{bmatrix} \tag{4.85}$$

τότε τό ὑπόδειγμα γίνεται

$$\underline{y} = X\beta + u \tag{4.86}$$

Γιά νά ἐλέγξουμε τίς ὑποθέσεις πού ἐνσωματώνονται στά ὑποδείγματα (4.86), (4.82) καί (4.66) θά πρέπη νά τά ἐκτιμήσουμε καί μετά νά χρησιμοποιήσουμε τά ἀποτελέσματα τοῦ προηγουμένου Κεφαλαίου γιά νά κάνουμε τούς σχετικούς ἐλέγχους.

Γιά τό σκοπό αὐτό ὑποθέτουμε ὅτι:

$$u_{ti} \text{ εἶναι } N(0,\sigma^2) \tag{4.87}$$

καί

$$E(u_{ti}.u_{sh}) = 0 \text{ γιά ὅλα τά } i,h,t \neq s \tag{4.88}$$

Ἄν συμβολίσουμε τά κατάλοιπα τῶν ὑποδειγμάτων ὡς ἑξῆς:

Ὑπόδειγμα	Κατάλοιπα
(4.86)	$\hat{u}$
(4.82)	$\hat{u}^*$
(4.66)	$\hat{u}^+$

τότε μποροῦμε νά καταρτίσουμε τόν ἀκόλουθο πίνακα

Πίνακας 1

Ὑπόδειγμα	Ἄθροισμα τετραγώνων καταλοίπων	Ἀριθμός παραμέτρων πού ἐκτιμήθηκαν	Βαθμοί Ἐλευθερίας
(4.86)	$s_1 = \hat{u}'\hat{u}$	n	T-n
(4.82)	$s_2 = \hat{u}^{*\prime}\hat{u}^{*}$	n-1+p	T-(n-1+p)
(4.66)	$s_3 = \hat{u}^{+\prime}\hat{u}^{+}$	p(n-1)+p = np	T-np

Μέ τά δεδομένα τοῦ πίνακα 1 προχωροῦμε στούς ἐλέγχους τοῦ πίνακα 2. Οἱ ἰδιότητες τῆς κατανομῆς F μᾶς ἐπιβάλλουν νά κάνουμε ὅλους τούς ἐλέγχους αὐτούς. Ἑπομένως ἡ σειρά πού ὑπάρχει στόν πίνακα 2 εἶναι ἁπλῶς ἐνδεικτική.

Πίνακας 2

Ἔλεγχος Γιά τό ἄν	Λόγος πού χρησιμοποιοῦμε	Κατανομή
(i) οἱ κλίσεις καί οἱ σταθερές εἶναι διαφορετικές	$\frac{s_1-s_3}{s_3}\left(\frac{T-np}{n(p-1)}\right)$	$F_{n(p-1),T-np}$
(ii) οἱ κλίσεις εἶναι διαφορετικές	$\frac{s_2-s_3}{s_3}\left(\frac{T-np}{(n-1)(p-1)}\right)$	$F_{(n-1)(p-1),T-np}$
(iii) οἱ σταθερές εἶναι διαφορετικές	$\frac{s_1-s_2}{s_2}\left(\frac{T-(n-1+p)}{p-1}\right)$	$F_{p-1,T-(n-1+p)}$

Ἡ ἀνάλυση τῆς συνδιακυμάνσεως πού ἐκθέσαμε στό τμῆμα αὐτό ἀφορᾶ τήν κατάταξη τῶν στοιχείων σέ p ὁμάδες μέ βάση ἕνα κριτήριο κατατάξεως. Ἡ ἴδια ἀνάλυση μπορεῖ νά χρησιμοποιηθῆ σέ ὁρισμένες εἰδικές περιπτώσεις (βλέπε Chow (1960) καί Fisher (1970)) καθώς καί σέ περιπτώσεις ὅπου ἡ κατάταξη γίνεται μέ περισσότερα ἀπό ἕνα κριτήρια.

Ἡ παραπάνω τεχνική μπορεῖ νά ἐφαρμοστῆ καί γιά ὑποσύνολα παραμέτρων (βλέπε Johnston (1972) σελ. 199).

V. Τὸ Πρόβλημα τῆς Πολυσυγγραμμικότητας

Ἄν πάρουμε τή μήτρα $X'X$ καί τό διάνυσμα $X'y$ ἀπό τήν(2.34) καί σχηματίσουμε τήν ἐπαυξημένη μήτρα

$$[X'X \ \vdots \ X'y] \tag{4.89}$$

παρατηροῦμε (βλέπε καί Γ.Α. σελ. 64-71) ὅτι:

$$r[X'X \vdots X'y] = r(X'[X \vdots y]) \leqslant r(X') = r(X'X) \tag{4.90}$$

Ἀπό τήν ἄλλη μεριά

$$r(X'X) \leqslant r(X'X \vdots X'y) \tag{4.91}$$

Κατά συνέπεια

$$r(X'X) = r(X'[X \vdots y]) \tag{4.92}$$

ἐπομένως τό σύστημα (2.34) ἔχει λύση (βλέπε Γ.Α. σελ. 73). Μέ τήν ὑπόθεση (iii) τοῦ Κεφαλαίου 2, ὅτι $r(X) = n$ ἐξασφαλίσαμε τή μοναδικότητα τῆς λύσεως.

Ἄν ὅμως οἱ στῆλες τῆς μήτρας X εἶναι γραμμικά ἐξαρτημένες, ἄν δηλαδή ὑπάρχη ἡ σχέση,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{.j} = 0 \tag{4.93}$$

ὅπου τά λ_j δέν εἶναι ὅλα ἴσα μέ τό μηδέν, τότε ἔχουμε τό πρόβλημα τῆς πολυσυγγραμμικότητας (multicollinearity). Ἡ σχέση (4.93) σημαίνει ὅτι:

$$r(X) < n \tag{4.94}$$

καί έπομένως

$$\det (X'X) = 0 \tag{4.95}$$

όπότε δέν μποροῦμε νά βροῦμε μιά μοναδική λύση στό σύστημα(2.34) άφοῦ $(X'X)^{-1}$ δέν ὑπάρχει.

Τήν (4.93) μποροῦμε νά τήν χαρακτηρίσουμε σάν **πλήρη πολυσυγγραμμικότητα (perfect multicollinearity)**. Ἄν καί κανείς δέν μπορεῖ νά άποκλείση τήν ὕπαρξή της, έν τούτοις στήν πράξη δέν τήν συναντᾶ κανείς συχνά.

Πιό συχνή εἶναι ἡ **ὄχι πλήρης (near) πολυσυγγραμμικότητα**, ὄταν δηλαδή μιά στήλη τῆς μήτρας X εἶναι ἔνας σχεδόν γραμμικός συνδυασμός τῶν ἄλλων στηλῶν. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἐπίδραση τῆς μεταβλητῆς πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τή συγκεκριμένη στήλη, δέν μπορεῖ νά διακριθῆ ἀπό τίς ἐπιδράσεις τῶν ἄλλων μεταβλητῶν.

Ἔνας ἀπό τούς πρώτους πού ἀσχολήθηκαν μέ τό πρόβλημα τῆς πολυσυγγραμμικότητας ἦταν ὁ Frisch (1934). Ὁ Frisch παρατήρησε, ὅτι ἡ σχεδόν πλήρης πολυσυγγραμμικότητα ἔχει σέ πολλές περιπτώσεις (ἀλλ'ὄχι πάντα) σάν ἀποτέλεσμα τήν ἐμφάνιση μεγάλων τυπικῶν σφαλμάτων, στίς ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων. Γιά μιά συστηματική διερεύνηση τοῦ προβλήματος, πρότεινε ὅπως ὅλες οἱ μεταβλητές χρησιμοποιηθοῦν, διαδοχικά, σάν ἐξαρτημένες καί οἱ ὑπόλοιπες νά θεωρηθοῦν σάν ἀνεξάρτητες καί νά γίνη ὑπολογισμός τῶν παραμέτρων ὅλων τῶν δυνατῶν ἁπλῶν καί πολλαπλῶν παλινδρομήσεων.

Ἄν περιοριστοῦμε στήν ἐξαρτημένη μεταβλητή, τότε ἀρχίζουμε ἀπό μιά ἁπλή ἤ πολλαπλή παλινδρόμηση. Ἄν στό σύνολο τῶν ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν προστεθῆ μιά ἀκόμα καί ὁ R^2 αὐξηθῆ σημαντικά, τότε ἡ καινούργια μεταβλητή θεωρεῖται χρήσιμη. Ἄν ὅμως ὁ R^2 δέν αὐξηθῆ σημαντικά καί οἱ ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων δέν μεταβληθοῦν, τότε ἡ ἐπιπρόσθετη μεταβλητή θεωρεῖται **περιττή (superfluous)**. Ἄν τέλος ὁ R^2 δέν αὐξηθῆ καί οἱ ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων ἀλλάξουν σημαντικά, τότε ἡ καινούργια μεταβλητή θεωρεῖται **ἐπιβλα-**

βής (detrimental). Γιά ἁπλά παραδείγματα τῆς μεθόδου αὐτῆς βλέπε Leser (1974), ἐνῶ γιά μιά πλήρη ἀνάλυση βλέπε Stone(1954).

Ἄν διαπιστωθῆ ἡ ὕπαρξη (ὄχι πλήρους) πολυσυγγραμμικότητας καί σάν ἀποτέλεσμά της οἱ ἐκτιμήσεις παραμέτρων ὁρισμένων μεταβλητῶν δέν εἶναι στατιστικά σημαντικές, αὐτό (ὅπως παρατηρεῖ ὁ Johnston (1972) σελ. 160) δέν σημαίνει ἀναγκαστικά ὅτι οἱ μεταβλητές αὐτές εἶναι ἄσχετες. Δέν ἀποκλείεται, ἐπειδή ὑπάρχει πολυσυγγραμμικότητα στά στοιχεῖα πού χρησιμοποιήσαμε, νά μήν ἐμφανίστηκε ἡ ἐπίδρασή τους.

Ἡ ὄχι πλήρης πολυσυγγραμμικότητα μπορεῖ νά ἀντιμετωπιστῆ μέ διάφορους τρόπους. Ἄν, π.χ., γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχουν γραμμικές σχέσεις ἀνάμεσα στίς παραμέτρους, οἱ σχέσεις αὐτές μποροῦν νά ληφθοῦν ὑπόψη μέ τόν τρόπο πού ἀναλύσαμε στό τμῆμα VII τοῦ Κεφαλαίου 2, δηλαδή μέ ἐκτίμηση τοῦ Γραμμικοῦ Ὑποδείγματος μέ γραμμικούς δεσμούς (περιορισμούς).

Ἄν ἡ πολυσυγγραμμικότητα ἐμφανίζεται σέ χρονολογικές σειρές καί ὑπάρχουν διαστρωματικά στοιχεῖα πού μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά τήν ἐκτίμηση μιᾶς ἤ περισσοτέρων παραμέτρων, οἱ ἐκτιμήσεις αὐτές μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν κατά διάφορους τρόπους (βλέπε π.χ. Stone (1954) καί Durbin (1953)) γιά ν'ἀντιμετωπιστῆ τό πρόβλημα (βλέπε καί Κεφάλαιο 7).

VI. Τὸ πλῆθος τῶν Ἑρμηνευτικῶν Μεταβλητῶν

Σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση (ii) τοῦ Κεφαλαίου 2 τό πλῆθος τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν παραμένει σταθερό. Ὅπως εἴδαμε στό Κεφάλαιο 1 ἡ Οἰκονομική θεωρία (ἤ ἡ Μαθηματική Οἰκονομική) προσδιορίζουν ποιές εἶναι οἱ μεταβλητές πού θά πρέπη νά περιληφθοῦν στό ὑπόδειγμα. Στήν πράξη ὅμως πολλές φορές γίνονται πειραματισμοί μέ αὔξηση ἤ μείωση τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν, ἐνέργεια πού δέν συμφωνεῖ μέ τήν ὑπόθεση (ii) τοῦ Κεφαλαίου 2.

῾Ο Theil (1971) σελ. 603-6 ὑποδεικνύει δυό στρατηγικές παλινδρομήσεως (regression strategies) πού μπορεῖ νά ἀκολουθήση ὁ ἐρευνητής στήν περίπτωση πού δέν εἶναι βέβαιος γιά τό πλῆθος τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν πού θά πρέπη νά περιληφθοῦν στό ὑπόδειγμα (βλέπε ὅμως καί Larson & Bancroft (1966)).

῾Η πρώτη στρατηγική ἀρχίζει μ᾽ἕνα σκληρό πυρῆνα (ἄς ποῦμε n_1) ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν γιά τίς ὁποῖες ὁ ἐρευνητής εἶναι βέβαιος ὅτι θά πρέπη νά περιληφθοῦν στό ὑπόδειγμα. ῾Υπάρχουν ὅμως καί ἄλλες n_2 ἑρμηνευτικές μεταβλητές γιά τίς ὁποῖες δέν εἶναι καί τόσο βέβαιος. Τίς μεταβλητές αὐτές τίς ἱεραρχεῖ σέ σειρά σπουδαιότητας καί ἀρχίζει νά τίς προσθέτει στίς n_1. Ἔτσι ἡ πρώτη παλινδρόμηση μέ τήν ὁποία ἀρχίζει (ἀφοῦ ἐκτιμήσει τό βασικό ὑπόδειγμα μέ τίς n_1 μεταβλητές) ἔχει n_1+1 ἑρμηνευτικές μεταβλητές. Ἄν ἡ ἐκτίμηση τῆς παραμέτρου τῆς μεταβλητῆς πού προστέθηκε εἶναι στατιστικά συμαντική, τότε ὁ ἐρευνητής προσθέτει καί τή δεύτερη σέ σειρά σημασίας ἀπό τήν ὁμάδα τῶν n_2 μεταβλητῶν κ.ο.κ. Γιά μιά ἐφαρμογή τῆς στρατηγικῆς αὐτῆς βλέπε τήν ἐργασία τοῦ συγγραφέα (1975 δ).

῾Η δεύτερη στρατηγική ἀρχίζει μέ τό σύνολο τῶν n_1+n_2 ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν. Ἄν ὅλες οἱ ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων εἶναι στατιστικά σημαντικές, τότε διατηροῦμε ὁλόκληρη τήν ὁμάδα τῶν n_1+n_2 ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν. Ἄν ὅμως μιά παράμετρος δέν εἶναι στατιστικά σημαντική, τήν παραλείπουμε καί προχωροῦμε στήν ἐκτίμηση τοῦ ὑποδείγματος μέ n_1+n_2-1 ἑρμηνευτικές μεταβλητές κ.ο.κ.

᾽Εκτός ἀπό τά προβλήματα πού ἐπισημαίνουν οἱ Larson & Bancroft, πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι οὔτε ἡ πρώτη οὔτε ἡ δεύτερη στρατηγική εἶναι πάντοτε ἀσφαλής , διότι ὑπάρχουν περιπτώσεις στήν πρώτη στρατηγική (ἄν π.χ. σταματήσουμε στίς n_1+1 μεταβλητές) ἡ τρίτη σέ σειρά σπουδαιότητος νά εἶναι πραγματικά δεύτερη κι᾽ὁ ἐρευνητής νά μήν προσπαθήση νά τήν συμπεριλάβη στό ὑπόδειγμα,διότι σταμάτησε στή,μή στατιστικά σημαντική, δεύτερη κατά σειρά σημασίας μεταβλητή πού ἀποδείχτηκε στατιστικά ὄχι σημαντική. Στή δεύτερη στρατηγική ὑπάρχει περίπτωση οἱ n_1+n_2 μεταβλητές νά μήν ἐξαντλοῦν τήν ὁμάδα τῶν ἑρμηνευτικῶν μεταβλητῶν. Μ'αὐτά ἀσχολούμαστε στό ἑπόμενο τμῆμα.

VII. Τὸ Σφάλμα Ἐξειδικεύσεως

Μιά περίπτωση τοῦ σφάλματος ἐξειδικεύσεως (specification error) ἀναφέρθηκε στό τέλος τοῦ προηγούμενου τμήματος.

Στή γενική περίπτωση τό σφάλμα ἐξειδικεύσεως ὑπάρχει, ὅταν ἀντί γιά τίς n μεταβλητές πού ἀποτελοῦν τή μήτρα X στό ὑπόδειγμα (2.26), ὁ ἐρευνητής χρησιμοποιεῖ n_o μεταβλητές πού ἀποτελοῦν τή $T\times n_o$ μήτρα X_o. Στή περίπτωση αὐτή τό ὑπόδειγμα πού χρησιμοποιεῖται εἶναι

$$y = X_o\beta_o + u \tag{4.96}$$

Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις (i), (ii), (iv) καί (v) τοῦ Κεφαλαίου 2 καί ἐφόσον

$$r(X_o) = n_o < T \tag{4.97}$$

ὁ Ε.Ε.Τ. τοῦ β_o εἶναι

$$b_o = (X_o'X_o)^{-1} X_o'y \tag{4.98}$$

Ἄν ὅμως τό ὑπόδειγμα (2.26) εἶναι τό σωστό, τότε ἀντικαθιστώντας τήν (2.26) στήν (4.98) ἔχουμε:

$$b_o = (X_o'X_o)^{-1} X_o'X\beta + (X_o'X_o)^{-1} X_o'u \tag{4.99}$$

Ἄν θέσουμε,

$$P_o = (X_o'X_o)^{-1} X_o'X \tag{4.100}$$

ὅπου ἡ P_o εἶναι ἡ μήτρα τῶν ἐκτιμητῶν τῶν παραμέτρων τῶν βοηθητικῶν παλινδρομήσεων (auxiliary regressions).

$$X = X_o\Pi_o + U \tag{4.101}$$

τότε ἡ (4.99) γίνεται:

$$b_o = P_o\beta + (X_o'X_o)^{-1} X_o'u \tag{4.102}$$

καί

$$E(b_o) = P_o\beta \tag{4.103}$$

δηλαδή ὁ b_o εἶναι μεροληπτικός ἐκτιμητής τοῦ β_o.

'Επίπλέον ὁ ἐκτιμητής τῆς σ^2, μέ βάση τήν (4.96), εἶναι

$$s_o^2 = \frac{y'Q_o y}{T-n_o} \tag{4.104}$$

ὅπου

$$\Omega_o = I - X_o(X_o'X_o)^{-1} X_o' \tag{4.105}$$

καί ἀφοῦ

$$\begin{aligned} y'\Omega_o y &= (\beta'X'+u')\Omega_o(X\beta+u) \\ &= \beta'X'\Omega_o X\beta + 2\beta'X'\Omega_o u + u'\Omega_o u \end{aligned} \tag{4.106}$$

ἕπεται ὅτι:

$$E(s_o^2) = \frac{\beta'X'\Omega_o X\beta + (T-n_o)\sigma^2}{T-n_o} \geqslant \sigma^2 \tag{4.107}$$

"Αν λάβουμε ὑπόψη τό ἀποτέλεσμα (2.48) ἕπεται ὅτι:

$$E(s_o^2 - s^2) \geqslant 0 \tag{4.108}$$

$$P_o = (X_o'X_o)^{-1} X_o'X = \begin{bmatrix} X'X & X'X_+ \\ X_+'X & X_+'X_+ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X' \\ X_+' \end{bmatrix} X =$$

$$= \begin{bmatrix} X'X & 0 \\ 0 & X_+'X_+ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X' \\ X_+' \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (4.113)$$

ὅπου I εἶναι ἡ ταυτοτική μήτρα $n \times n$ καί 0 ἡ μηδενική μήτρα $n_+ \times n$ 'Από τή μορφή τῆς P_o εἶναι φανερό ὅτι ὁ ἐκτιμητής b_o εἶναι ἀμερόληπτος ἐκτιμητής τοῦ β.

VIII. Ἡ Γραμμικότητα τοῦ Ὑποδείγματος

Ἡ σχέση (2.26) καί ἡ μορφή τῆς μήτρας X στήν σχέση (2.25), δείχνει ὅτι τό κλασσικό ὑπόδειγμα εἶναι γραμμικό ὡς πρός τίς ἑρμηνευτικές μεταβλητές. Μέ κατάλληλους ὅμως μετασχηματισμούς τό ὑπόδειγμα αὐτό μπορεῖ νά περιλάβη καί πολλές ἄλλες περιπτώσεις. 'Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα πού δίνονται στούς Prais & Houthakker (1955), Johnston (1972) καί Theil (1971)

(i) Ἄν ἔχουμε τό ὑπόδειγμα,

$$y_t = \beta_1 v_t + \beta_2 w_t + \beta_3 v_t^2 + \beta_4 w_t^2 + \beta_5 v_t w_t + u_t \qquad (4.114)$$

καί θέσουμε,

$$x_{t1} \equiv v_t, \quad x_{t2} \equiv w_t, \quad x_{t3} \equiv v_t^2, \quad x_{t4} \equiv w_t^2, \quad x_{t5} \equiv v_t w_t \qquad (4.115)$$

τότε χρησιμοποιώντας τίς (4.115), μποροῦμε νά γράψουμε τό(4.114) ὡς ἑξῆς:

$$y_t = \sum_{j=1}^{5} \beta_j x_{tj} + u_t \qquad (4.116)$$

πρᾶγμα πού σημαίνει ὅτι ὁ ἐκτιμητής τῆς διακυμάνσεως σ^2 πού προκύπτει ἀπό τήν ἐσφαλμένη ἐξειδίκευση τοῦ ὑποδείγματος (4.96)εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος μέ ἐκεῖνο πού προκύπτει ἀπό τήν ὀρθή ἐξειδίκευση (2.26).

Ἄν ἡ μήτρα X περιλαμβάνει καί τήν X_o, ἄν δηλαδή

$$X = (X_o \vdots X_*) \tag{4.109}$$

ὅπου ἡ X_* εἶναι μιά $T \times n_*$ μήτρα $(n_o+n_*=n)$, τότε ἡ (4.100) δίνει:

$$\begin{aligned} P_o &= (X_o'X_o)^{-1} X_o'(X_o \vdots X_*) = \\ &= (I \vdots P_*) \end{aligned} \tag{4.110}$$

ὅπου

$$P_* = (X_o'X_o)^{-1} X_o'X_*$$

Στή περίπτωση τῆς (4.109) παραλείπουμε ἑρμηνευτικές μεταβλητές πού ἔπρεπε νά περιληφθοῦν στό ὑπόδειγμα. Ἡ μεροληψία τοῦ ἐκτιμητή b_o στήν περίπτωση αὐτή ἐξαρτᾶται ἀπό τή συσχέτιση τῶν μεταβλητῶν τῆς μήτρας X_o, μέ ἐκεῖνες τῆς μήτρας X_* καθώς καί ἀπό τίς πραγματικές παραμέτρους τῶν μεταβλητῶν πού περιλαμβάνονται στή μήτρα X_*, ἀφοῦ

$$E(b_{io}) = \beta_i + \sum_{r=n_o+1}^{n} P_{ir}\beta_r \tag{4.111}$$

Ἄν ὅμως ἡ μήτρα X_o περιλαμβάνη τή μήτρα X καί ἄλλες ἄσχετες μεταβλητές, τότε

$$X_o = (X \vdots X_+) \tag{4.112}$$

ὅπου X_+ ἡ μήτρα τῶν n_+ ἄσχετων μεταβλητῶν $(X'X_+ = 0)$, ὁπότε πού εἶναι τό κλασσικό γραμμικό ὑπόδειγμα

(ii) Ἄν ἔχουμε τό ὑπόδειγμα,

$$w_t = Bz_{t2}^{\beta_2} z_{t3}^{\beta_3} z_{t4}^{\beta_4} z_{t5}^{\beta_5} u_t \qquad (4.117)$$

καί πάρουμε τό λογάριθμο τόσο τοῦ ἀριστεροῦ ὅσο καί τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (4.117) τό ἀποτέλεσμα εἶναι:

$$\log w_t = \log B + \sum_{j=2}^{5} \beta_j \log z_{tj} + \log u_t \qquad (4.118)$$

Ἄν θέσουμε,

$$y_t \equiv \log w_t;\ x_{tj} \equiv \log z_{tj},\ j=2,3,4,5;\ \beta_1 \equiv \log B;\ u_t^* \equiv \log u_t \qquad (4.119)$$

τότε τό ὑπόδειγμα μπορεῖ νά γραφτῇ ὡς ἑξῆς:

$$y_t = \sum_{j=1}^{5} \beta_j x_{tj} + u_t^* \qquad (4.120)$$

ὅπου x_{t1} ὁρίζεται ὅπως στήν (2.19)

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι

$$u_t^* = \log u_t \text{ εἶναι } N(0,\sigma^2) \qquad (4.121)$$

τότε (βλέπε Aitchison καί Brown (1957))
ὁ u_t ἀκολουθεῖ τή λογαριθμική κανονική κατανομή μέ μέσο $e^{\frac{\sigma^2}{2}}$ καί Διακύμανση $e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$. (4.122)

Τό κλασσικό γραμμικό ὑπόδειγμα θά μποροῦσε ἀκόμα νά ἐφαρμοστῇ καί στίς ἑξῆς συναρτήσεις (οἱ διαταρακτικοί ὅροι παραλείπονται γιά λόγους ἁπλουστεύσεως).

(iii) $y_t = \beta_1 + \beta_2 \log x_t$ (ἡμιλογαριθμική - semi-log) (4.123)

Ἄν πάρουμε τόν ἀντιλογάριθμο τῆς (4.123) ἔχουμε:

$$x_t = e^{-\frac{\beta_1}{\beta_2}} e^{\frac{y_t}{\beta_2}} \qquad (4.124)$$

$$\text{(iv)}\ y_t = \beta_1 + \frac{\beta_2}{x_t} \qquad (4.125)$$

$$\text{(v)}\ \log y_t = \beta_1 - \frac{\beta_2}{x_t} \qquad (4.126)$$

Στίς περιπτώσεις (4.123), (4.125) καί (4.126) χρειάζεται μετονομασία τῶν μεταβλητῶν, ὅπως στίς περιπτώσεις (i) καί (ii). Σ'ὅλες τίς περιπτώσεις ἡ ἰδιότητα Α.Γ.Α.Ε. ἰσχύει γιά τίς μετασχηματισμένες σχέσεις.

Τό ὑπόδειγμα (2.26) εἶναι γραμμικό καί ὡς πρός τίς παραμέτρους β_j. Στό ὑπόδειγμα ὅμως

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 e^{\beta_3 x_t} + u_t \qquad (4.127)$$

βλέπουμε ὅτι ἡ παράμετρος β_3 δέν ἐμφανίζεται μέ γραμμική μορφή. Στήν περίπτωση αὐτή δέν εἶναι δυνατόν νά ἐφαρμοστοῦν οἱ μέθοδοι πού ἀναπτύξαμε στά Κεφάλαια 2-4. Χρειάζονται μέθοδοι παρόμοιες μέ ἐκεῖνες πού θά ἀναπτύξουμε σέ ἄλλα κεφάλαια τοῦ βιβλίου αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

I. Ἡ Γενικευμένη Μέθοδος τῶν Ἐλαχίστων Τετραγώνων

Ἡ ὑπόθεση (v) πού κάναμε στό Κεφάλαιο 2 (καί πού τήν διατηρήσαμε μέχρι τώρα) ἦταν ὅτι δέν ὑπάρχει οὔτε ἑτεροσκεδαστικότητα (heteroskedasticity) οὔτε αὐτοσυσχέτιση στούς διαταρακτικούς ὅρους. Στό γενικευμένο γραμμικό ὑπόδειγμα (Generalised Linear Model) ἀντικαθιστοῦμε τήν ὑπόθεση αὐτή μέ τήν ὑπόθεση

$$(v.b) \quad E(uu') = \sigma^2\Omega$$

ὅπου ἡ Ω εἶναι μιά γνωστή, θετικά ὁρισμένη, συμμετρική μήτρα. Ἡ ὑπόθεση (v.b) εἶναι γενική καί περιλαμβάνει τόσο τήν ἑτεροσκεδαστικότητα ὅσο καί τήν αὐτοσυσχέτιση. Στό Κεφάλαιο αὐτό, ὅπως καί στά προηγούμενα καί στά ἑπόμενα, διατηροῦμε ὅλες τίς ὑπόλοιπες ὑποθέσεις τοῦ Κεφαλαίου 2.

Ἄν ἐφαρμόσουμε τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων στό ὑπόδειγμα (2.26) μέ τίς ὑποθέσεις (i), (ii), (iii), (iv) καί(v.b), τότε ὁ ἐκτιμητής πού βρίσκουμε εἶναι ἀμερόληπτος, διότι,

$$E(b) = \beta + E\left[(X'X)^{-1} X'u\right] = \beta \tag{5.1}$$

ἀλλά,

$$E\left[(b-\beta)(b-\beta)'\right] = \sigma^2(X'X)^{-1} X'\Omega X(X'X)^{-1} \tag{5.2}$$

πού, ὅπως θά δοῦμε πιό κάτω, δέν εἶναι ἡ μικρότερη δυνατή διακύμανση. Γιά νά βροῦμε Α.Γ.Α.Ε προχωροῦμε ὡς ἑξῆς:

Ἐφόσον ἡ μήτρα Ω εἶναι θετικά ὁρισμένη, ἔπεται (βλέπε Johnston (1972) σελ. 209) ὅτι:

(a) οἱ διακυμάνσεις ὅλων τῶν ὅρων u_t εἶναι θετικές,

(b) ἡ συσχέτιση ἀνάμεσα σέ ὁποιοδήποτε ζεῦγος u_t, u_s $s \neq t$ δέν εἶναι τέλεια, καί

(c) δέν ὑπάρχει τέλεια συσχέτιση ἀνάμεσα σέ ὅλα τά u.

Ἀφοῦ ἡ μήτρα Ω εἶναι θετικά ὁρισμένη, τότε καί ἡ Ω^{-1} (βλέπε Γ.Α. σελ. 134) εἶναι θετικά ὁρισμένη καί (βλέπε Γ.Α.σελ.135) μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$\Omega^{-1} = P'P \tag{5.3}$$

ὅπου P, εἶναι μιά γνωστή ἀντιστρέψιμη μήτρα $T \times T$.

Ἀντιστρέφοντας τήν (5.3) ἔχουμε:

$$\Omega = P^{-1} P'^{-1} \tag{5.4}$$

Πολλαπλασιάζοντας τό ὑπόδειγμα (2.26) μέ P ἀπό τά ἀριστερά, ἔχουμε:

$$Py = PX\beta + Pu \tag{5.5}$$

Ἄν θέσουμε,

$$y^* = Py, \quad X^* = PX, \quad u^* = Pu \tag{5.6}$$

καί ἀντικαταστήσουμε τίς (5.6) στήν (5.5), ἔχουμε:

$$y^* = X^*\beta + u^* \tag{5.7}$$

Ἄν τώρα ἐξετάσουμε τό u^*, βλέπουμε ὅτι:

$$E(u^*) = E(Pu) = PE(u) = 0 \tag{5.8}$$

ἀφοῦ ἰσχύει ἡ ὑπόθεση (iv) τοῦ Κεφαλαίου 2. Ἐπιπλέον

$$E(u^*u^{*\prime}) = E[Puu'P'] = PE(uu')P' = \sigma^2\, P\Omega P' \qquad (5.9)$$

Ἀντικαθιστώντας τήν (5.4) στήν (5.9), ἔχουμε:

$$E[u^*u^{*\prime}] = \sigma^2 PP^{-1}P'^{-1}P' = \sigma^2 I \qquad (5.10)$$

Οἱ διαταρακτικοί ὅροι τῆς (5.7) ἐπομένως, ἱκανοποιοῦν τίς ὑποθέσεις (iv) καί (v) τοῦ Κεφαλαίου 2. Συμβολίζοντας τόν ἐκτιμητή τοῦ β μέ $\hat{\beta}$ καί ἐφαρμόζοντας τήν (2.35), ἔχουμε:

$$\hat{\beta} = (X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}y^* = (X'P'PX)^{-1}X'P'Py =$$

$$= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y \qquad (5.11)$$

Ὁ ἐκτιμητής (5.11), ὀφείλεται στόν Aitken (1935) καί ἔχει τό ὄνομά του. Τά κατάλοιπα $\hat{u}^*$ τῆς (5.7), εἶναι:

$$\hat{u}^* = y^* - X^*\hat{\beta} = y^* - X^*(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}y^* =$$

$$= Py - PX(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y =$$

$$= P[I - X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}]y = PQ^*y \qquad (5.12)$$

ὅπου,

$$Q^* = I - X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1} \qquad (5.13)$$

Κατά συνέπεια

$$\hat{u}^{*\prime}\hat{u}^* = y'Q^{*\prime}P'P\,Q^*y = y'Q^{*\prime}\Omega^{-1}Q^*y \qquad (5.14)$$

Ἄν ἀπό τήν (5.14), πάρουμε τή μήτρα $Q^{*\prime}\Omega^{-1}Q^*$, ἔχουμε:

$$Q^{*\prime}\Omega^{-1}Q^* = (I - X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1})'\Omega^{-1}(I - X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1})$$

$$= (\Omega^{-1} - \Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1})(I - X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}) =$$

$$= \Omega^{-1} - \Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1} - \Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1} +$$

$$+\ \Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}X)(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}=$$

$$=\Omega^{-1}-\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}=\Omega^{-1}(I-X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1})=$$

$$=\Omega^{-1}Q^{*} \qquad (5.15)$$

Ἀντικαθιστώντας τίς (2.26) καί (5.15) στήν (5.14), ἔχουμε:

$$\hat{u}^{*\prime}\hat{u}^{*}=y'\Omega^{-1}Q^{*}y=(\beta'X'+u')\Omega^{-1}Q^{*}(X\beta+u)=$$

$$=\beta'X'\Omega^{-1}Q^{*}X\beta+u'\Omega^{-1}Q^{*}X\beta+\beta'X'\Omega^{-1}Q^{*}u+u'\Omega^{-1}Q^{*}u=$$

$$=\beta'X'(\Omega^{-1}-\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1})X\beta\ +$$

$$+\ u'(\Omega^{-1}-\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)X'\Omega^{-1})X\beta\ +$$

$$+\ \beta'X'(\Omega^{-1}-\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1})u+u'\Omega^{-1}Q^{*}u=$$

$$=\beta'X'\Omega^{-1}X\beta-\beta'X'\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}X\beta\ +$$

$$+\ u'\Omega^{-1}X\beta-u'\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}X\beta\ +$$

$$+\ \beta'X'\Omega^{-1}u-\beta'X\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}u+u'\Omega^{-1}Q^{*}u=$$

$$=u'\Omega^{-1}Q^{*}u \qquad (5.16)$$

Προχωρώντας ὅπως στίς (2.42)-(2.46), ἔχουμε:

$$E(\hat{u}^{*\prime}\hat{u}^{*})=E[u'\Omega^{-1}Q^{*}u]=E[tr(u'\Omega^{-1}Q^{*}u)]=$$

$$=E[tr(\Omega^{-1}Q^{*}uu')]=tr[E(\Omega^{-1}Q^{*}uu')]=$$

$$=tr[\Omega^{-1}Q^{*}E(uu')]=\sigma^{2}tr(\Omega^{-1}Q^{*}\Omega)=$$

$$=\sigma^{2}tr(\Omega\Omega^{-1}Q^{*})=\sigma^{2}tr(I-X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1})$$

$$=\sigma^{2}tr(I_T)-\sigma^{2}tr(X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1})=$$

$$=\sigma^{2}tr(I_T)-\sigma^{2}tr((X'\Omega^{-1}X)(X'\Omega^{-1}X))=$$

$$=\sigma^{2}I_T-\sigma^{2}trI_n=\sigma^{2}(T-n) \qquad (5.17)$$

Ἄν ἡ σ^2 εἶναι ἄγνωστη καί πάρουμε σάν ἐκτιμητή της τήν

$$s^{*2} = \frac{\hat{u}^{*\prime}\hat{u}^{*}}{T-n} \qquad (5.18)$$

τότε,

$$E(s^{*2}) = \frac{\sigma^2(T-n)}{T-n} = \sigma^2 \qquad (5.19)$$

δηλαδή ἡ s^{*2} εἶναι ἀμερόληπτος ἐκτιμητής τῆς σ^2

II. Τὸ Γενικευμένο Θεώρημα τῶν Gauss-Markov

Θεώρημα: Ὁ ἐκτιμητής τοῦ Aitken (5.11), εἶναι Α.Γ.Α.Ε.

Ἀπόδειξη: Ἡ ἀπόδειξη ἀκολουθεῖ τήν ἴδια πορεία ὅπως καί τό ἁπλό θεώρημα τῶν Gauss-Markov, ἀπό (2.55) ἕως (2.67), γι'αὐτό καί τό τμῆμα αὐτό θά εἶναι συντομευμένο.

(i) Ἐφόσον ὑποθέτουμε ὅτι X καί Ω εἶναι γνωστές μῆτρες, γνωστή θά εἶναι καί ἡ μήτρα,

$$A^{*\prime} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1} \qquad (5.20)$$

ἄρα ὁ ἐκτιμητής τοῦ Aitken, μπορεῖ νά γραφτῆ:

$$\hat{\beta} = A^{*\prime}y \qquad (5.21)$$

δηλαδή εἶναι γραμμικός ὡς πρός y.

(ii) Ὁ ἐκτιμητής εἶναι ἀμερόληπτος, διότι, ἐφόσον ἐξακολουθεῖ νά ἰσχύη ἡ ὑπόθεση (iv) τοῦ Κεφαλαίου 2, ἔχουμε:

$$E(\hat{\beta}) = E[A^{*\prime}(X\beta+u)] = E[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}X\beta + A^{*\prime}u] =$$

$$= \beta + A^{*\prime}E(u) = \beta \qquad (5.22)$$

(iii) Γιά νά δοῦμε ἄν ὑπάρχη ἐκτιμητής μέ μικρότερη διακύμανση ἀπό τόν $\hat{\beta}$, χρειάζεται νά βροῦμε τήν $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\hat{\beta}) &= E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'] = \\ &= E[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}uu'\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}] = \\ &= \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad (5.23) \end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα ἕνα ἄλλο γραμμικό καί ἀμερόληπτο ἐκτιμητή τοῦ β

$$\hat{\beta}^* = (A^{*\prime}+C^{*\prime})y \qquad (5.24)$$

ὅπου, ἡ $C^{*\prime}$ (ὅπως καί ἡ $A^{*\prime}$) εἶναι μιά σταθερή $n \times T$ μήτρα, μέ $r(C^{*\prime}) \leqslant n$.

Ἀφοῦ ὁ ἐκτιμητής $\hat{\beta}^*$ εἶναι ἀμερόληπτος, ἕπεται (βλέπε(2.60)) ὅτι:

$$C^{*\prime}X = 0 \quad \text{καί} \quad X'C^* = 0 \qquad (5.25)$$

Γιά νά βροῦμε τήν $\mathrm{Var}(\hat{\beta}^*)$, προχωροῦμε ὅπως στίς (2.62) καί (2.63).

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\hat{\beta}^*) &= E[(A^{*\prime}+C^{*\prime})uu'(A^*+C^*)] = \\ &= \sigma^2(A^{*\prime}\Omega A^* + C^{*\prime}\Omega C^*) \qquad (5.26) \end{aligned}$$

ἀλλά,

$$\begin{aligned} A^{*\prime}\Omega A^* &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1} = \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad (5.27) \end{aligned}$$

Ἄρα

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}^*) = \mathrm{Var}(\hat{\beta}) + \sigma^2 C^{*\prime}\Omega C^* \qquad (5.28)$$

δηλαδή,

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}^*) - \mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 C^{*\prime}\Omega C^* \tag{5.29}$$

Ἐφόσον $r(C^*) \leqslant n$ καί ἡ μήτρα Ω εἶναι θετικά ὁρισμένη, ἕπεται ὅτι ἡ μήτρα $C^{*\prime}\Omega\, C^*$ εἶναι θετικά ἡμιορισμένη. Κατά συνέπεια ὁ $\hat{\beta}$ εἶναι ἄριστος ἐκτιμητής καί ἑπομένως ἡ (5.23) εἶναι μικρότερη ἤ ἴση ἀπό τήν (5.26).

III. Ἡ Συνέπεια τοῦ $\hat{\beta}$

Γιά νά ἐφαρμόσουμε τά ὅσα ἀναφέραμε στό τμῆμα VI τοῦ Κεφαλαίου 2 σημειώνουμε ὅτι:

$$\lim_{T\to\infty} \left\{ \frac{X'\Omega^{-1}X}{T} \right\} = M^* \tag{5.30}$$

διότι ἰσχύει ἡ ὑπόθεση (i) τοῦ Κεφαλαίου 2 καί ὑποθέτουμε στό Κεφάλαιο αὐτό, ὅτι ἡ Ω εἶναι θετικά ὁρισμένη. Μετά προχωροῦμε, ὅπως στό τμῆμα VI τοῦ Κεφαλαίου 2. Πρῶτα ἐξετάζουμε:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} E(\hat{\beta}) &= \lim_{T\to\infty} E\left\{(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y\right\} = \\
&= \lim_{T\to\infty} E\left\{\beta + (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}u\right\} = \\
&= \lim_{T\to\infty} E\left\{\beta + \left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{T}\right)^{-1}\left(\frac{X'\Omega^{-1}u}{T}\right)\right\} = \\
&= \beta + \lim_{T\to\infty}\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{T}\right)^{-1} \lim_{T\to\infty}\left(\frac{X'\Omega^{-1}E(u)}{T}\right) = \\
&= \beta + M^{*-1}\, o = \beta
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Γιά ν'ἀποδείξουμε τήν (5.31) ἐφαρμόσαμε τήν ἰδιότητα τῶν ὁρίων, δηλαδή ὅτι τό ὅριο μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἡ (ἴδια) συνάρτηση τῶν ὁρίων (βλέπε καί Hardy (1952) σελ. 178)).

'Από τήν (5.31) φαίνεται, ὅτι ὁ $\hat{\beta}$ εἶναι ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος.

Μετά ἐξετάζουμε:

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \lim_{T\to\infty} \left\{\sigma^2 (X'\Omega^{-1} X)^{-1}\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left\{\frac{\sigma^2}{T}\left(\frac{X'\Omega^{-1} X}{T}\right)^{-1}\right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(\frac{X'\Omega^{-1} X}{T}\right)^{-1} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{\sigma^2}{T}\right) =$$

$$= M^{*-1} \lim_{T\to\infty} \left(\frac{\sigma^2}{T}\right) = M^{*-1}\cdot 0 = 0 \qquad (5.32)$$

'Από τίς (5.31) καί (5.32), καταλήγουμε στό συμπέρασμα ὅτι ὁ ἐκτιμητής $\hat{\beta}$ εἶναι συνεπής.

IV. Ἐφαρμογὴ τῆς Μεθόδου τῆς Μεγίστης Πιθανότητος στὸ Γενικευμένο Γραμμικὸ Ὑπόδειγμα

Ἄν πάρουμε τίς ὑποθέσεις (i), (ii), (iii) τοῦ Κεφαλαίου 2, τήν ὑπόθεση (vi.a) τοῦ Κεφαλαίου 3, διατυπώσουμε τήν ὑπόθεση (v.b) ὡς ἑξῆς:

(v.c) $\mathrm{Var}(y) = \sigma^2\Omega$

κι'ἐπιπλέον ὑποθέσουμε ὅτι:

(vi.b) y εἶναι $N(X\beta,\ \sigma^2\Omega)$

τότε, ἀκολουθώντας τή μέθοδο πού ἀναπτύξαμε στό τέλος τοῦ τμήματος II τοῦ Κεφαλαίου 3, ἔχουμε τή συνάρτηση πιθανότητος

$$\mathcal{L}(y;X\beta,\sigma^2\Omega) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^T (\det\Omega)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)'\Omega^{-1}(y-X\beta)} \tag{5.33}$$

Ὁ λογαριθμικός μετασχηματισμός τῆς (5.33), εἶναι:

$$L = \log\mathcal{L} = -\frac{T}{2}\log 2\pi - T\log\sigma - \frac{1}{2}\log(\det\Omega) -$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(y'-\beta'X')\Omega^{-1}(y-X\beta) =$$

$$= -\frac{T}{2}\log 2\pi - T\log\sigma - \frac{1}{2}\log(\det\Omega) -$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(y'\Omega^{-1}y - 2\beta'X'\Omega y + \beta'X'\Omega^{-1}X\beta) \tag{5.34}$$

Παραγωγίζοντας τήν (5.34) ὡς πρός β καί σ, ἔχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2}(X'\Omega y - X'\Omega^{-1}X\beta) \tag{5.35}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{T}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}(y'-\beta'X')\Omega^{-1}(y-X\beta) \tag{5.36}$$

Ἄν ἐξισώσουμε τήν (5.35) μέ τό μηδέν καί τήν ἐπιλύσουμε ὡς πρός β, βλέπουμε ὅτι ὁ Ε.Μ.Π. τοῦ β εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν ἐκτιμητή τῆς Γενικευμένης Μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων τῆς (5.11).

Ἄν ἐξισώσουμε τήν (5.36) μέ τό μηδέν, ἀντικαταστήσουμε τόν β μέ τόν $\hat{\beta}$ καί τήν ἐπιλύσουμε ὡς πρός σ^2 ἔχουμε:

$$\tilde{\sigma}^{*2} = \frac{(y'-\hat{\beta}'X')\Omega^{-1}(y-X\hat{\beta})}{T} \tag{5.37}$$

Ὁ (5.37), ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ (3.18) δέν εἶναι ἀμερόληπτος. Εἶναι ὅμως ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος (βλέπε (3.18)-(3.22)).

Τέλος ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ σ^2 εἶναι γνωστή,

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = -\left\{E\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'}\right]\right\}^{-1} = \left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{\sigma^2}\right)^{-1} =$$

$$= \sigma^2 (X'\Omega^{-1} X)^{-1} \tag{5.38}$$

Συγκρίνοντας τήν (5.38) μέ τήν (5.23), βλέπουμε ὅτι εἶναι οἱ ἴδιες.

V. Τὸ Πλῆθος τῶν Παραμέτρων ποὺ πρέπει νὰ ἐκτιμηθοῦν ὅταν ἡ Μήτρα Ω εἶναι ἄγνωστη

Μέχρι τώρα ὑποθέσαμε ὅτι ἡ μήτρα Ω εἶναι γνωστή καί γι'αὐτό ἀσχοληθήκαμε μέ τούς ἐκτιμητές τῶν β καί σ^2, εἴτε μέ τή γενικευμένη μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, εἴτε μέ τήν μέθοδο τῆς μεγίστης πιθανότητος.

Ἀφοῦ ὑποθέσαμε ὅτι ἡ μήτρα Ω εἶναι συμμετρική καί θετικά ὁρισμένη, ἔπεταί ὅτι:

$$E(uu') = \sigma^2\Omega = \sigma^2 \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1T} \\ \omega_{12} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2T} \\ \vdots & & & \vdots \\ \omega_{1T} & \omega_{2T} & \cdots & \omega_{TT} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1T} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2T} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{1T} & \sigma_{2T} & \cdots & \sigma_{TT} \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

ὅπου,

$$\sigma_{st} \equiv \sigma^2 w_{st} \qquad (5.40)$$

Ἄν ἡ μήτρα Ω δέν εἶναι γνωστή, ὅπως συμβαίνει κατά κανόνα στήν πράξη, χρειάζεται νά ἐκτιμήσουμε τά στοιχεῖα της. Τό πλῆθος τῶν στοιχείων αὐτῶν εἶναι:

$$\frac{T(T+1)}{2} \qquad (5.41)$$

Ἑπομένως τό πλῆθος τῶν παραμέτρων πού πρέπει νά ἐκτιμηθοῦν στό γενικευμένο γραμμικό ὑπόδειγμα, ὅταν ἡ μήτρα Ω εἶναι ἄγνωστη, εἶναι οἱ n παράμετροι β_j καί τά (5.41) στοιχεῖα τῆς μήτρας Ω. Ἐφόσον τό δεῖγμα πού ἔχουμε ἔχει μόνο T παρατηρήσεις, εἶναι φανερό πώς ἡ ἐκτίμηση ὅλων αὐτῶν τῶν παραμέτρων εἶναι ἀδύνατη.

Γιά ν'ἀντιμετωπιστῆ τό πρόβλημα, πρέπει νά περιορίσουμε τόν ἀριθμό τῶν παραμέτρων, πού πρέπει νά ἐκτιμηθοῦν. Στή βασική θεωρητική Οἰκονομετρία συνηθίζεται νά διαχωρίζουμε τό πρόβλημα τῆς ἑτεροσκεδαστικότητας ἀπό τό πρόβλημα τῆς αὐτοσυσχετίσεως. Στά ἑπόμενα τμήματα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ, θά ἀσχοληθοῦμε μέ τό πρόβλημα τῆς ἑτεροσκεδαστικότητας καί στό ἑπόμενο Κεφάλαιο μέ τό πρόβλημα τῆς αὐτοσυσχετίσεως.(Βλέπε ὅμως καί Κεφάλαιο 7)

VI. Ἑτεροσκεδαστικότητα

Ὅπως ἀναφέραμε στό προηγούμενο τμῆμα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ, γιά λόγους ἁπλουστεύσεως τοῦ προβλήματος, ὑποθέτουμε ὅτι δέν ὑπάρχει αὐτοσυσχέτιση ἀνάμεσα στούς διαταρακτικούς ὅρους, δηλαδή ὑποθέτουμε ὅτι:

$$E(u_t u_s) = 0, \; s \neq t \qquad (5.42)$$

ἀλλά δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει ἑτεροσκεδαστικότητα, δηλαδή,

$$E(u_t^2) = \sigma_{tt} \equiv \sigma_t^2, \; t = 1,2,\ldots,T \tag{5.43}$$

Μέ τίς ὑποθέσεις (5.42) καί (5.43) ἡ μήτρα (5.39) ἔχει τή μορφή

$$\sigma^2\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \ldots & 0 \\ . & 0 & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_T^2 \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

ὁπότε,

$$\frac{\Omega^{-1}}{\sigma^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \ldots & 0 \\ . & 0 & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_T^2} \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

καί

$$\frac{P}{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \ldots & 0 \\ . & 0 & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{\sigma_T} \end{bmatrix} \tag{5.46}$$

Στήν περίπτωση αὐτή τά ἀντιπροσωπευτικά στοιχεῖα τῶν y^* καί X^* εἶναι:

$$y_t^* = \frac{y_t}{\sigma_t} \quad \text{καί} \quad x_{tj}^* = \frac{x_{tj}}{\sigma_t}, \quad t = 1,\ldots,T \quad j = 1,\ldots,n \tag{5.47}$$

Παρ'ὅλο ὅτι κάναμε τήν ὑπόθεση (5.42), τό πρόβλημα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν παραμέτρων πού πρέπει νά ἐκτιμηθοῦν, παραμένει διότι ἔχουμε νά ἐκτιμήσουμε συνολικά T+n παραμέτρους, μέ μόνο T παρατηρήσεις. Ἄν ὁ ἀριθμός τῶν β_j παραμείνη n, τότε πρέπει νά περιορίσουμε τόν ἀριθμό τῶν σ_t^2, πού πρέπει νά ἐκτιμηθοῦν.

Μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι οἱ σ_t^2, μέ δεδομένες τίς παρατηρήσεις πάνω στίς x_{tj}, $j = 1,\ldots,n$, εἶναι συναρτήσεις ἑνός διανύσματος παραμέτρων,

$$\boldsymbol{\theta}' = (\theta_1, \theta_2,\ldots,\theta_p) \tag{5.48}$$

δηλαδή,

$$\sigma_t^2 = f_t(x_t;\boldsymbol{\theta}') \equiv \Phi_t \tag{5.49}$$

ὅπου $(p+n) < T$ (5.50)

Ὅπως εἶναι γνωστό (βλέπε Mood and Graybill (1963)) οἱ Ε.Μ.Π. εἶναι συνεπεῖς. Ἑπομένως μποροῦμε νά βροῦμε συνεπεῖς ἐκτιμήσεις τῶν $\boldsymbol{\theta}'$, μέ τή μέθοδο τῆς μεγίστης πιθανότητος καί ταυτόχρονα νά βροῦμε καί τίς ἐκτιμήσεις τῶν β πού,ὅπως εἴδαμε,εἶναι οἱ ἴδιες μέ τίς ἐκτιμήσεις τῆς γενικευμένης μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καί εἶναι, καί αὐτές, συνεπεῖς.

Μέ τήν ὑπόθεση (5.49), ἔχουμε:

$$\log(\det\sigma^2\Omega) = \log \begin{vmatrix} \Phi_1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & \Phi_2 & \ldots 0 \\ . & 0 & . \\ . & & . \\ . & & . \\ 0 & \ldots & \Phi_T \end{vmatrix} = \log\left(\prod_{t=1}^{T} \Phi_t\right) = \sum_{t=1}^{T} \log\Phi_t \qquad (5.51)$$

Ἐπιπλέον, ἐφόσον,

$$\frac{\Omega^{-1}}{\sigma^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Phi_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Phi_2} & \ldots & 0 \\ . & 0 & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & . & \ldots & \frac{1}{\Phi_T} \end{bmatrix}$$

καί $$(y'-\beta'X') = \left\{(y_1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{1j}), \ldots, (y_T - \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{Tj})\right\} \qquad (5.53)$$

ἔχουμε:

$$\frac{1}{\sigma^2}(y'-\beta'X')\Omega^{-1}(y-X\beta) = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{\Phi_t}(y_t - \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{tj})^2 \qquad (5.54)$$

Μετά ἀπό τήν ἀντικατάσταση τῶν (5.51) καί (5.54) στήν(5.34), ἔχουμε:

$$L = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log\Phi_t - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\Phi_t}\,(y_t - \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{tj})^2$$

$$= -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log\Phi_t - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\Phi_t}\Big[\,y_t^2 - 2y_t\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{tj} +$$

$$+(\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{tj})^2\Big] \qquad (5.55)$$

Ἐπειδή ἔχουμε δυό ὁμάδες παραμέτρων (τίς β_j, j= 1,...,n καί θ_s, s= 1,...,p), θά πρέπη νά παραγωγίσουμε τήν (5.55) ὡς πρός τίς δυό αὐτές ὁμάδες. Οἱ παράγωγοι εἶναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{t=1}^{T}\frac{y_t x_{tj}}{\Phi_t} - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\Phi_t}\,x_{ti}x_{tj}\right)\beta_i,\ j=1,\dots,n \qquad (5.56)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_s} = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\Phi_t}\frac{\partial\Phi_t}{\partial\theta_s} + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{u_t^2}{\Phi_t^2}\frac{\partial\Phi_t}{\partial\theta_s} =$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{u_t^2-\Phi_t}{\Phi_t^2}\right)\frac{\partial\Phi_t}{\partial\theta_s}\quad,\ s = 1,\dots,p \qquad (5.57)$$

ὅπου,

$$u_t = y_t - \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{tj} \qquad (5.58)$$

Ἄν ἐξισώσουμε τίς (5.56) καί (5.57) μέ τό μηδέν, θά ἔχουμε ἕνα σύστημα ἀπό n+p ἐξισώσεις. Οἱ ἐξισώσεις αὐτές δέν εἶναι πιά γραμμικές ὡς πρός τίς παραμέτρους κι'ἐπομένως, χρειάζονται είδικές μέθοδοι γιά τή λύση τους.

VII. Ἔλεγχος γιὰ Ἑτεροσκεδαστικότητα μὲ Ὑποδιαίρεση τοῦ Δείγματος σὲ Ὁμάδες

Πρίν προχωρήσουμε (στήν περίπτωση χρονολογικῶν σειρῶν) στόν προσδιορισμό τῆς συναρτήσεως Φ_t, θά πρέπη νά διαπιστώσουμε ἄν καί κατά πόσον ὑπάρχη ἑτεροσκεδαστικότητα. Συνηθίζεται, σέ τέτοιες περιπτώσεις, νά χρησιμοποιοῦνται διαγράμματα. Στήν τεταγμένη ἔχουμε τά κατάλοιπα, ἐνῶ στή τετμημένη τίς χρονικές περιόδους. Ἀπό τά διαγράμματα αὐτά μπορεῖ νά διαπιστωθῆ ἄν, μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου, ὑπάρχουν ἐνδείξεις ὅτι αὐξάνει ἡ διακύμανση τῶν διαταρακτικῶν ὅρων.

Τά διαγράμματα ὅμως δέν ἀποτελοῦν ἐλέγχους. Ἄν χρησιμοποιήσουμε τά κατάλοιπα γιά ἐλέγχους, θά πρέπη νά ἔχουμε ὑπόψη (βλέπε Theil (1971) σελ. 196) ὅτι:

$$\mathrm{Var}(\hat{u}) = E(\hat{u}\hat{u}') = E(Quu'Q') = \sigma^2 Q \tag{5.59}$$

Ἡ (5.59) εἶναι ἴση μέ τή μηδενική μήτρα, ὅταν καί μόνον ὅταν $n=T$ Στήν περίπτωση αὐτή, ἐφόσον ἰσχύει ἡ ὑπόθεση (iii) τοῦ Κεφαλαίου 2, εἶναι:

$$Q = I-X(X'X)^{-1}X' = I-XX^{-1}X'^{-1}X' = I-I = 0 \tag{5.60}$$

ὁπότε φυσικά:

$$\hat{u} = Qu = 0 \tag{5.61}$$

Σέ ὅτι ἀκολουθεῖ ἡ περίπτωση τῶν (5.60) καί (5.61) δέν ἐξετάζεται, διότι ὑποθέτουμε ὅτι $n<T$.

Ἡ σχέση (5.59) δείχνει καθαρά, ὅτι τά κατάλοιπα ἀπό τήν (2.26) δέν παρουσιάζουν ἀναγκαστικά ὁμοσκεδαστικότητα καί ἔλλειψη αὐτοσυσχετίσεως (καί ὅταν ἀκόμα οἱ διαταρακτικοί ὅροι ἱκανοποιοῦν τήν ὑπόθεση (v)). Κατά συνέπεια χρειάζεται προσοχή, ὅταν γίνεται χρήση τῶν κατανομῶν F καί $\mathcal{X}^2$, μέ κατάλοιπα ἀπό τό ὑπόδειγμα (2.26). Ἔτσι π.χ. δέν μποροῦμε νά ὑποδιαιρέσουμε τά κατάλοιπα ἀπό τό ὑπόδειγμα (2.26) σέ δυό ὁμάδες (ὅταν $T=2T_1$, ἡ κάθε μιά ὁμάδα θά ἔχη T_1 κατάλοιπα) καί νά ἐλέγξουμε ἄν ὑπάρχη ἑτεροσκεδαστικότητα χρησιμοποιώντας τό λόγο,

$$\frac{\sum_{t=1}^{T_1} \hat{u}_t^2}{\sum_{t=T_1+1}^{2T_1} \hat{u}_t^2} \tag{5.62}$$

διότι τά κατάλοιπα πού εἶναι στόν ἀριθμητή (σύμφωνα μέ τήν (5.59)) δέν εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπό τά κατάλοιπα τοῦ παρανομαστῆ.

Γιά νά ἀντιμετωπιστῆ τό πρόβλημα, οἱ Goldfeld καί Quandt (1965) (βλέπε ἐπίσης καί Glejser (1969)) πρότειναν νά ἐκτιμηθῆ τό διάνυσμα β δυό φορές, μέ ὑποδιαίρεση τοῦ δείγματος σέ δυό ὁμάδες, μέ ἴσες παρατηρήσεις ἡ καθεμιά (ἄς ποῦμε T_*). Στήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου αὐτῆς εἶναι προτιμότερο, ἀνάμεσα στίς δυό ὁμάδες νά μεσολαβῆ ἕνα κενό, δηλαδή νά παραλείπουμε ὁρισμένες παρατηρήσεις τοῦ δείγματος. Ἡ ὑποδιαίρεση ἑπομένως τοῦ δείγματος εἶναι ὡς ἑξῆς:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

Στήν ἐφαρμογή τοῦ ἐλέγχου, παραλείπουμε τίς παρατηρήσεις y_2 καί X_2 καί χρησιμοποιοῦμε τίς (y_1, X_1) καί (y_3, X_3). Καί στίς δυό αὐτές ὑποομάδες τά διανύσματα ἔχουν T_* συντεταγμένες καί οἱ μῆτρες εἶναι διαστάσεων $T_* \times n$. Ἑπομένως ἔχουμε τά ὑποδείγματα:

$$y_1 = X_1 \beta + u_1 \tag{5.64}$$

$$y_3 = X_3\beta + u_3 \tag{5.65}$$

Τά κατάλοιπα ἀπό τίς (5.64) καί (5.65), εἶναι:

$$\hat{u}_1 = Q_1 u_1 \tag{5.66}$$

καί

$$\hat{u}_3 = Q_3 u_3 \tag{5.67}$$

ὅπου,

$$Q_1 = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \tag{5.68}$$

καί

$$Q_3 = I - X_3(X_3'X_3)^{-1}X_3' \tag{5.69}$$

Ἄν οἱ διαταρακτικοί ὅροι στίς (5.64) καί (5.65) ἱκανοποιοῦν τήν ὑπόθεση (vi) τοῦ Κεφαλαίου 3, τότε προχωρώντας ὅπως στό τμῆμα V τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ, μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ,

$$\frac{u_1'Q_1u_1}{\sigma^2} \quad \text{εἶναι} \quad \mathcal{X}^2_{T_*-n} \tag{5.70}$$

καί ἡ

$$\frac{u_3'Q_3u_3}{\sigma^2} \quad \text{εἶναι} \quad \mathcal{X}^2_{T_*-n} \tag{5.71}$$

Ἐπιπλέον ἐφόσον ἰσχύει ἡ ὑπόθεση (vi) ἔχουμε:

$$\begin{aligned} E(\hat{u}_1\hat{u}_3') &= E[Q_1u_1u_3'Q_3] = Q_1E(u_1u_3')Q_3 = \\ &= Q_1 0 Q_3 = 0 \end{aligned} \tag{5.72}$$

ἄρα ὁ λόγος,

$$\frac{u_1'Q_1u_1}{u_3'Q_3u_3} \quad \text{εἶναι} \quad F_{T_*-n,T_*-n} \tag{5.73}$$

Ἄν ἡ (5.73) εἶναι μεγάλη τότε ἡ διακύμανση τῶν διαταρακτικῶν ὅρων γίνεται μικρότερη ὅσο περνᾶ ὁ χρόνος, ἐνῶ ἄν ἡ (5.73) εἶναι μικρή, τότε ἡ διακύμανση γίνεται μεγαλύτερη ὅσο περνᾶ ὁ χρόνος. Οἱ λέξεις "μικρή" ἤ "μεγάλη" φυσικά ἀναφέρονται σέ σχέση μέ τήν τιμή τῆς κατανομῆς F_{T_*-n,T_*-n} .

Τό μεγάλο μειονέκτημα τῆς μεθόδου αὐτῆς εἶναι ὅτι χάνονται βαθμοί ἐλευθερίας, διότι ἀπό τό δεῖγμα τῶν $2T_*$ παρατηρήσεων πού χρησιμοποιοῦμε, ὑπολογίζουμε 2n παραμέτρους. Ἐπιπλέον χάνουμε τίς παρατηρήσεις (y_2,X_2). Σέ πολλές περιπτώσεις χρονολογικῶν σειρῶν δέν ἔχουμε ἀρκετές παρατηρήσεις ὥστε νά μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τόν ἔλεγχο αὐτό.

VIII. Ἔλεγχος γιὰ Ἑτεροσκεδαστικότητα μὲ τὴ Μέθοδο τῆς Ἐλαχίστης Πιθανότητος

Ὑπάρχουν περιπτώσεις στίς ὁποῖες ἡ γενική συνάρτηση Φ_t τοῦ τμήματος VI, ὑποτίθεται ὅτι ἔχει τήν ἁπλή μορφή (βλέπε Kmenta (1971) σελ. 257).

$$\Phi_t \equiv \sigma_t^2 = \sigma^2 z_t^{\delta} \quad ,t = 1,\ldots,T \tag{5.74}$$

ὅπου z_t εἶναι μιά μεταβλητή πού μπορεῖ νά περιλαμβάνεται στό ὑπόδειγμα πού πρόκειται νά ἐκτιμήσουμε. Μπορεῖ ὅμως καί νά μήν περιλαμβάνεται σ'αὐτό.

Ἡ (5.74) ἀπό τή μιά μεριά ἐξειδικεύει τήν Φ_t καί εἰσάγει δυό ἀγνώστους, τήν σ^2 καί δ, ἀπό τήν ἄλλη ὅμως ἀφήνει ἀνοιχτό τό θέμα τοῦ ἄν ὑπάρχη ἑτεροσκεδαστικότητα ἤ ὄχι, διότι, στήν περίπτωση πού,

$$\delta = 0 \tag{5.75}$$

ή (5.74) γίνεται:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 \tag{5.76}$$

οπότε έχουμε ομοσκεδαστικότητα.

Αν αντικαταστήσουμε τήν (5.74) στήν (5.55), έχουμε:

$$L = -\frac{T}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\log\sigma^2 + \delta\log z_t) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t - \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{tj}}{\sigma z_t^{\delta/2}}\right)^2 \tag{5.77}$$

Προχωρώντας όπως στό τμήμα VI, παραγωγίζουμε τήν (5.77) ώς πρός β_j, $j = 1,\dots,n$, σ^2 καί δ καί έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = \sum_{t=1}^{T}\frac{y_t x_{tj}}{\sigma^2 z_t^{\delta}} - \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{T}\frac{x_{ti}x_{tj}}{\sigma^2 z_t^{\delta}}\right)\beta_i,\quad j = 1,\dots,n \tag{5.78}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{T}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{y_t - \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{tj}}{z_t^{\delta/2}}\right)^2 \tag{5.79}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log z_t + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t - \sum_{j=1}^{n}\beta_j x_{tj})^2 \log z_t}{z_t^{\delta}} \tag{5.80}$$

Όπως καί στό τμήμα VI άν εξισώσουμε τίς (5.78), (5.79) καί (5.80) μέ τό μηδέν, βλέπουμε ότι έχουμε n+2 εξισώσεις πού δέν είναι γραμμικές ώς πρός τίς παραμέτρους β_j, $j = 1,\dots,n$, σ^2 καί δ. Όταν εφαρμόσουμε τίς ειδικές μεθόδους πού υπάρχουν γιά τήν εκτίμηση τῶν παραμέτρων αὐτῶν καί ἐφόσον τό δεῖγμα εἶναι ἀρκετά μεγάλο, ὁ ἐκτιμητής τοῦ δ, ἄς ποῦμε $\tilde{\delta}$, θά ἀκολουθῆ τήν κανονική κατανομή καί ἐπομένως μποροῦμε νά ἐλέγξουμε τήν ὑπόθεση

$$H_o : \delta = 0 \qquad (5.81)$$

ὑπολογίζοντας τό λόγο,

$$\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\sigma}_{\tilde{\delta}}} \qquad (5.82)$$

(ὅπου $\tilde{\sigma}_{\tilde{\delta}}$ εἶναι τό τυπικό σφάλμα τῆς $\tilde{\delta}$) καί βλέποντας ἄν, στό ἐπίπεδο σημαντικότητος 5%, ἰσχύη ἡ ἀνισότητα

$$-1.96 < \frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\sigma}_{\tilde{\delta}}} < 1.96 \qquad (5.83)$$

Στήν περίπτωση πού ἰσχύει ἡ (5.83) (βλέπε καί Κεφάλαιο 3 τμῆμα III) δεχόμαστε τήν ὑπόθεση (5.81), ὅτι δηλαδή ὑπάρχει ὁμοσκεδαστικότητα, ὁπότε μποροῦμε νά προχωρήσουμε στήν ἐκτίμηση τοῦ ὑποδείγματος μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

IX. Ἐξειδικευμένες Ὑποθέσεις γιά Ἑτεροσκεδαστικότητα

Οἱ Prais and Houthakker (1955) ἦταν ἀπό τούς πρώτους πού ἀντιμετώπισαν τό πρόβλημα τῆς ἑτεροσκεδαστικότητας στήν πράξη. Ἡ ἐργασία τους ἀναφέρεται σέ ὅλα σχεδόν τά ἐγχειρίδια Οἰκονομετρίας.

Μέσα στό πλαίσιο τῆς γενικῆς ἀναλύσεως τῆς ἑτεροσκεδαστικότητας πού κάνουμε στό Κεφάλαιο αὐτό καί μέ τήν ὁρολογία τοῦ προηγούμενου τμήματος οἱ Prais and Houthakker πῆραν σάν z_t μιά (στήν περίπτωσή τους τή μόνη) ἀπό τίς ἀνεξάρτητες μεταβλητές καί ἔδωσαν μιά συγκεκριμένη τιμή στό δ (δ=2). Στήν περίπτωση αὐτή ἡ (5.74) (ἄν ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητή εἶναι ἡ x_{tk}) γίνεται:

$$\Phi_t = \sigma^2 x_{tk}^2 \tag{5.84}$$

ὁπότε τό μετασχηματισμένο ὑπόδειγμα γίνεται:

$$\frac{y_t}{x_{tk}} = \frac{\beta_1}{x_{tk}} + \beta_2\left(\frac{x_{t2}}{x_{tk}}\right) + \cdots + \beta_k + \beta_{k+1}\left(\frac{x_{t,k+1}}{x_{tk}}\right) +$$

$$+ \cdots + \beta_n\left(\frac{x_{tn}}{x_{tk}}\right) + \frac{u_t}{x_{tk}} \tag{5.85}$$

Ἐφόσον ἰσχύει ἡ ὑπόθεση (5.84), ἔπεται ὅτι:

$$E\left(\frac{u_t}{x_{tk}}\right)^2 = \frac{E(u_t^2)}{x_{tk}^2} = \frac{\sigma^2 x_{tk}^2}{x_{tk}^2} = \sigma^2 \tag{5.86}$$

Ἐπιπλέον ἐφόσον ὑποθέτουμε ὅτι δέν ὑπάρχει αὐτοσυσχέτιση, μποροῦμε νά προχωρήσουμε στήν ἐφαρμογή τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τοῦ (5.85). Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τό (5.85) ἀντί γιά τήν x_{tk} ἔχουμε τώρα τήν $\frac{1}{x_{tk}}$ σάν μεταβλητή καί οἱ ὁρισμοί τῆς ἐξαρτημένης καί τῶν ὑπολοίπων ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν ἔχουν ἀλλάξει.

Μιά ἄλλη ἐξειδικευμένη ὑπόθεση γιά τήν ἑτεροσκεδαστικότητα πού ἔκαναν οἱ ἴδιοι συγγραφεῖς, καθώς καί ὁ Jorgenson (1965) εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 E(y_t)^2 \tag{5.87}$$

στήν περίπτωση αὐτή ἑπομένως, τά διαγώνια στοιχεῖα τῆς μήτρας $\frac{P}{\sigma}$ θά εἶναι: $\sigma_t = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{tj}$ (5.88)

Ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τήν (5.88) τό πρόβλημα στήν περίπτωση αὐτή εἶναι, ὅτι δέν ξέρουμε τίς τιμές τῶν β_j. Ἕνας τρόπος ἀντιμετωπίσεως καί λύσεως τοῦ προβλήματος στήν περίπτωση πού ἔχουμε ἀρκετά μεγάλα δείγματα (βλέπε καί Kmenta (1971) σελ. 265-6) εἶναι νά ἀκολουθήσουμε τήν παρακάτω πορεία:

(i) Στό πρῶτο στάδιο ἀγνοοῦμε τό πρόβλημα τῆς ἑτεροσκεδαστικότητας καί, χρησιμοποιώντας τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, ὑπολογίζουμε τίς πρῶτες ἐκτιμήσεις τῶν $\beta_j, b_{1,j}$ τίς ὁποῖες καί ἀντικαθιστοῦμε στήν (5.88) ὁπότε ἔχουμε τίς πρῶτες ἐκτιμήσεις τῶν σ_t, $s_{1,t}$

$$s_{1,t} = \sum_{j=1}^{n} b_{1,j} x_{tj} \tag{5.89}$$

(ii) Χρησιμοποιώντας τίς $s_{1,t}$ μετασχηματίζουμε τό ὑπόδειγμα, ὅπως κάναμε καί στήν (5.85), καί ἔχουμε:

$$\frac{y_t}{s_{1,t}} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\frac{x_{tj}}{s_{1,t}} \right) + \frac{u_t}{s_{1,t}} \tag{5.90}$$

(iii) Ἐφαρμόζουμε πάλι τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων στό (5.90) καί ὑπολογίζουμε τίς δεύτερες ἐκτιμήσεις τῶν β_j, $b_{2,j}$ τίς ὁποῖες καί ἀντικαθιστοῦμε στήν (5.88) κι' ἔχουμε τίς δεύτερες ἐκτιμήσεις τῶν $\sigma_t, s_{2,t}$

$$s_{2,t} = \sum_{j=1}^{n} b_{2,j} x_{tj} \tag{5.91}$$

Μετά μετασχηματίζουμε τό ὑπόδειγμα ὅπως στήν περίπτωση τῆς (5.90) χρησιμοποιώντας ὅμως τίς $s_{2,t}$ κι'ἐπαναλαμβάνουμε τήν ἴδια διαδικασία (δηλαδή τά στάδια (ii) καί (iii) μέχρις ὅτου οἱ διαφορές,

$$b_{r,j} - b_{r-1,j}\ , \quad j = 1,\dots,n \tag{5.92}$$

δέν ξεπερνοῦν ἕνα προκαθορισμένο (ἄς ποῦμε 0.001) ἀριθμό,δηλαδή μέχρις ὅτοι οἱ διαφορές ἀνάμεσα σέ δυό διαδοχικές ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων β_j, $j = 1,\dots,n$ εἶναι ἀσήμαντες.

Γιά ἄλλες ἐξειδικευμένες ὑποθέσεις γιά ἑτεροσκεδαστικότητα βλέπε καί Theil (1971) σελ. 246-7), Charatsis (1970).

X. Ὁμαδοποίηση Στοιχείων

Ὑπάρχουν περιπτώσεις στίς ὁποῖες ὁ ἐρευνητής, πρίν προχωρήση σέ ἐκτίμηση παραμέτρων, κάνει ὁμαδοποίηση (grouping) τῶν στοιχείων. Τό πρόβλημα αὐτό ἀντιμετώπισαν οἱ Prais and Houthakker (1955) στήν ἀνάλυση οἰκογενειακῶν προϋπολογισμῶν.Εἶναι ὅμως γενικότερο πρόβλημα (βλέπε Prais and Aitchison (1954),Cramer (1964), Haitovsky (1967) κ.ἄ.). Τό πρόβλημα τῆς ὁμαδοποιήσεως μπορεῖ νά ἐξεταστῆ σάν μιά είδική περίπτωση τοῦ φαινομένου τῆς ἑτεροσκεδαστικότητας.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι γιά τά ἀναλυτικά στοιχεῖα ἰσχύει τό ὑπόδειγμα (2.26) μέ τίς ὑποθέσεις (i) - (v) τοῦ Κεφαλαίου 2. Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμα ὅτι τά στοιχεῖα αὐτά ὁμαδοποιοῦνται σέ m ὁμάδες μέ T_i στοιχεῖα ἡ καθεμιά. Γιά τό πλῆθος τῶν ὁμάδων ἰσχύει ἡ σχέση:

$$n < m < T \tag{5.93}$$

καί φυσικά,

$$\sum_{i=1}^{m} T_i = T \tag{5.94}$$

Ἄν ἡ μήτρα ὁμαδοποιήσεως εἶναι G (μέ διαστάσεις $m \times T$) τότε ὁ μετασχηματισμός τοῦ ὑποδείγματος (2.26) εἶναι:

$$Gy = GX\beta + Gu \tag{5.95}$$

Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις (iv) καί (v) γιά τά ἀναλυτικά στοιχεῖα, ἕπεται ὅτι:

$$E(Gu) = 0 \tag{5.96}$$

καί

$$E(Guu'G') = GE(uu')G' = \sigma^2 GG' \tag{5.97}$$

Στήν περίπτωση ἑπομένως τοῦ ὑποδείγματος (5.95) βλέπουμε ὅτι:

$$\Omega = GG' \tag{5.98}$$

Ἄν ἔχουμε τήν ἀκόλουθη συγκεκριμένη μορφή μήτρας G,

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \ldots & 0 \\ \cdot & & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & & & \cdot \\ 0 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{5.99}$$

τότε

$$GG' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdot & & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{5.100}$$

'Από τή μορφή πού ἔχει ἡ μήτρα (5.100) εἶναι φανερό, ὅτι ἔχουμε μιά εἰδική περίπτωση ἑτεροσκεδαστικότητας.

'Η ἀντίστροφη τῆς μήτρας GG΄ εἶναι:

$$(GG')^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 3 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & . & . & 0 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ . & & & & & & . \\ 0 & & \cdot & & \cdot & \cdot & 3 \end{bmatrix} \qquad (5.101)$$

Χρησιμοποιώντας τήν (5.98) στήν (5.11) βρίσκουμε τόν ἐκτιμητή τοῦ β στό ὑπόδειγμα (5.95), δηλαδή

$$\hat{\beta} = \{ X'G'(GG')^{-1} GX\}^{-1} X'G'(GG')^{-1} Gy \qquad (5.102)$$

τέλος.

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2\{X'G'(GG')^{-1} GX\}^{-1} \qquad (5.103)$$

Γιά συγκεκριμένα παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου αὐτῆς (βλέπε Johnston (1972) σελ. 230-238).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

Εἰσαγωγὴ

Ὅπως ἀναφέραμε στό τμῆμα V τοῦ Κεφαλαίου 5 συνηθίζεται, στά ἐγχειρίδια Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας (ἀλλά καί στήν ἔρευνα), νά ἐξετάζεται τό πρόβλημα τῆς ἑτεροσκεδαστικότητας χωριστά ἀπό τό πρόβλημα τῆς αὐτοσυσχετίσεως. Ἕνας ἀπό τούς λόγους γιά τούς ὁποίους γίνεται ὁ διαχωρισμός αὐτός, ἐκτός ἀπό τήν ἁπλούστευση πού πετυχαίνουμε στήν παρουσίαση τῶν δυό προβλημάτων, εἶναι τό γεγονός ὅτι ἡ ἑτεροσκεδαστικότητα παρουσιάζεται συχνότερα σέ διαστρωματικά στοιχεῖα, ἐνῶ ἡ αὐτοσυσχέτιση εἶναι πιό συνηθισμένη σέ χρονολογικές σειρές.

Στά τμήματα ΙΙ καί ΙΙΙ τοῦ Κεφαλαίου 2 εἴδαμε ὅτι οἱ διαταρακτικοί ὅροι ἐνσωματώνουν τίς ἐπιδράσεις τῶν μεταβλητῶν ἐκείνων πού παραλείφτηκαν ἀπό τό ὑπόδειγμα. Στήν περίπτωση τῶν χρονολογικῶν σειρῶν εἶναι δύσκολο νά ὑποθέση κανείς ὅτι οἱ ἐπιδράσεις αὐτές ἐξαντλοῦνται μέσα σέ μιά χρονική περίοδο, δηλαδή εἶναι δύσκολο νά δεχτοῦμε ὅτι πραγματικά ἰσχύει ἡ ὑπόθεση (5.42), ἔστω κι'ἄν δεχτοῦμε ὅτι ὑπάρχει ὁμοσκεδαστικότητα. Μέ ἄλλα λόγια δέν μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι δέν ὑπάρχει αὐτοσυσχέτιση.

Γιά νά μπορέσουμε, κατά συνέπεια, νά ἔχουμε Α.Γ.Α.Ε. θά πρέπη νά ἐφαρμόσουμε τό Γενικευμένο Γραμμικό Ὑπόδειγμα. Γιά νά γίνη αὐτό χρειάζεται πρῶτα νά διαπιστωθῆ ἄν ὑπάρχη αὐτοσυσχέτιση καί μετά νά προσδιοριστῆ ἡ μορφή τῆς μήτρας Ω.

I. Ἔλεγχος γιὰ τὴν Ὕπαρξη Αὐτοσυσχετίσεως Πρώτης Τάξεως μὲ τὸ Λόγο τοῦ von Neumann

Ἡ ἁπλούστερη ὑπόθεση πού μποροῦμε νά κάνουμε σχετικά μέ τήν ὕπαρξη αὐτοσυσχετίσεως στό ὑπόδειγμα (2.20) εἶναι ὅτι ὑπάρχει αὐτοσυσχέτιση πρώτης τάξεως (first order autocorrelation), ὅτι δηλαδή,

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \tag{6.1}$$

ὅπου

$$E(\varepsilon_t) = 0 \ , \ t = 1,\dots,T \tag{6.2}$$

καί

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+s}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{ἄν} \quad s=0 \\ 0 & \text{ἄν} \quad s\neq 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

Στήν σχέση (6.3) ἡ σ_ε^2 ἀναφέρεται στίς τυχαῖες μεταβλητές ε_t(γιά τίς u_t βλέπε τό τμῆμα III τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ).

Ἄν ὑπάρχη αὐτοσυσχέτιση ἀνάμεσα στήν u_t καί u_{t-1} τότε ἔχουμε:

$$E(u_t - u_{t-1})^2 = E(u_t^2) + E(u_{t-1}^2) - 2E(u_t u_{t-1}) \tag{6.4}$$

Ἄν ἡ αὐτοσυσχέτιση εἶναι θετική ἡ $E(u_t - u_{t-1})^2$ θά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν περίπτωση στήν ὁποία δέν ὑπάρχει αὐτοσυσχέτιση, ὁπότε, ὅπως εἶναι γνωστό:

$$E(u_t - u_{t-1})^2 = E(u_t^2) + E(u_{t-1}^2) \tag{6.5}$$

Ἄν ὅμως ἡ αὐτοσυσχέτιση εἶναι ἀρνητική, τότε ἡ (6.4) θά εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν (6.5).

Ἄν γνωρίζαμε τούς διαταρακτικούς ὅρους u_t τότε θά μπορούσαμε νά κάναμε τόν ἔλεγχο γιά τήν ὕπαρξη αὐτοσυσχετίσεως πρώτης τάξεως μέ τό λόγο τοῦ von Neumann (von Neumann ratio) (1941), (1942) (βλέπε καί Klein (1974) σελ. 95). Ὁ λόγος αὐτός εἶναι:

$$\frac{\delta^2}{s^2} = \frac{\frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^{T} (u_t - u_{t-1})^2}{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (u_t - \bar{u})^2} \tag{6.6}$$

Μιά μικρή ἤ μεγάλη τιμή τοῦ λόγου (6.6) δείχνει ὅτι ὑπάρχει ἀντίστοιχα, θετική ἤ ἀρνητική αὐτοσυσχέτιση.

Ἄν ἀναπτύξουμε τόν ἀριθμητή τῆς (6.6) καί ὑποθέσουμε ὅτι $\bar{u}=0$ καί ὅτι

$$\sum_{t=2}^{T} u_t^2 \cong \sum_{t=2}^{T} u_{t-1}^2 \tag{6.7}$$

καί ἐπιπλέον ὅτι

$$r_{-1} \equiv \frac{\sum_{t=2}^{T} u_t u_{t-1}}{\sqrt{\sum_{t=2}^{T} u_t^2 \sum_{t=2}^{T} u_{t-1}^2}} \cong \frac{\sum_{t=2}^{T} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} u_t^2} \tag{6.8}$$

τότε ἡ (6.6) γίνεται:

$$\frac{\delta^2}{s^2} \cong \frac{2T(1-r_{-1})}{T-1} \tag{6.9}$$

Στήν περίπτωση πού δέν ὑπάρχει αὐτοσυσχέτιση ($r_{-1}=0$) ἡ (6.9) γίνεται:

$$\frac{\delta^2}{s^2} \cong \frac{2T}{T-1} \tag{6.10}$$

Οἱ Hart καί von Neumann (1942 α), (1942 β) ξεκινώντας ἀπό τήν ὑπόθεση ὅτι οἱ u_t εἶναι ἀνεξάρτητες μεταβλητές πού ἀκολουθοῦν τήν κανονική κατανομή μέ μέσο 0 καί διακύμανση σ^2 (δηλαδή τήν ὑπόθεση (3.28)) κατάρτισαν πίνακες καί ἀνάπτυξαν ἐλέγχους σημαντικότητος γιά τήν περίπτωση ($T \leqslant 60$). Ἄν $T > 60$, τότε ἡ (6.6) ἀκολουθεῖ τήν κανονική κατανομή (βλέπε Johnston (1972) σελ.250) μέ

$$E\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right) = \frac{2T}{T-1} \tag{6.11}$$

καί

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right) = \frac{4T^2(T-2)}{(T+1)(T-1)^3} \cong \frac{4}{T} \tag{6.12}$$

Ἡ δυσκολία ἐφαρμογῆς τοῦ κριτηρίου τοῦ von Neumann βρίσκεται στό γεγονός ὅτι δέν ξέρουμε τούς διαταρακτικούς ὅρους u_t. Ἄν ἀντί τῶν u_t χρησιμοποιήσουμε $\hat{u}_t$ τότε, ὅπως εἴδαμε στό τμῆμα VII τοῦ Κεφαλαίου 5 (βλέπε σχέση (5.59)),τά κατάλοιπα δέν ἱκανοποιοῦν τήν (3.28) ἔστω καί ἄν οἱ διαταρακτικοί ὅροι ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη αὐτή. Μιά τροποποίηση τοῦ λόγου τοῦ von Neumann προτάθηκε ἀπό τούς Press and Brooks (1969) (βλέπε καί Theil (1971) σελ. 219) μέ τήν ὁποία μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τά κατάλοιπα ἀντί γιά τούς διαταρακτικούς ὅρους.

II. Ἔλεγχος γιὰ τὴν Ὕπαρξη Αὐτοσυσχετίσεως Πρώτης Τάξεως μὲ τὸ Κριτήριο τῶν Durbin - Watson

Ἐπειδή δέν γνωρίζουμε τούς διαταρακτικούς ὅρους, γι' αὐτό ἡ ἐφαρμογή τοῦ λόγου τοῦ von Neumann δέν εἶναι δυνατή. Γιά τό λόγο αὐτό οἱ Durbin-Watson (1950), (1951) χρησιμοποίησαν τά κατάλοιπα καί ὑπολόγισαν τό λόγο:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T}(\hat{u}_t-\hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^2} \tag{6.13}$$

Ὁ λόγος (6.13) φέρει τό ὄνομα τῶν Durbin-Watson(Durbin-Watson statistic).

Ἄν τά κατάλοιπα προσεγγίζουν ἱκανοποιητικά τούς διαταρακτικούς ὅρους, τότε μιά σύγκριση ἀνάμεσα στίς (6.6) καί (6.13) δείχνει ὅτι:

$$d = \left(\frac{\delta^2}{s^2}\right)\left(\frac{T-1}{T}\right) \qquad (6.14)$$

Ἄν ὑπάρχη θετική αὐτοσυσχέτιση τότε οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος πού ἀποτελεῖ τόν ἀριθμητή τῆς (6.13) θά εἶναι μικροί σέ σύγκριση μέ τούς ἀντίστοιχους ὅρους τοῦ ἀθροίσματος πού ἀποτελεῖ τόν παρανομαστή τῆς ἴδιας σχέσεως. Κατά συνέπεια ἡ τιμή τῆς d θά εἶναι μικρή. Στήν περίπτωση ἐξάλλου πού ὑπάρχει ἀρνητική αὐτοσυσχέτιση οἱ ὅροι τοῦ ἀριθμητῆ θά εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τούς ὅρους τοῦ παρανομαστή καί ἡ τιμή τῆς d θά εἶναι μεγάλη.

Ἄν τό πλῆθος τῶν παρατηρήσεων (T) δέν εἶναι πολύ μικρό καί ἄν γιά τά κατάλοιπα ἰσχύη ἡ σχέση (6.7), τότε:

$$d \cong 2(1-\hat{r}_{-1}) \qquad (6.15)$$

ὅπου

$$\hat{r}_{-1} \equiv \frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sqrt{\sum_{t=2}^{T}\hat{u}_t^2 \sum_{t=2}^{T}\hat{u}_{t-1}^2}} \cong \frac{\sum_{t=2}^{T}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^2} \qquad (6.16)$$

Ἐφόσον

$$-1 \leqslant \hat{r}_{-1} \leqslant 1 \qquad (6.17)$$

βλέπουμε, ἀπό τήν (6.15), ὅτι:

Ἄν	τότε	
$\hat{r}_{-1} \to 0$	$d \to 2$	(6.18)
$\hat{r}_{-1} \to 1$	$d \to 0$	(6.19)
$\hat{r}_{-1} \to -1$	$d \to 4$	(6.20)

Ἀπό τίς παραπάνω σχέσεις εἶναι φανερό πώς ἡ ὑπόθεση ὅτι δέν ὑπάρχει αὐτοσυσχέτιση ἀπορρίπτεται καί γίνεται ἀποδεκτή ἡ ὑπόθεση γιά θετική αὐτοσυσχέτιση ὅταν ἡ τιμή τῆς d εἶναι σχετικά μικρή. Ὅταν ὅμως ὁ ἔλεγχος ἀφορᾶ τήν ὑπόθεση τῆς ἀνυπαρξίας αὐτοσυσχετίσεως σέ ἀντιπαράθεση μέ τήν ὑπόθεση τῆς θετικῆς ἤ ἀρνητικῆς αὐτοσυσχετίσεως, τότε ἡ δεύτερη αὐτή ὑπόθεση γίνεται δεκτή, ὅταν οἱ τιμές τῆς d εἶναι σχετικά μεγάλες ἤ μικρές.

Οἱ Durbin-Watson ἔκαναν πίνακες γιά τόν ἔλεγχο ὑπάρξεως θετικῆς αὐτοσυσχετίσεως, ὅταν $T \geqslant 15$ καί $n \geqslant 2$ (στό n περιλαμβάνεται πάντα καί ὁ σταθερός ὅρος). Ὅλα τά σύγχρονα προγράμματα ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν δίνουν τήν τιμή τῆς d. Ἀνάλογα μέ τό ἐπίπεδο σημαντικότητος πού θέλουμε,(5% ἤ 1%),συγκρίνουμε τήν τιμή τῆς d (στή στήλη μέ τό ἀντίστοιχο n καί τή γραμμή μέ τό ἀντίστοιχο T) μέ τό κάτω ὅριο (lower limit) d_u καί τό ἄνω ὅριο (upper limit) d_L, τοῦ λόγου τοῦ Durbin-Watson.

Ἄν	Τότε	
(i) $d > d_u$	δεχόμαστε ὅτι δέν ὑπάρχει θετική αὐτοσυσχέτιση	(6.21)
(ii) $d_L < d < d_u$	δέν μποροῦμε νά καταλήξουμε σέ συμπέρασμα	(6.22)
(iii) $d < d_L$	δεχόμαστε τήν ὑπόθεση ὅτι ὑπάρχει θετική αὐτοσυσχέτιση.	(6.23)

Ἄν θέλουμε νά ἐλέγξουμε τήν ὕπαρξη ἀρνητικῆς αὐτοσυσχετίσεως καί ἀφοῦ ἰσχύουν οἱ σχέσεις (6.18), (6.19) καί (6.20),ἐπεται ὅτι μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν,

$$4-d \cong 4-2(1-r_{-1}) = 2(1+r_{-1}) \tag{6.24}$$

καί νά κάνουμε τόν ἔλεγχο γιά τήν ὕπαρξη ἀρνητικῆς αὐτοσυσχετίσεως συγκρίνοντας τήν 4-d μέ τά d_u καί d_L πού δίνονται στούς πίνακες γιά τόν ἔλεγχο ὑπάρξεως θετικῆς αὐτοσυσχετίσεως.

Ἄν	Δηλαδή ἄν	τότε	
$4-d > d_u$	$d < 4-d_u$	δεχόμαστε ὅτι δέν ὑπάρχει ἀρνητική αὐτοσυσχέτιση	(6.25)
$d_L < 4-d < d_u$	$4-d_u < d < 4-d_L$	δέν μποροῦμε νά καταλήξουμε σέ συμπέρασμα	(6.26)
$4-d < d_L$	$d > 4-d_L$	δεχόμαστε τήν ὑπόθεση ὅτι ὑπάρχει ἀρνητική αὐτοσυσχέτιση	(6.27)

Τίς περιπτώσεις ἐκεῖνες πού δέν μποροῦμε νά καταλήξουμε σέ συμπέρασμα τίς ἐξέτασε σέ νέο ἄρθρο του ὁ Durbin (1970). Τέλος ὁ Theil (1965), (1968) προτείνει μιά νέα μέθοδο πού ἀναλύεται στό βιβλίο του (1971) σελ. 202-214.

Σ'ὅλες τίς παραπάνω περιπτώσεις διατηρήσαμε τήν ὑπόθεση(ii) τοῦ Κεφαλαίου 2, ὅτι, δηλαδή, ἡ μήτρα X παραμένει σταθερή. Ἄν ὅμως ἀνάμεσα στίς ἑρμηνευτικές μεταβλητές ὑπάρχει καί ἡ ἐξαρτημένη μεταβλητή μέ μιά π.χ. ὑστέρηση, τότε οἱ ἔλεγχοι πού ἀναπτύξαμε σέ τοῦτο καί τό προηγούμενο τμῆμα δέν εἶναι ἐφαρμόσιμοι (βλέπε σχετικά, Nerlove and Wallis (1967)). Γιά τίς περιπτώσεις αὐτές ὁ Durbin (1970) προτείνει ἕνα διαφορετικό (σέ σύγκριση μέ τά παραπάνω) κριτήριο (βλέπε καί Johnston (1972) σελ. 312-3).

Ὅπως ἀναφέραμε πιό πάνω οἱ πίνακες γιά τήν d ἀναφέρονται στίς περιπτώσεις ὅπου $T \geqslant 15$. Στήν περίπτωση πού $T < 15$ μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν d κατά προσέγγιση (βλέπε Kane (1969)σελ. 368).

III. Ἡ Μήτρα E (uu′) στὴν Περίπτωση Ὑπάρξεως Αὐτοσυσχετίσεως Πρώτης Τάξεως

Ἄν διαπιστωθῆ ἡ ὕπαρξη αὐτοσυσχετίσεως πρώτης τάξεως, τότε γιά νά προχωρήσουμε στήν ἐφαρμογή τοῦ Γενικευμένου Γραμμικοῦ Ὑποδείγματος, θά πρέπη νά βροῦμε τή μήτρα $E(uu')$

Χρησιμοποιώντας τίς (6.1), (6.2) καί (6.3) καί ὑποθέτοντας ὅτι:

$$|\rho| < 1 \tag{6.28}$$

βρίσκουμε πρῶτα τήν ἀναμενόμενη τιμή τῶν u_t:

$$E(u_t) = E[\rho u_{t-1}+\varepsilon_t] =$$

$$= E[\rho(\rho u_{t-2}+\varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t] = E[\varepsilon_t+\rho\varepsilon_{t-1}+\rho^2 u_{t-2}] = \ldots$$

$$= E[\varepsilon_t+\rho\varepsilon_{t-1}+\rho^2\varepsilon_{t-2}+\cdots+\rho^{T-1}\varepsilon_{t-(T-1)}]+E[\rho^T u_{t-T}] \tag{6.29}$$

Ἄν $T \to \infty$ τότε,

$$\lim_{T\to\infty} E(u_t) = 0 \tag{6.30}$$

διότι σύμφωνα μέ τήν (6.2), οἱ ἀναμενόμενες τιμές τῶν ε_t, $t = 1,2,\ldots,T-1$ εἶναι ὅλες ἴσες μέ τό μηδέν καί διότι, ἐφόσον ἰσχύει ἡ σχέση (6.28), στό ὅριο ἡ ἀναμενόμενη τιμή τοῦ τελευταίου ὅρου τῆς (6.29) εἶναι:

$$\lim_{T\to\infty} E[\rho^T u_{t-T}] = \lim_{T\to\infty} \rho^T \lim_{T\to\infty} E(u_{t-T}) =$$

$$= 0.\lim_{T\to\infty} E[u_{t-T}] = 0 \tag{6.31}$$

Ἄν, ἀντί νά σταματήσουμε στήν u_{t-T}, προχωρήσουμε ἐπάπειρον στίς διαδοχικές ἀντικαταστάσεις, τότε:

$$E(u_t) = E[\sum_{s=0}^{\infty} \rho^s \varepsilon_{t-s}] = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s E(\varepsilon_{t-s}) = 0 \qquad (6.32)$$

Μέ βάση τήν (6.32) βρίσκουμε τίς διακυμάνσεις καί συνδιακυμάνσεις τῶν u_t , $t=1,\ldots,T$

$$E(u_t^2) = E[(\varepsilon_t+\rho\varepsilon_{t-1}+\rho^2\varepsilon_{t-2}+\cdots)^2] =$$

$$= E[\varepsilon_t^2+\rho^2\varepsilon_{t-1}^2+\rho^4\varepsilon_{t-2}^2+\cdots] = E[\sum_{s=0}^{\infty} \rho^{2s}\varepsilon_{t-s}^2]=$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \rho^{2s} E[\varepsilon_{t-s}^2] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{s=0}^{\infty} \rho^{2s} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \equiv \sigma_u^2 \qquad (6.33)$$

Τό ἀποτελέσμα (6.33) ἰσχύει, διότι σύμφωνα μέ τήν (6.3)

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_p) = 0, \; t\neq p \qquad (6.34)$$

καί διότι, σύμφωνα μέ τήν (6.28), τό ἄθροισμα

$$\sum_{s=0}^{\infty} \rho^{2s} = 1+\rho^2+\rho^4+\cdots \qquad (6.35)$$

εἶναι μιά φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

Χρησιμοποιώντας τήν (6.33) βρίσκουμε τήν

$$E(u_t u_{t-1}) = E[(\rho u_{t-1}+\varepsilon_t)u_{t-1}] = E[\rho u_{t-1}^2] =$$

$$= \rho \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} = \rho\sigma_u^2 \qquad (6.36)$$

καί τήν

$$E(u_t u_{t-2}) = E[(\rho^2 u_{t-2}+\rho\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t)u_{t-2}] = \rho^2\sigma_u^2 \qquad (6.37)$$

Γενικότερα

$$E(u_t u_{t-s}) = \rho^s \sigma_u^2 \qquad (6.38)$$

Ἄν θέσουμε:

$$t - s = r \Longrightarrow s = t - r \qquad (6.39)$$

τότε ἡ (6.38) γίνεται:

$$E(u_t u_{t-s}) = E(u_t u_r) = \rho^{t-r} \sigma_u^2 \qquad (6.40)$$

Ἡ σχέση (6.40) διευκολύνει τόν ὑπολογισμό τῆς μήτρας $E(uu')$ (βλέπε πιό κάτω).

Ἕνα πρόβλημα πού ὑπάρχει γιά νά συμπληρωθοῦν τά ἀπαραίτητα ἀποτελέσματα πού χρειάζονται γιά νά βρεθῆ ἡ μήτρα $E(uu')$ εἶναι ἡ διακύμανση τοῦ u_1.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει ἕνας διαταρακτικός ὅρος στό χρόνο $t=0$, τότε ἔχουμε:

$$u_1 = \rho u_o + \varepsilon_1 \qquad (6.41)$$

Γιά νά βροῦμε τήν $E(u_1^2)$ μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι ἡ περίοδος ἐκτείνεται καί πρίν ἀπό τό χρόνο $t=0$. Μέ τήν ὑπόθεση αὐτή, ὅπως καί στήν (6.33), ἔχουμε:

$$E(u_1^2) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \equiv \sigma_u^2 \qquad (6.42)$$

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ περίοδος δέν ἐκτείνεται πρίν ἀπό τό χρόνο $t=0$, τότε μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι:

$$E(u_o) = 0 \qquad (6.43)$$

καί

$$E(u_o^2) = \sigma_u^2 \qquad (6.44)$$

ὁπότε

$$E(u_1^2) = E(\rho u_o+\varepsilon_1)^2 = E(\rho^2u_o^2+\varepsilon_1^2+2\rho u_o\varepsilon_1) =$$

$$= \frac{\rho^2\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} + \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \equiv \sigma_u^2 \qquad (6.45)$$

ἀποτέλεσμα πού εἶναι τό ἴδιο μέ τή (6.42).

Χρησιμοποιώντας τά ἀποτελέσματα (6.33), (6.40) καί (6.42) ἔχουμε:

$$E(uu') = E\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_T \end{pmatrix} (u_1,u_2,\ldots,u_T)\right] = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2)\ldots & E(u_1u_T) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2)\ \ldots & E(u_2u_T) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ E(u_Tu_1) & E(u_Tu_2)\ldots & E(u_T^2) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho^{T-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.46)$$

᾿Από τή (6.46) καθώς καί τήν (6.38) βλέπουμε ὅτι:

$$\rho^s = \frac{E(u_tu_{t-s})}{\sigma_u^2} \equiv \frac{Cov\ (u_t,u_{t-s})}{\sigma_u^2} \qquad (6.47)$$

καί ἀφοῦ

$$\mathrm{Var}(u_t) = \mathrm{Var}(u_{t-s}) \tag{6.48}$$

μποροῦμε νά γράψουμε τήν (6.47) ὡς ἑξῆς:

$$\rho^s = \frac{\mathrm{Cov}(u_t, u_{t-s})}{\sqrt{\mathrm{Var}(u_t)}\sqrt{\mathrm{Var}(u_{t-s})}} \tag{6.49}$$

δηλαδή ρ^s, εἶναι ὁ συντελεστής συσχετίσεως, ἀνάμεσα στή u_t καί u_{t-s}. Ὅταν s=1 ἡ (6.49) γίνεται:

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(u_t, u_{t-1})}{\sqrt{\mathrm{Var}(u_t)}\sqrt{\mathrm{Var}(u_{t-1})}} \tag{6.50}$$

Ὁ ρ, ἑπομένως, εἶναι ὁ συντελεστής συσχετίσεως ἀνάμεσα στήν u_t καί u_{t-1}.

IV. Ἐκτίμηση τῶν Παραμέτρων τοῦ Ὑποδείγματος (2.26) ὅταν ἡ ρ εἶναι γνωστή

Γιά νά ἐφαρμόσουμε τό Γενικευμένο Γραμμικό Ὑπόδειγμα χρειαζόμαστε τή μήτρα Ω^{-1}. Ἀπό τήν (6.46) βλέπουμε ὅτι:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{T-2} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.51}$$

Ἐπομένως

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & & . \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & . \\ . & & & & . \\ . & & & & \\ . & & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & & \dots & -\rho & 1 \end{bmatrix} \tag{6.52}$$

Τό ὅτι ἡ (6.52) εἶναι ἡ ἀντίστροφη τῆς (6.51) μπορεῖ νά διαπιστωθῆ μέ πολλαπλασιασμό (π.χ. στήν περίπτωση πού ἡ Ω εἶναι 3×3) τῆς Ω μέ τήν Ω^{-1}.

Τέλος ἡ μήτρα P, πού χρειάζεται γιά τό μετασχηματισμό τοῦ ὑποδείγματος, εἶναι:

$$P = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 \dots & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & & \dots & -\rho & 1 \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

Πολλαπλασιασμός τῆς P' μέ τήν P, δείχνει ὅτι καί στήν περίπτωση τῆς (6.53) ἰσχύει ἡ (5.3).

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τό ὑπόδειγμα (2.26) ἀπό τά ἀριστερά μέ τή μήτρα (6.53) (παραλείποντας τόν ὅρο $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$) ἔχουμε:

$$\sqrt{1-\rho^2}y_1 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(\sqrt{1-\rho^2}x_{1j}) + \sqrt{1-\rho^2}\ u_1 \tag{6.54}$$

$$y_t-\rho y_{t-1} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j(x_{tj}-\rho x_{t-1,j})+ (u_t-\rho u_{t-1}),\ t=2,\dots,T \tag{6.55}$$

Όπως εἴδαμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο στό μετασχηματισμένο σύστημα ἐξισώσεων (6.54) καί (6.55) μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καί νά βροῦμε Α.Γ.Α.Ε. τῶν β_j.

Ἄν θέσουμε:

$$p_{1\cdot} = (\sqrt{1-\rho^2},\ 0\ ,\ .\ .\ .\ ,\ 0) \tag{6.56}$$

καί

$$P_1 = \begin{bmatrix} -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot\ -\rho & 1 \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

τότε ἡ μήτρα P (χωρίς τόν ὅρο $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$) εἶναι

$$P_* = \begin{bmatrix} p_{1\cdot} \\ \cdots \\ P_1 \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

Ἄν τό δεῖγμα εἶναι ἀρκετά μεγάλο τότε μποροῦμε νά παραλείψουμε (discard) τήν (6.54) (δηλαδή νά μή χρησιμοποιήσουμε τήν πρώτη γραμμή τῆς μήτρας P_*) καί νά ἐκτιμήσουμε τίς παραμέτρους β_j μόνο ἀπό τίς ἐξισώσεις (6.55). Οἱ ἐκτιμήσεις αὐτές εἶναι ἀσυμπτωτικά ($T \to \infty$) **οἱ ἴδιες**, μέ ἐκεῖνες πού βρίσκουμε ἐκτιμώντας τίς παραμέτρους άπό τίς έξισώσεις (6.54) καί (6.55).

V. Ἁπλὲς Μέθοδοι Μετασχηματισμοῦ τοῦ Ὑποδείγματος (2.26) ὅταν ἡ ρ εἶναι ἄγνωστη

Στό προηγούμενο τμῆμα ὑποθέσαμε, ὅτι ἡ ρ εἶναι γνωστή, γιά νά δείξουμε πώς μετασχηματίζεται τό ὑπόδειγμα (2.26) ὥστε νά μπορέσουμε μετά, έφαρμόζοντας τή μέθοδο τῶν έλαχίστων τετραγώνων, νά έκτιμήσουμε τίς β_j .

Στήν πράξη ὅμως ἡ παράμετρος ρ εἶναι ἄγνωστη. Παλιότερα (βλέπε π.χ. Stone (1954) καί Fox (1958)) ὑπῆρχε ἡ συνήθεια νά χρησιμοποιοῦνται οἱ πρῶτες διαφορές (first differences) τῆς έξαρτημένης καί τῶν ἀνεξάρτητων μεταβλητῶν. Ἡ μέθοδος αὐτή ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ὑπόθεση ὅτι:

$$u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t \tag{6.59}$$

ὅτι, δηλαδή, ρ=1

Ἄν θέσουμε,

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \quad \text{καί} \quad \Delta x_{tj} = x_{tj} - x_{t-1,j} \tag{6.60}$$

τότε, έφόσον ἰσχύει ἡ (2.19), ἔχουμε:

$$\Delta x_{t1} = x_{t1} - x_{t-1,1} = 1-1 = 0$$

Μέ τή μέθοδο αὐτή, κατά συνέπεια, δέν μποροῦμε νά έκτιμήσουμε τήν β_1 άλλά μόνο τίς β_j, j=2,...,n άπό τό ὑπόδειγμα

$$\Delta y_t = \sum_{j=2}^{n} \beta_j \Delta x_{tj} + \Delta u_t \ , \quad t=2,\ldots,T \tag{6.61}$$

Στήν περίπτωση πού ἡ x_{t2} εἶναι ἡ τάση (trend) δηλαδή,

$$x_{\cdot 2}' = (1,2,\ldots,T) \qquad (6.62)$$

τότε,

$$\Delta x_{t2} = x_{t2} - x_{t-1,2} = 1\ , \quad t = 2,\ldots,T \qquad (6.63)$$

δηλαδή ἡ x_{t2} στό ὑπόδειγμα (6.61) παίρνει τή θέση πού εἶχε ἡ x_{t1} στό ὑπόδειγμα (2.20).

Ἡ μέθοδος αὐτή δέν ἐφαρμόζεται πολύ σήμερα διότι ὑπάρχουν ἄλλες μέθοδοι μέ τίς ὁποῖες μποροῦμε νά ἐκτιμήσουμε τήν ρ.

Ἡ ἁπλούστερη ἀπό τίς μεθόδους αὐτές (βλέπε Theil (1971)σελ. 254 καί 407) εἶναι νά ἐκτιμήσουμε τίς παραμέτρους β_j τοῦ ὑποδείγματος (2.26) ἀγνοώντας τήν ὕπαρξη αὐτοσυσχετίσεως καί μετά νά ἐκτιμήσουμε τήν ρ ἀπό τά κατάλοιπα, $\hat{u}_t$, τῆς πρώτης αὐτῆς παλινδρομήσεως. Ἡ ἐκτίμηση τῆς ρ εἶναι:

$$\hat{\rho} = \frac{\dfrac{1}{T-1}\displaystyle\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\dfrac{1}{T-n}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2} \qquad (6.64)$$

Μετά χρησιμοποιοῦμε τήν (6.64) γιά τούς μετασχηματισμούς στίς σχέσεις (6.54) καί (6.55) τίς ὁποῖες καί ἐκτιμοῦμε μέ τή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

VI. Ἡ Μέθοδος τῶν Cochrane - Orcutt

Ἡ μέθοδος πού προτείνουν οἱ Cochrane and Orcutt (1949) καί Orcutt and Cochrane (1949) εἶναι παρόμοια μέ ἐκείνη πού ἀναπτύξαμε γιά τήν ἑτεροσκεδαστικότητα (βλέπε σχέσεις (5.89)-(5.92). Περίληψη τῆς μεθόδου δίνεται ἀπό τούς Kmenta (1971) σελ. 288, καί Klein (1974) σελ. 91-92.

Σύμφωνα μέ τή μέθοδο αὐτή βρίσκουμε τίς πρῶτες ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων β_j, $b_{1,j}$, $j=1,\ldots,n$ τοῦ ὑποδείγματος (2.20) ἀγνοώντας τήν ὕπαρξη αὐτοσυσχετίσεως. Μετά ὑπολογίζουμε τά πρῶτα κατάλοιπα $\hat{u}_{1,t}$, τά ὁποῖα καί χρησιμοποιοῦμε γιά νά ὑπολογίσουμε τήν πρώτη ἐκτίμηση τῆς ρ, $\hat{\rho}_1$, ὅπου:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{1,t}\hat{u}_{1,t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}^2_{1,t-1}} \tag{6.65}$$

Μετά ἀντικαθιστοῦμε τήν τιμή τῆς $\hat{\rho}_1$ στίς (6.65) καί ἐφαρμόζουμε τή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων ὁπότε ἔχουμε τίς δεύτερες ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων β_j, $b_{2,j}$, $j=1,\ldots,n$. Χρησιμοποιώντας τίς ἐκτιμήσεις αὐτές, ὑπολογίζουμε τίς δεύτερες ἐκτιμήσεις τῶν καταλοίπων $\hat{u}_{2,t}$, τίς ὁποῖες καί χρησιμοποιοῦμε γιά νά βροῦμε τή δεύτερη ἐκτίμηση τῆς ρ, $\hat{\rho}_2$, δηλαδή τήν

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{2,t}\hat{u}_{2,t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}^2_{2,t-1}} \tag{6.66}$$

Μετά ἀντικαθιστοῦμε τήν τιμή τῆς $\hat{\rho}_2$ στίς (6.65) καί προχωροῦμε ὅπως καί προηγουμένως γιά νά βροῦμε τίς τρίτες ἐκτιμήσεις τῶν β_j, $b_{3,j}$, $j=1,\ldots,n$ κ.ο.κ., μέχρις ὅτου οἱ διαφορές ἀνάμεσα σέ δυό διαδοχικές ἐκτιμήσεις, δηλαδή οἱ διαφορές

$$b_{r,j} - b_{r-1,j}\,, \quad j=1,\ldots,n \tag{6.67}$$

εἶναι ἀσήμαντες.

Ὅπως ἔδειξε ὁ Sargan (1964) ἡ μέθοδος αὐτή δίνει ἕνα σχετικό (local) ἀλλ' ὄχι ἀναγκαστικά καί ἀπόλυτο (global) ἐλάχιστο γιά τή μή γραμμική (ὡς πρός ρ καί β_j, $j=1,\ldots,n$) συνάρτηση

$$\varphi = \sum_{t=2}^{T} \left[(y_t-\rho y_{t-1}) - \sum_{j=1}^{n} \beta_j (x_{tj}-\rho x_{t-1,j})\right]^2 \tag{6.68}$$

Γιά νά βροῦμε τό ἀπόλυτο ἐλάχιστο (ὡς πρός ρ καί β_j,j=1,..,n) τῆς (6.68) μετασχηματίζουμε τίς (6.65) χρησιμοποιώντας τίς ἀκόλουθες τιμές τοῦ ρ.

$$-0.9,\ -0.8,\ldots,-0.1,\ 0,\ 0.1,\ 0.2,\ldots,0.9 \tag{6.69}$$

καί γιά κάθε μιά ἀπό τίς τιμές αὐτές, βρίσκουμε τίς ἀντίστοιχες ἐκτιμήσεις τῶν β_j καί τά ἀντίστοιχα κατάλοιπα κι'ἐπιλέγουμε ἐκείνη τήν τιμή τοῦ ρ (καί τίς ἀντίστοιχες ἐκτιμήσεις τῶν β_j)πού δίνουν τό μικρότερο ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν καταλοίπων."Αν ἡ τιμή αὐτή εἶναι ἡ 0.8 τότε μετασχηματίζουμε τίς (6.65) χρησιμο - ποιώντας τίς ἀκόλουθες τιμές τοῦ ρ.

$$0.71,\ 0.72,\ldots,0.80,\ 0.81,\ 0.82,\ldots,0.89 \tag{6.70}$$

καί προχωροῦμε ὅπως καί προηγουμένως. 'Ανάλογα μέ τήν ἀκρίβεια πού θέλουμε, μποροῦμε νά συνεχίσουμε αὐτή τήν διαδικασία πετυ - χαίνοντας μ'αὐτό τόν τρόπο τό ἀπόλυτο ἐλάχιστο.

VII. Οἱ Μέθοδοι τῶν Durbin καὶ Phillips

(α) 'Η Μέθοδος τοῦ Durbin

'Η Μέθοδος τοῦ Durbin (1960) ξεκινᾶ ἀπό τό ὑπόδειγμα (2.23) δηλαδή,

$$y_t = x_{t.}\beta + u_t \tag{6.71}$$

γιά τό ὁποῖο ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις (i) ἕως(iv) τοῦ Κεφαλαίου 2, καθώς καί οἱ σχέσεις (6.1), (6.2) καί (6.3).

Ἄν πάρουμε τήν (6.71) στήν περίοδο t-1 καί τήν πολλαπλασιάσουμε μέ -ρ ἔχουμε:

$$-\rho y_{t-1} = -\rho x_{t-1.}\beta - \rho u_{t-1} \tag{6.72}$$

Προσθέτοντας τήν (6.72) στήν (6.71) ἔχουμε:

$$y_t - \rho y_{t-1} = (x_{t.} - \rho x_{t-1.})\beta + u_t - \rho u_{t-1} \quad . \tag{6.73}$$

Ἄν θέσουμε,

$$z_{t.} = (x_{t.}\, ,\ x_{t-1.}) \quad \text{καί} \quad \gamma' = (\beta' - \rho\beta') \tag{6.74}$$

καί λάβουμε ὑπόψη μας τήν (6.1), τό ὑπόδειγμα (6.73) μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$y_t = \rho y_{t-1} + z_{t.}\gamma + \varepsilon_t \ , \quad t=2,\dots,T \tag{6.75}$$

Ἄν ἐκτιμήσουμε τό ὑπόδειγμα (6.75) μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, βρίσκουμε συνεπεῖς ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων ρ καί γ. Ἄν τήν ἐκτίμηση τῆς ρ τήν συμβολίσουμε μέ $\hat{\rho}$ καί τήν ἀντικαταστήσουμε στήν (6.73) ἔχουμε:

$$y_t - \hat{\rho} y_{t-1} = (x_{t.} - \hat{\rho} x_{t-1.})\beta + \varepsilon_t, \quad t=2,\dots,T \tag{6.76}$$

Ἄν ἐκτιμήσουμε τήν (6.76) μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων οἱ ἐκτιμήσεις τῶν β_j πού βρίσκουμε εἶναι **ἀποτελεσματικές (efficient)** (γιά τούς ὁρισμούς τῆς **ἀποτελεσματικότητας (efficiency)** βλέπε Κέβορκ (1972 β) σελ. 101).

(β) Ἡ Μέθοδος τοῦ Phillips

Ἡ μέθοδος αὐτή ὑποδείχτηκε ἀπό τόν A.W. Phillips σέ διαλέξεις του στήν London School of Economics and Political Science τό ἀκαδημαϊκό ἔτος 1966-67.

Ἡ μέθοδος τοῦ Phillips ἔχει ὁμοιότητες μέ τήν μέθοδο τοῦ Durbin πού, περιληπτικά, δώσαμε πιό πάνω. Στόν τόμο ὅμως αὐτό δέν μποροῦμε παρά νά σκιαγραφήσουμε τή μέθοδο αὐτή διότι δέν ἔχουμε δώσει τά στοιχεῖα ἐκεῖνα τῆς **ἀσυμπτωτικῆς θεωρίας** (asymptotic theory) πού χρειάζονται γιά τίς ἀποδείξεις πού ἀφοροῦν τή συνέπεια(consistency) καί ἀποτελεσματικότητα τῶν ἐκτιμητῶν (γιά τόν ἴδιο λόγο δέν δώσαμε τίς ἀποδείξεις γιά τίς ἰδιότητες αὐτές τῶν ἐκτιμητῶν πού βρίσκουμε μέ τή μέθοδο τοῦ Durbin).

Ἄν ἔχουμε συνεπεῖς ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων ρ καί β, $\hat{\rho}$ καί $\hat{\beta}$ ἀντίστοιχα, τότε ἔχουμε

$$(\hat{\rho}-\rho)(\hat{\beta}-\beta) = \hat{\rho}\hat{\beta} - \hat{\rho}\beta - \rho\hat{\beta} + \rho\beta \qquad (6.77)$$

Ἐπιλύνοντας τήν (6.77) ὡς πρός ρβ ἔχουμε

$$\rho\beta = - \hat{\rho}\hat{\beta} + \hat{\rho}\beta + \rho\hat{\beta} + \cdots \qquad (6.78)$$

Τό δεξιό μέλος τῆς (6.78) μπορεῖ νά θεωρηθῆ σάν ἕνα τμῆμα μιᾶς σειρᾶς. Τό ὑπόλοιπο τμῆμα τῆς σειρᾶς παραλείπεται διότι οἱ $\hat{\rho}$ καί $\hat{\beta}$ εἶναι συνεπεῖς ἐκτιμήσεις τῶν ρ καί β.

Ἄν πάρουμε τίς συνεπεῖς ἐκτιμήσεις τῶν ρ καί β πού βρίσκουμε ἀπό τήν ἐκτίμηση τῶν (6.75) μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καί τίς ἀντικαταστήσουμε στή (6.78) καί μετά ἀντικαταστήσουμε τήν (6.78) στήν (6.73) ἔχουμε:

$$\begin{aligned} y_t-\rho y_{t-1} &= \mathbf{x}_{t.}\beta - \mathbf{x}_{t-1.}(\rho\beta) + \varepsilon_t = \\ &\quad \mathbf{x}_{t.}\beta - \mathbf{x}_{t-1.}(-\hat{\rho}\hat{\beta}+\hat{\rho}\beta+\rho\hat{\beta})+\varepsilon_t \end{aligned} \qquad (6.79)$$

Μετά ἀπό τούς ἀναγκαίους πολλαπλασιασμούς καί ἀνακατατάξεις ἡ (6.79) μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} y_t- \mathbf{x}_{t-1.}(\hat{\rho}\hat{\beta}) &= \rho(y_{t-1}-\mathbf{x}_{t-1.}\hat{\beta}) + \\ &\quad +(\mathbf{x}_{t.}- \hat{\rho}\mathbf{x}_{t-1.})\beta + \varepsilon_t \end{aligned} \qquad (6.80)$$

Ἄν ἐκτιμήσουμε τήν (6.80) μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων βρίσκουμε συνεπεῖς καί ἀποτελεσματικές ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων ρ καί β.

VIII. Ἡ Μέθοδος τοῦ Sargan

Ἡ μέθοδος αὐτή προτάθηκε ἀπό τόν Sargan (1964). Ἄν θέσουμε

$$y_t \equiv x_{to} \tag{6.81}$$

καί

$$\beta_o \equiv 1 \tag{6.82}$$

τότε τό ὑπόδειγμα (2.20) μπορεῖ νά γραφτῆ ὡς ἑξῆς:

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_j x_{tj} = u_t \tag{6.83}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τό ὑπόδειγμα (6.83) γιά τήν περίοδο (t-1) μέ -ρ ἔχουμε

$$-\sum_{j=0}^{n} (\rho\beta_j) x_{t-1,j} = -\rho u_{t-1} \tag{6.84}$$

Ἄν τώρα προσθέσουμε τίς (6.83) καί (6.84) καί χρησιμοποιήσουμε τήν (6.1) ἔχουμε

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_j x_{tj} - \sum_{j=0}^{n} (\rho\beta_j) x_{t-1,j} = \varepsilon_t, \quad t = 2,\ldots,T \tag{6.85}$$

Ἄν θέσουμε

$$\varepsilon^{*\prime} = (\varepsilon_2, \varepsilon_3,\ldots,\varepsilon_T) \tag{6.86}$$

$$\beta^{*\prime} = (\beta_o, \beta_1,\ldots,\beta_n) = (\beta_o,\beta) \tag{6.87}$$

$$X^* = (x^*_{.o}\ , x^*_{.1}\ ,\ldots, x^*_{.n}) \tag{6.88}$$

καί

$$X^{**} = (x^{**}_{.o}, x^{**}_{.1},\ldots,x^{**}_{.n}) \tag{6.89}$$

ὅπου

$$x^{*\prime}_{.o} = (y_2, y_3,\ldots,y_T) \tag{6.90}$$

$$x^{*\prime}_{.j} = (x_{2j}, x_{3j},\ldots,x_{Tj}), \quad j=1,\ldots,n \tag{6.91}$$

$$x^{**\prime}_{.o} = (y_1, y_2,\ldots,y_{T-1}) \tag{6.92}$$

$$x^{**\prime}_{.j} = (x_{1j}, x_{2j},\ldots,x_{T-1,j}), \quad j=1,\ldots,n \tag{6.93}$$

τότε μποροῦμε νά γράψουμε τίς Τ-1 ἐξισώσεις (6.85) ὡς ἑξῆς:

$$X^*\beta^* - X^{**}(\rho\beta^*) = \varepsilon^* \tag{6.94}$$

θέτοντας

$$Z^* = (X^* \vdots X^{**}) \tag{6.95}$$

καί

$$\gamma^{*\prime} = (\beta^{*\prime}, \rho\beta^{*\prime}) \tag{6.96}$$

ἡ (6.94) γίνεται

$$Z^*\gamma^* = \varepsilon^* \tag{6.97}$$

Ἀπό τούς ὁρισμούς (6.82) καί (6.87) φαίνεται ὅτι τό διάνυσμα γ^* εἶναι συνάρτηση τῶν παραμέτρων

$$\theta' = (\rho, \beta') \tag{6.98}$$

Τό πρόβλημα ἑπομένως τῆς ἐκτιμήσεως τῶν παραμέτρων $\boldsymbol{\theta}$ μπορεῖ νά τεθῆ σάν πρόβλημα ἐλαχιστοποιήσεως τῆς συναρτήσεως

$$\psi = \gamma^{*\prime}\ Z^{*\prime}\ Z^{*}\ \gamma^{*} \tag{6.99}$$

ὡς πρός **θ**.

Ἡ μέθοδος πού προτείνει ὁ Sargan εἶναι ἡ ἐλαχιστοποίηση τῆς (6.99) ὡς πρός β κρατώντας τήν ρ σταθερή καί μετά ὡς πρός ρ κρατώντας τίς β σταθερές κ.ο.κ. μέχρις ὅτου οἱ ἐκτιμήσεις τῶν ρ καί β_j, $j=1,\ldots,n$ δέν διαφέρουν παρά κατά ἕνα μικρό ἀριθμό πού ὁρίζουμε ἐκ τῶν προτέρων.

Γιά τή μέθοδο αὐτή βλέπε καί Hendry (1970). Ὁ Hendry(1972) ἔγραψε ἕνα πρόγραμμα πού βασίζεται τόσο στήν ἐργασία τοῦ Sargan πού ἀναφέραμε στήν ἀρχή ὅσο καί σέ προηγούμενες (π.χ. (1959)). Τό πρόγραμμα αὐτό ἔχει χρησιμοποιηθῆ καί ἀπό τόν συγγραφέα. (1957 γ) γιά τίς ἐκτιμήσεις ὑποδειγμάτων στά ὁποῖα ὑπῆρχε αὐτοσυσχέτιση.

IX. Ἡ Μέθοδος τῆς Μεγίστης Πιθανότητος

Ἄν χρησιμοποιήσουμε τήν (6.1), ἡ (6.55) μπορεῖ νά γραφτῆ

$$\varepsilon_t = (y_t - \rho y_{t-1}) - \sum_{j=1}^{n} \beta_j (x_{tj} - x_{t-1,j}) \tag{6.100}$$

Ἄν ἐκτός ἀπό τίς (6.2) καί (6.3) ὑποθέσουμε ὅτι

$$\varepsilon_1 \quad \text{εἶναι } N(0,\sigma_\varepsilon^2) \tag{6.101}$$

καί ὅτι ἡ y_1 εἶναι σταθερή (βλέπε Kmenta (1971) σελ. 284) τότε ὁ λογαριθμικός μετασχηματισμός τῆς συναρτήσεως πιθανότητος τῶν ε_t, $t=2,\ldots,T$ εἶναι

$$L = \frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=2}^{T}\varepsilon_t^2 =$$

$$= \frac{T-1}{2}\log(2\pi) - \frac{T-1}{2}\log\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=2}^{T}\Big[(y_t - \rho y_{t-1}) - \sum_{j=1}^{n}\beta_j(x_{tj} - \rho x_{t-1,j})\Big]^2 \tag{6.102}$$

καί ἐφόσον ἡ Ἰακωβιανή ὀρίζουσα (Jacobian)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y_T} \\ \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y_3} & & \frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y_T} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial y_2} & \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial y_3} & \cdots & \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial y_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1 \end{bmatrix} = 1 \qquad (6.103)$$

ἕπεται (βλέπε Mood and Graybill (1963)) ὅτι ἡ συνάρτηση πιθανότητος τῶν y_t, $t=2,\ldots,T$ εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν (6.102).

Γιά νά βροῦμε τίς ἐκτιμήσεις μεγίστης πιθανότητας τῶν σ_ε^2, ρ καί β_j, $j=1,\ldots,n$ παραγωγίζουμε τήν (6.102) ὡς πρός τίς παραμέτρους αὐτές καί ἐξισώνουμε τίς παραγώγους μέ τό μηδέν.

Οἱ $n+2$ ἐξισώσεις πού βρίσκουμε εἶναι μή γραμμικές ὡς πρός ρ καί β_j, $j=1,\ldots,n$. Γιά τή λύση τους ἐφαρμόζουμε εἰδικές μεθόδους (βλέπε, π.χ. Walsh, ed. (1966), Sargan (1964) καί Hendry (1970)).

Πρέπει νά σημειωθῆ ὅτι ἀσυμπτωτικά ἡ μέθοδος τοῦ Sargan καί ἡ μέθοδος τῆς μεγίστης πιθανότητος εἶναι ἰσοδύναμες.

X. Γενίκευση Ὁρισμένων Μεθόδων στὴν Περίπτωση Αὐτοσυσχετίσεως Τάξεως r

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε αὐτοσυσχέτιση τάξεως r τότε ἡ (6.1) πρέπει νά ἀντικατασταθῆ μέ τήν

$$u_t = \sum_{s=1}^{r} \rho_s u_{t-s} + \varepsilon_t \qquad (6.104)$$

Γιά τίς ε_t ἰσχύουν οἱ (6.2) καί (6.3).

Στήν περίπτωση αὐτή ἡ μήτρα πού ἀντιστοιχεῖ στήν (6.57) εἶναι ἡ $(T-r)\times T$ μήτρα

$$P_1^{**} = \begin{bmatrix} -\rho_r & -\rho_{r-1} & \cdots & -\rho_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_r & -\rho_{r-1} & & -\rho_1 & 1 & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\rho_r & -\rho_{r-1} & \cdots & -\rho_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.105}$$

καί ἡ μήτρα πού ἀντιστοιχεῖ στήν (6.58) εἶναι ἡ

$$P_* = \begin{bmatrix} P^* \\ \cdots\cdot \\ P_1^{**} \end{bmatrix} \tag{6.106}$$

ὅπου P^* εἶναι μιά $r\times T$ μήτρα

(α) Ἄν οἱ ρ_s, $s=1,\dots,r$ εἶναι γνωστές

Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά παραλείψουμε τίς πρῶτες r ἐξισώσεις, δηλαδή ἀντί νά πολλαπλασιάσουμε τήν (2.26) μέ P_* ἀπό τά ἀριστερά νά τήν πολλαπλασιάσουμε μέ P_1^{**} ὁπότε ἔχουμε

$$P_1^{**}\, y = P_1^{**}\, X\beta + P_1^{**}\, u \tag{6.107}$$

καί οἱ ἐξισώσεις πού ἀντιστοιχοῦν στίς (6.55) εἶναι

$$y_t - \sum_{s=1}^{r}\rho_s y_{t-s} = \sum_{j=1}^{n}\beta_j\Big(x_{tj} - \sum_{s=1}^{r}\rho_s x_{t-s,j}\Big) + u_t - \sum_{s=1}^{r}\rho_s u_{t-s}, \quad t=r+1,\dots,T \tag{6.108}$$

'Ασυμπτωτικά οἱ ἐκτιμήσεις τῶν β_j, $j=1,\dots,n$ πού βρίσκουμε ἀπό τίς (6.107) εἶναι οἱ ἴδιες μέ ἐκεῖνες πού θά βρίσκαμε ἄν μετασχηματίζαμε τό ὑπόδειγμα (2.26) χρησιμοποιώντας τή μήτρα(6.106).

(β) Ἄν οἱ ρ_s εἶναι ἄγνωστες

Στήν περίπτωση αὐτή χρειάζεται νά ἐκτιμήσουμε τίς ρ_s, $s=1, 2,\dots,r$. Γιά τό σκοπό αὐτό μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τίς μεθόδους τῶν Durbin, Sargan ἤ τῆς μεγίστης πιθανότητος.

Μιά ἄλλη μέθοδος εἶναι ἡ ἀκόλουθη:

Στό πρῶτο στάδιο, ἀγνοώντας τήν ὕπαρξη αὐτοσυσχετίσεως τάξεως r, βρίσκουμε, μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, τίς πρῶτες ἐκτιμήσεις τῶν β_j, $b_{1,j}$ $j=1,\dots,n$.

Μετά ὑπολογίζουμε τίς πρῶτες ἐκτιμήσεις τῶν καταλοίπων $\hat{u}_t$, $\hat{u}_{1,t}$.

Χρησιμοποιώντας τά κατάλοιπα αὐτά βρίσκουμε τίς πρῶτες ἐκτιμήσεις τῶν ρ_s, $\hat{\rho}_{1,s}$, $s=1,\dots,r$ ἀπό τήν παλινδρόμηση τῶν $\hat{u}_{1,t}$ $t=r+1,\dots,T$ στίς $\hat{u}_{1,t-s}$ $s=1,\dots,r$.

Στό δεύτερο στάδιο χρησιμοποιοῦμε τίς $\hat{\rho}_{1,s}$, $s=1,\dots,r$ στίς ἐξισώσεις (6.108) καί μετά βρίσκουμε τίς δεύτερες ἐκτιμήσεις τῶν β_j, $b_{2,j}$ κ.ο.κ. μέχρις ὅτου δυό διαδοχικές ἐκτιμήσεις ὅλων τῶν παραμέτρων δέν διαφέρουν περισσότερο ἀπό ἕνα (μικρό) προκαθορισμένο ἀριθμό.

Ἕνας ἄλλος, τέλος, τρόπος εἶναι νά χρησιμοποιήσουμε τίς πρῶτες ἐκτιμήσεις τῶν καταλοίπων $\hat{u}_{1,t}$ γιά τόν ὑπολογισμό τῶν

$$\hat{\omega}_{1,(t,t-s)} = \frac{\sum_{t=s+1}^{T}\hat{u}_{1,t}\hat{u}_{1,t-s}}{T-s} \tag{6.109}$$

Μετά χρησιμοποιοῦμε τίς (6.109) γιά νά βροῦμε τή μήτρα

$$\hat{\Omega}_1^{-1} \tag{6.110}$$

πού τή χρησιμοποιοῦμε στήν (5.11) γιά νά βροῦμε τίς δεύτερες ἐκτιμήσεις τῶν β_j, $b_{2,j}$ κ.ο.κ. μέχρις ὅτου ἰσχύσει ἀνάμεσα σέ δυό διαδοχικές ἐκτιμήσεις τῶν παραμέτρων σχέση ἀνάλογη μ'αὐτήν πού ἀναφέρουμε πιό πάνω (βλέπε καί (5.92)).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

I. A Priori Πληροφορίες

Στό τμῆμα V τοῦ Κεφαλαίου 4 εἴδαμε ὅτι ἕνας τρόπος ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος τῆς πολυσυγγραμμικότητας στίς χρονολογικές σειρές εἶναι ἡ χρησιμοποίηση πληροφοριῶν σχετικῶν μέ τίς ἐκτιμήσεις ὁρισμένων παραμέτρων ἀπό διαστρωματικά στοιχεῖα.

Στό σύντομο αὐτό τμῆμα θά θέσουμε τό πρόβλημα σ'ἕνα γενικότερο πλαίσιο καί στά τμήματα II, III καί IV θά ἐξετάσουμε τρόπους ἀντιμετωπίσεως του.

Τό ὑπόδειγμα πού ἔχουμε νά ἐκτιμήσουμε εἶναι:

$$\mathbf{y} = X\beta + \mathbf{u} = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \mathbf{u} \qquad (7.1)$$

ὅπου X_1 καί X_2 εἶναι, ἀντίστοιχα, $T\times n_1$ καί $T\times n_2$ σταθερές μῆτρες καί β_1 καί β_2 διανύσματα μέ n_1 καί n_2 συντεταγμένες. Γιά τήν μήτρα $\mathbf{X}$ ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις (i) καί (iii) τοῦ Κεφαλαίου 2.Τά διανύσματα $\mathbf{y}$ καί $\mathbf{u}$ ἔχουν T συντεταγμένες καί γιά τό διάνυσμα $\mathbf{u}$ ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις:

$$E(\mathbf{u}) = 0 \qquad (7.2)$$

$$E(\mathbf{uu}') = \sigma^2 I \qquad (7.3)$$

Οἱ a priori πληροφορίες πού ἔχουμε εἶναι οἱ ἀμερόληπτες ἐκτιμήσεις $\mathbf{b}_1^*$ τῶν παραμέτρων β_1, δηλαδή

$$\mathbf{b}_1^* = \beta_1 + \mathbf{v}_1 \qquad (7.4)$$

Ἡ ἀμεροληψία τῶν b_1^* συνεπάγεται ὅτι:

$$E(v_1) = 0 \tag{7.5}$$

Ἐπιπλέον ὑποθέτουμε ὅτι:

$$E(v_1 v_1') = V_1 \tag{7.6}$$

καί ὅτι:

$$E(v_1 u') = 0 \tag{7.7}$$

Τό πρόβλημα εἶναι πώς θά ἐνσωματωθοῦν οἱ πληροφορίες αὐτές στό ὑπόδειγμα (7.1).

II. Ἐνσωμάτωση τῶν a priori Πληροφοριῶν μὲ τὴ μέθοδο τοῦ Stone

Ὁ τρόπος ἐνσωματώσεως τῶν πληροφοριῶν (7.4)-(7.7) πού προτάθηκε ἀπό τόν Stone (1954) σελ. 303-5 ἦταν νά ἀντικατασταθῆ τό β_1 μέ τό b_1^* στήν σχέση (7.1) ὁπότε τό ὑπόδειγμα γίνεται:

$$y - X_1 b_1^* = X_2 \beta_2 + u - X_1 v_1 \tag{7.8}$$

Ἄν ἐκτιμήσουμε τίς παραμέτρους β_2 ἀπό τό ὑπόδειγμα μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, θά ἔχουμε:

$$b_2^* = (X_2' X_2)^{-1} X_2' (y - X_1 b_1^*) \tag{7.9}$$

Ἀντικαθιστώντας τίς (7.1) καί (7.4) στήν (7.9) ἔχουμε:

$$b_2^* = \beta_2 + (X_2' X_2)^{-1} X_2' (X_1 \beta_1 + u - X_1 b_1^*) =$$

$$= \beta_2 + (X_2' X_2)^{-1} X_2' (u - X_1 v_1) \tag{7.10}$$

Χρησιμοποιώντας τίς (7.2) καί (7.5) βλέπουμε ὅτι:

$$E(b_2^*) = \beta_2 \qquad (7.11)$$

Κατά συνέπεια ή μέθοδος πού πρότεινε ό Stone δίνει άμερόληπτους έκτιμητές τῶν β_2.

Ἡ μήτρα διακυμάνσεως - συνδιακυμάνσεως τῶν b_2^* εἶναι:

$$\mathrm{Var}(b_2^*) = E\left[(b_2^*-\beta_2)(b_2^*-\beta_2)'\right] = E\left[(X_2'X_2)^{-1} X_2'(u-X_1v_1).\right.$$

$$\left.(u'-v_1'X_1')X_2(X_2'X_2)^{-1}\right] = \sigma^2(X_2'X_2)^{-1} + B_1V_1B_1' \qquad (7.12)$$

ὅπου

$$B_1 = (X_2'X_2)^{-1} X_2'X_1 \qquad (7.13)$$

Γιά νά βροῦμε τήν (7.12) χρησιμοποιοῦμε τίς (7.3), (7.6) καί (7.7).

Ἄν άγνοήσουμε τίς a priori πληροφορίες καί έκτιμήσουμε τίς παραμέτρους χρησιμοποιώντας τό ύπόδειγμα (7.1) τότε (βλέπε καί τμῆμα VIII τοῦ Κεφαλαίου 2) οί έκτιμήσεις πού βρίσκουμε εἶναι:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} y \equiv \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} y \qquad (7.14)$$

Χρησιμοποιώντας τίς (7.2) καί (7.3) ἔχουμε:

$$E\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \qquad (7.15)$$

καί

$$\mathrm{Var}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = E\left[\begin{Bmatrix} (b_1-\beta_1) \\ (b_2-\beta_2) \end{Bmatrix} \left\{(b_1-\beta_1)', (b_2-\beta_2)'\right\}\right] =$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \qquad (7.16)$$

Ἄρα

$$Var(b_2) = E\left[(b_2-\beta_2)(b_2-\beta_2)'\right] = \sigma^2 V_{22} =$$

$$= \sigma^2 [X_2'X_2 - X_2'X_1(X_1'X_1)^{-1} X_1'X_2]^{-1} \qquad (7.17)$$

Ἄν θέσουμε

$$A = (X_2'X_2) \qquad (7.18)$$

$$C = (X_2'X_1) \qquad (7.19)$$

$$D = -(X_1'X_1)^{-1} \qquad (7.20)$$

τότε ἡ (7.17) μπορεῖ νά γραφτῆ (βλέπε Rao (1965) σελ. 29) ὡς ἑξῆς:

$$Var(b_2) = \sigma^2 \; [A + CDC']^{-1} =$$

$$= \sigma^2 \left\{ A^{-1} - A^{-1} C [D^{-1} + C'A^{-1} C]^{-1} C'A^{-1} \right\} =$$

$$= \sigma^2 \left\{ (X_2'X_2)^{-1} + (X_2'X_2)^{-1} X_2'X_1 [X_1'X_1 - X_1'X_2 (X_2'X_2)^{-1} X_2'X_1]^{-1} X_1'X_2 (X_2'X_2)^{-1} \right\} \qquad (7.21)$$

Χρησιμοποιώντας τήν (7.13) καθώς καί τό γεγονός (βλέπε Γ.Α. σελ. 56) ὅτι:

$$V_{11} = [X_1'X_1 - X_1'X_2 (X_2'X_2)^{-1} X_2'X_1]^{-1} \qquad (7.22)$$

μποροῦμε νά γράψουμε τήν (7.21) ὡς ἑξῆς:

$$Var(b_2) = \sigma^2 (X_2'X_2)^{-1} + B_1 V_{11} B_1' \qquad (7.23)$$

Ἀφαιρώντας τήν (7.23) ἀπό τήν (7.12) βρίσκουμε:

$$Var(b_2^*) - Var(b_2) = B_1 (V_1 - V_{11}) B_1' \qquad (7.24)$$

ἤ

$$\mathrm{Var}(b_2) - \mathrm{Var}(b_2^*) = B_1(V_{11}-V_1)B_1' \qquad (7.25)$$

Κατά συνέπεια δέν θά ἔχουμε κέρδος (ὅσον ἀφορᾶ τή διακύμανση τῶν ἐκτιμητῶν τοῦ β_2) ἀπό τήν χρησιμοποίηση τῶν a priori πληροφοριῶν στήν περίπτωση πού ἡ μήτρα $V_{11}-V_1$ εἶναι θετικά ἡμι-ορισμένη. Ἄν ἡ μήτρα V_1-V_{11} εἶναι ἀρνητικά ὁρισμένη, τότε θά ἔχουμε κέρδος.

Ἡ μέθοδος τοῦ Stone δέν εἶναι κατάλληλη, διότι, γιά τήν ἐκτίμηση τοῦ ὑποδείγματος (7.8), χρησιμοποιεῖται ἡ ἁπλή μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, παρόλον ὅτι δέν ἰσχύει ἡ ὑπόθεση (v) τοῦ Κεφαλαίου 2, διότι

$$E\left[(u-X_1v_1)(u-X_1v_1)'\right] = \sigma^2 I + X_1V_1X_1' \qquad (7.26)$$

Ἐπιπλέον ἡ μέθοδος αὐτή δέν κάνει καμιά χρήση τῶν πληροφοριῶν ἀπό τό ὑπόδειγμα (7.1) γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων β_1.

III. Ἐνσωμάτωση τῶν a Priori Πληροφοριῶν μὲ τὶς Μεθόδους τῶν Durbin, Theil - Goldberger καὶ Sargan

Τό προηγούμενο τμῆμα σκοπό εἶχε νά τονίση ὅτι ἡ ἐφαρμογή τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων δέν εἶναι ὀρθή κι'ἐπιπλέον ἀφήνει ἀχρησιμοποίητες πληροφορίες. Οἱ μέθοδοι πού θά ἐκθέσουμε ἀντιμετωπίζουν καί τά δυό αὐτά τρωτά τῆς μεθόδου τοῦ Stone μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ Γενικευμένου Γραμμικοῦ Ὑποδείγματος.

(α) Ἡ Μέθοδος τοῦ Durbin

Ὁ Durbin (1953) παίρνει τίς ἀμερόληπτες ἐκτιμήσεις πού βρίσκουμε μέ τήν ἐφαρμογή τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων στό ὑπόδειγμα (7.1) καί ἀντικαθιστᾶ σ'αὐτές τήν (7.1) καθώς καί τίς ἐκτιμήσεις (7.4) καί τίς γράφει μαζύ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} b_1^* \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ (X'X)^{-1} X'u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \beta +$$

$$+ \begin{bmatrix} v_1 \\ (X'X)^{-1} X'u \end{bmatrix} \tag{7.27}$$

Ἄν θέσουμε

$$R = (I_{n_1} \vdots 0) \tag{7.28}$$

τότε ἡ (7.27) γράφεται (ἐφόσον $n_1+n_2=n$) καί ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} b_1^* \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ I_n \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} v_1 \\ (X'X)^{-1} X'u \end{bmatrix} \tag{7.29}$$

Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ (7.2), (7.3), (7.5), (7.6) καί (7.7) ἔχουμε:

$$E \left[\begin{Bmatrix} v_1 \\ (X'X)^{-1} X'u \end{Bmatrix} \left\{ v_1' \, , u'X(X'X)^{-1} \right\} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{bmatrix} \tag{7.30}$$

Ἐφόσον ἰσχύει ἡ σχέση (7.30) θά πρέπη νά χρησιμοποιήσουμε τό Γενικό Γραμμικό ὑπόδειγμα. Ἡ (7.30) εἶναι ἡ μήτρα Ω πού πρέπει νά χρησιμοποιηθῆ στή σχέση (5.11) γιά νά βροῦμε τούς Α.Γ.Α.Ε.τῶν παραμέτρων β τοῦ ὑποδείγματος (7.29)

$$\hat{\beta} = \left\{ (R' \vdots I') \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R \\ I \end{bmatrix} \right\}^{-1} (R' \vdots I') \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 (X'X)^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1^* \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ R'V_1^{-1}R + \frac{1}{\sigma^2} X'X \right\}^{-1} \left\{ R'V_1^{-1} b_1^* + \frac{1}{\sigma^2} X'y \right\} \qquad (7.31)$$

(β) ʽΗ Μέθοδος τῶν Theil - Goldberger

Οἱ Theil - Goldberger (1960) (βλέπε ἐπίσης καί Theil(1963)) ἀντί νά πάρουν τόν ἐκτιμητή b, στή δεύτερη ἐξίσωση στή σχέση (7.29), παίρνουν τά ὑπόδειγμα (7.1) καί γράφουν:

$$\begin{bmatrix} b_1^* \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ X\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ X \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} v_1 \\ u \end{bmatrix} \qquad (7.32)$$

ʼΕφόσον ἰσχύει ἡ παρακάτω σχέση

$$E \left[\begin{pmatrix} v_1 \\ u \end{pmatrix} (v_1', u') \right] = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 I \end{bmatrix} \qquad (7.33)$$

θά πρέπη νά χρησιμοποιήσουμε τό Γενικό Γραμμικό ʽΥπόδειγμα. Τώρα ἡ μήτρα Ω πού πρέπει νά χρησιμοποιηθῆ στήν σχέση (5.11) γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τοῦ ὑποδείγματος (7.32) εἶναι ἡ (7.33). ʽΕπομένως,

$$\hat{\beta} = \left\{ (R' \vdots X') \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R \\ X \end{bmatrix} \right\}^{-1} (R' \vdots X') \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1^* \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ R'V_1^{-1}R + \frac{1}{\sigma^2} X'X \right\}^{-1} \left\{ R'V_1^{-1} b_1^* + \frac{1}{\sigma^2} X'y \right\} \qquad (7.34)$$

ʼΟπως εἶναι φανερό ἡ μέθοδος τῶν Theil - Goldberger δίνει τούς ἴδιους ἐκτιμητές ὅπως καί ἡ μέθοδος τοῦ Durbin. Αὐτό φαίνεται καί ἀπό τό γεγονός ὅτι ἄν πολλαπλασιάσουμε τήν (7.32) ἀπό τ' ἀριστερά μέ τή μήτρα.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (X'X)^{-1}X' \end{bmatrix} \tag{7.35}$$

βρίσκουμε τήν (7.29).

Στή συνέχεια μποροῦμε, ἐπομένως, νά ἀναφερόμαστε μόνο στή μέθοδο τοῦ Durbin.

Ἄν πάρουμε τήν (7.31) μποροῦμε νά τήν γράψουμε καί ὡς ἑξῆς:

$$\hat{\beta} = \left\{\begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix}\right\}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1^* \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} b\right\} \tag{7.36}$$

Ἄν τώρα θέσουμε

$$W_1 = \begin{bmatrix} V_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

$$W_2 = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

καί

$$b_1^{**} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.39}$$

μποροῦμε νά γράψουμε τήν (7.36) ὡς ἑξῆς:

$$\hat{\beta} = (W_1+W_2)^{-1} \; (W_1 b_1^{**} + W_2 b) \tag{7.40}$$

Ἀπό τήν (7.40) βλέπουμε ὅτι οἱ κανονικές ἐξισώσεις γιά τίς $\hat{\beta}$ εἶναι:

$$(W_1+W_2)\hat{\beta} = (W_1 b_1^{**} + W_2 b) \tag{7.41}$$

καί

$$Var(\hat{\beta}) = (W_1+W_2)^{-1} \tag{7.42}$$

Μέ τόν συμβολισμό τῆς (7.38)

$$Var(b) = W_2^{-1} \tag{7.43}$$

Ἀφαιρώντας τήν (7.42) ἀπό τήν (7.43) ἔχουμε:

$$Var(b) - Var(\hat{\beta}) = W_2^{-1} - (W_1+W_2)^{-1} \tag{7.44}$$

Ἀπό τήν (7.37) βλέπουμε ὅτι ἡ μήτρα W_1 εἶναι θετικά ἡμιορισμένη ἐνῶ ἡ W_2 εἶναι θετικά ὁρισμένη. Κατά συνέπεια καί ἡ μήτρα (W_1+W_2) εἶναι θετικά ὁρισμένη. Ἡ μήτρα

$$(W_1+W_2) - W_2 = W_1 \tag{7.45}$$

εἶναι θετικά ἡμιορισμένη. Κατά συνέπεια (βλέπε Γ.Α. σελ.139-140) καί ἡ μήτρα

$$W_2^{-1} - (W_1+W_2)^{-1} \tag{7.46}$$

εἶναι θετικά ἡμιορισμένη. Ἐφόσον αὐτή εἶναι ἡ μήτρα στό δεξιό μέλος τῆς (7.44) ἕπεται ὅτι ὁ ἐκτιμητής $\hat{\beta}$ ἔχει διακύμανση μικρότερη ἤ ἴση μέ ἐκείνη τοῦ ἐκτιμητή b. Τό ἀποτέλεσμα αὐτό εἶναι φυσικό, ἀφοῦ οἱ ἐκτιμητές $\hat{\beta}$ καί b προκύπτουν ἀπό τήν ἐφαρμογή, ἀντίστοιχα, τῆς γενικευμένης καί ἁπλῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

13

(γ) Μέθοδος τοῦ Sargan

Ἄν ὁ ἐκτιμητής b_1^* προέρχεται ἀπό ἕνα ὑπόδειγμα στό ὁποῖο γίνεται ἐκτίμηση καί ἄλλων παραμέτρων, π.χ. ἀπό τό ὑπόδειγμα

$$w = Z_1\beta_1 + Z_2\gamma + v \tag{7.47}$$

Ὁ Sargan, σ'ἕνα σεμινάριο στήν London School of Economics and Political Science τό 1968, πρότεινε τήν ἐκτίμηση τοῦ συστήματος πού προκύπτει ἀπό τήν ἑνοποίηση τῆς (7.1) καί (7.47), δηλαδή τοῦ συστήματος:

$$\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & 0 \\ Z_1 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{7.48}$$

μέ τήν γενικευμένη μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Τόσο ἡ μέθοδος τῶν Durbin - Theil - Goldberger ὅσο καί ἡ μέθοδος τοῦ Sargan, μποροῦν νά ἐφαρμοστοῦν στό συνδυασμό χρονολογικῶν σειρῶν καί διαστρωματικῶν στοιχείων, ὥστε οἱ ἐκτιμητές τῶν παραμέτρων νά εἶναι Α.Γ.Α.Ε. (βλέπε καί τμήματα V καί VI αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου).

IV. Συνδυασμὸς Πολλῶν Γραμμικῶν Παλινδρομήσεων

Ἀντί γιά μιά γραμμική παλινδρόμηση (ὅπως ἡ (2.26)) μποροῦμε νά ἔχουμε τίς ἑξῆς m γραμμικές παλινδρομήσεις (βλέπε Zellner(1962), (1963) καί Zellner and Huang (1962)).

$$y_i = X_i\beta_i + u_i \qquad i = 1,2,\dots,m \tag{7.49}$$

ὅπου τά διανύσματα y_i καί u_i ἔχουν T συντεταγμένες· οἱ μῆτες X_i εἶναι $T\times n_i$ καί τά διανύσματα β_i ἔχουν n_i συντεταγμένες.

Ἂν ὁρίσουμε τά ἑξῆς διανύσματα:

$$y^{*\prime} = (y_1^{\prime}, y_2^{\prime}, \ldots, y_m^{\prime}) \tag{7.50}$$

$$u^{*\prime} = (u_1^{\prime}, u_2^{\prime}, \ldots, u_m^{\prime}) \tag{7.51}$$

$$\beta^{*\prime} = (\beta_1^{\prime}, \beta_2^{\prime}, \ldots, \beta_m^{\prime}) \tag{7.52}$$

καί τή μήτρα

$$X^* = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & X_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & X_m \end{bmatrix} \tag{7.53}$$

τότε μποροῦμε νά γράψουμε ὅλες τίς m ἐξισώσεις (7.49) ὡς ἑξῆς:

$$y^* = X^*\beta^* + u^* \tag{7.54}$$

Ὑποθέτουμε ὅτι γιά ὅλες τίς μῆτρες X_i, $i = 1,\ldots,m$ ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις (i) (ii) καί (iii) τοῦ Κεφαλαίου 2. Ἐπιπλέον ὑποθέτουμε ὅτι:

$$E(u_i) = 0 \,, \quad i = 1,\ldots,m \tag{7.55}$$

$$E(u_i u_i^{\prime}) = \sigma_{ii} I_T \,, \quad i = 1,\ldots,m \tag{7.56}$$

καί

$$E(u_i u_j') = E\left[\begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{Ti} \end{pmatrix} (u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{Tj})\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} E(u_{1i}u_{1j}) & E(u_{1i}u_{2j}) & \ldots & E(u_{1i}u_{Tj}) \\ E(u_{2i}u_{1j}) & E(u_{2i}u_{2j}) & \ldots & E(u_{2i}u_{Tj}) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ E(u_{Ti}u_{1j}) & E(u_{Ti}u_{2j}) & \ldots & E(u_{Ti}u_{Tj}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{ij} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_{ij} & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & \sigma_{ij} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} I_T \; , i \neq j \qquad (7.57)$$

Οἱ ὑποθέσεις (7.55) καί (7.56) ἀντιστοιχοῦν (γιά τήν καθεμιά ἀπό τίς ἐξισώσεις (7.49)) στίς ὑποθέσεις (iv) καί (v) τοῦ Κεφαλαίου 2. Ἡ ὑπόθεση (7.56) σημαίνει ὅτι οἱ διαταρακτικοί ὅροι τῶν διαφόρων ἐξισώσεων ἐνῶ συσχετίζονται στόν ἴδιο χρόνο, εἶναι ἀσυσχέτιστοι σέ διαφορετικούς χρόνους.

Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ (7.54), (7.55) καί (7.56) ἕπεται ὅτι:

$$Var(u^*) = E(u^*u^{*\prime}) = E\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{pmatrix}(u_1, u_2, \ldots, u_m)\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I & \cdots & \sigma_{1m}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I & \cdots & \sigma_{2m}I \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \sigma_{m1}I & \sigma_{m2}I & \cdots & \sigma_{mm}I \end{bmatrix} \tag{7.58}$$

Ἂν τώρα θέσουμε

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \sigma_{m1} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \tag{7.59}$$

καί χρησιμοποιήσουμε τό συμβολισμό τῶν γινομένων τοῦ Kronecker (βλέπε Γ.Α. σελ. 142-152), τότε

$$Var(u^*) = \Sigma \otimes I \tag{7.60}$$

῾Υποθέτοντας ὅτι ἡ Σ εἶναι μιά γνωστή καί θετικά ὁρισμένη μήτρα μποροῦμε νά γράψουμε:

$$\Sigma^{-1} = H'H \tag{7.61}$$

καί ἐπομένως

$$\Sigma = H^{-1} H'^{-1} \tag{7.62}$$

Θέτοντας τώρα

$$H^* = H \otimes I \tag{7.63}$$

καί πολλαπλασιάζοντας τήν (7.54) μέ **H*** ἔχουμε:

$$H^*y^* = H^*X^*\beta^* + H^*u^* \tag{7.64}$$

᾿Αφοῦ ἡ μήτρα Σ εἶναι γνωστή, ἔπεται ὅτι καί ἡ μήτρα H εἶναι γνωστή. Ἄρα, ἐφόσον ἰσχύει ἡ (7.55), ἔχουμε:

$$E(H^*u^*) = 0 \tag{7.65}$$

᾿Επιπλέον, ἐφόσον ἰσχύουν οἱ (7.60), (7.61) καί (7.62), ἔχουμε:

$$E[H^*u^*u^{*\prime}H^{*\prime}] = H^*E(u^*u^{*\prime})H^{*\prime} =$$

$$=(H \otimes I)(\Sigma \otimes I)(H'\otimes I) = (H\Sigma H') \otimes (III) =$$

$$= (HH^{-1} H'^{-1}H') \otimes I_T = I_m \otimes I_T = I_{mT} \tag{7.66}$$

᾿Εφόσον ἰσχύουν οἱ (7.65) καί (7.66) μποροῦμε νά ἐκτιμήσουμε τό ὑπόδειγμα (7.64) μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. ῾Ο ἐκτιμητής τῶν **β*** εἶναι:

$$\hat{\beta}^* = [X^{*\prime}H^{*\prime}H^*X^*]^{-1} \; X^{*\prime}H^{*\prime}H^*y^* \tag{7.67}$$

'Αφοῦ

$$H^{*\prime}H^{*} = (H'\otimes I)(H\otimes I) = H'H\otimes I_T = \Sigma^{-1}\otimes I \qquad (7.68)$$

ἡ (7.67) γίνεται:

$$\hat{\beta}^{*} = [\,X^{*\prime}(\Sigma^{-1}\otimes I)X^{*}]^{-1}\,X^{*\prime}(\Sigma^{-1}\otimes I)y^{*} \qquad (7.69)$$

'Εφόσον ἰσχύει ἡ (7.60), σύγκριση τῆς (7.69) μέ τήν (5.11) δείχνει ὅτι ἔχουμε μιά ἐφαρμογή τῆς γενικευμένης μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, στήν περίπτωση πολλῶν (m) γραμμικῶν παλινδρομήσεων. (Γιά μιά ἐφαρμογή σέ συστήματα ἀλληλεξαρτημένων ἐξισώσεων, βλέπε τήν ἐργασία τοῦ συγγραφέα (1973 b)).

'Από τήν (7.69) βλέπουμε ὅτι οἱ κανονικές ἐξισώσεις εἶναι:

$$[X^{*\prime}(\Sigma^{-1}\otimes I)X^{*}]\hat{\beta}^{*} = X^{*\prime}(\Sigma^{-1}\otimes I)y^{*} \qquad (7.70)$$

καί κατά συνέπεια

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}^{*}) = [\,X^{*\prime}(\Sigma^{-1}\otimes I)X^{*}]^{-1} \qquad (7.71)$$

"Αν θέσουμε

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^{11} & . \; . \; . & \sigma^{1m} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \sigma^{m1} & . \; . \; . & \sigma^{mm} \end{bmatrix} \qquad (7.72)$$

τότε

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}^*) = \begin{bmatrix} \sigma^{11} X_1'X_1 & \sigma^{12} X_1'X_2 & \ldots \sigma^{1m} X_1'X_m \\ \sigma^{21} X_2'X_1 & \sigma^{22} X_2'X_2 & \sigma^{2m} X_2'X_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma^{m1} X_m'X_1 & \sigma^{m2} X_m'X_2 & \ldots \sigma^{mm} X_m'X_m \end{bmatrix} \qquad (7.73)$$

Όπως ξέρουμε ἀπό τό Κεφάλαιο 5 οἱ ἐκτιμητές, πού βρίσκουμε μέ τή γενικευμένη μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, εἶναι Α.Γ.Α.Ε. Κατά συνέπεια, στήν περίπτωση πού ἰσχύουν οἱ σχέσεις (7.59) καί(7.60), ἡ (7.73) εἶναι ἡ μικρότερη διακύμανση πού μποροῦμε νά βροῦμε. Ὑπάρχουν ὅμως μερικές περιπτώσεις στίς ὁποῖες ἡ ἐφαρμογή τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων σέ ὁρισμένες (ἤ ὅλες τίς) ἐξισώσεις, δίνει τήν ἴδια διακύμανση μέ ἐκείνη πού δίνει ἡ ἐφαρμογή τῆς γενικευμένης μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Οἱ περιπτώσεις αὐτές προκύπτουν ὅταν οἱ μῆτρες X^* καί Σ εἶναι διαφορετικές, ἀντίστοιχα, ἀπό τίς (7.53) καί (7.59).

(α) Ἄν $X_i = X \qquad i = 1,\ldots,m$ $\qquad$ (7.74)

τότε

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}^*) = \begin{bmatrix} \sigma^{11} X'X & . \quad . \quad . & \sigma^{1m} X'X \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \sigma^{1m} X'X & . \quad . \quad . & \sigma^{mm} X'X \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \quad [\Sigma^{-1} \otimes X'X]^{-1} = \Sigma \otimes (X'X)^{-1} = \qquad (7.75)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}(X'X)^{-1} & . & . & . & \sigma_{1m}(X'X)^{-1} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \sigma_{1m}(X'X)^{-1} & . & . & . & \sigma_{mm}(X'X)^{-1} \end{bmatrix} \qquad (7.76)$$

Ἀπό τήν (7.76) φαίνεται ὅτι:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i) = \sigma_{ii}(X'X)^{-1} \qquad (7.77)$$

Ἀλλά ἡ (7.77) εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια μέ τήν $\mathrm{Var}(b_i)$, δηλαδή τή διακύμανση πού βρίσκουμε ὅταν ἐκτιμήσουμε τήν καθεμιά ἀπό τίς (7.49) χωριστά μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

(β) Ἄν

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & . & . & . & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ 0 & . & . & . & . & \sigma_{mm} \end{bmatrix} \qquad (7.78)$$

τότε

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^{-1} & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & . & . & . & \sigma_{mm}^{-1} \end{bmatrix} \qquad (7.79)$$

Κατά συνέπεια

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}^*) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(X_1'X_1)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{22}(X_2'X_2)^{-1} & & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_{mm}(X_m'X_m)^{-1} \end{bmatrix} \quad (7.80)$$

ὅπως εἶναι φανερό ἀπό τήν (7.80)

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_i) = \sigma_{ii}(X_i'X_i)^{-1} \quad (7.81)$$

καί πάλι δέν ὑπάρχει διαφορά ἀνάμεσα στήν (7.81) καί στήν $\mathrm{Var}(b_i)$

(γ) Ἄν $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & o' \\ o & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$ (7.82)

τότε

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} & o' \\ o & \Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (7.83)$$

Στήν περίπτωση αὐτή

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = [\sigma_{11}^{-1}(X_1'X_1)]^{-1} = \sigma_{11}(X_1'X_1)^{-1} \quad (7.84)$$

δηλαδή ἡ ἴδια μέ τήν $\mathrm{Var}(b_1)$. Γιά τίς ὑπόλοιπες ὅμως ἐξισώσεις ἡ γενικευμένη μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων δίνει μικρότερη διακύμανση ἀπό τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Ἄν ἡ μήτρα Σ ἔχει τή μορφή

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} \tag{7.85}$$

τότε

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{7.86}$$

Στήν περίπτωση αὐτή οἱ m παλινδρομήσεις μποροῦν νά χωριστοῦν σέ δυό ὁμάδες καί στήν καθεμιά ἀπ'αὐτές νά ἐφαρμοστῆ ἡ γενικευμένη μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων. Στήν περίπτωση αὐτή,δηλαδή,δέν ὑπάρχει κέρδος ἀπό τήν ἐκτίμηση ὅλων τῶν παλινδρομήσεων μαζύ,ἀλλ' ὑπάρχει κέρδος ἀπό τήν ἐκτίμησή τους σέ δυό ὁμάδες.

Μέχρις ἐδῶ ὑποθέσαμε ὅτι ἡ μήτρα Σ εἶναι γνωστή. Ἄν δέν εἶναι, μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τά κατάλοιπα, $\hat{u}_{ti}$ ἀπό τήν ἐκτίμηση τῶν (7.49) μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, γιά νά σχηματίσουμε τό συνεπῆ ἐκτιμητή τῆς Σ (βλέπε καί Kmenta (1971) σελ. 525 καί Theil (1971) σελ. 310) δηλαδή τή μήτρα:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{1m} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ s_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & s_{mm} \end{bmatrix} \tag{7.87}$$

ὅπου

$$s_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_{ti}\hat{u}_{tj} \tag{7.88}$$

Τή μήτρα (7.87) χρησιμοποιοῦμε στή σχέση (7.69) γιά νά βροῦμε τούς ἐκτιμητές, δηλαδή τό διάνυσμα

$$\hat{\beta}^* = [X^{*\prime}(S^{-1}\otimes I)X^*]^{-1} X^{*\prime}(S^{-1}\otimes I)y^* \qquad (7.89)$$

ὁπότε

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}^*) = [X^{*\prime}(S^{-1}\otimes I)X^*]^{-1} \qquad (7.90)$$

Ἡ περίπτωση στήν ὁποία οἱ διαταρακτικοί ὅροι παρουσιάζουν καί αὐτοσυσχέτιση πρώτης τάξεως, ἐξετάζεται ἀπό τόν Kmenta (1971) σελ. 528-9.

V. Συνδυασμὸς Διαστρωματικῶν Στοιχείων μὲ Ἑτεροσκεδαστικότητα καὶ Χρονολογικῶν Σειρῶν μὲ Αὐτοσυσχέτιση

Στό τμῆμα αὐτό (ὅπως καί στό ἑπόμενο) ἀκολουθοῦμε τόν Kmenta (1971) σελ. 508-514.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε παρατηρήσεις γιά p, ἄς ποῦμε, ἑταιρεῖες ἤ περιοχές, γιά T χρονικές περιόδους, τόσο γιά τήν ἐξαρτημένη ὅσο καί γιά τίς n ἀνεξάρτητες μεταβλητές καί ὅτι θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε τό ὑπόδειγμα

$$y_{ti} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_{tji} + u_{ti}, \quad \begin{array}{l} i = 1,\ldots,p \\ t = 1,\ldots,T \end{array} \qquad (7.91)$$

Ἄν θέσουμε

$$y_i' = (y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{Ti}) \qquad (7.92)$$

$$X_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{12i} & \cdots & x_{1ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{T2i} & \cdots & x_{Tni} \end{bmatrix} \qquad (7.93)$$

$$u_i' = (u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{Ti}) \tag{7.94}$$

καί

$$\beta' = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \tag{7.95}$$

τότε μποροῦμε νά γράψουμε τίς T παρατηρήσεις τοῦ ὑποδείγματος (7.91) πού ἀνήκουν, ἄς ποῦμε, στή περιοχή i, ὡς ἑξῆς:

$$y_i = X_i\beta + u_i \tag{7.96}$$

Ἄν ἐπιπλέον θέσουμε

$$y' = (y_1', y_2', \ldots, y_p') \tag{7.97}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_p \end{bmatrix}$$

καί

$$u' = (u_1', u_2', \ldots, u_p') \tag{7.98}$$

τότε ὅλα τά p ὑποδείγματα (7.96) μποροῦν νά γραφτοῦν μαζύ ὡς ἑξῆς:

$$y = X\beta + u \tag{7.99}$$

Γιά νά μπορέσουμε νά ἐκτιμήσουμε τό ὑπόδειγμα (7.99) θά πρέπη νά κάνουμε ὁρισμένες ὑποθέσεις σχετικά μέ τούς διαταρακτικούς ὅρους u_{ti}, $i=1,\ldots,p$ καί $t=1,\ldots,T$.

Ἄν συνδυάσουμε τίς ὑποθέσεις πού κάναμε στά Κεφάλαια 5 καί 6 χωριστά (δηλαδή ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τά διαστρωματικά στοιχεῖα παρουσιάζουν ἑτεροσκεδαστικότητα ἀλλ' ὄχι αὐτοσυσχέτιση, ἐνῶ γιά τίς χρονολογικές σειρές ἰσχύει τό ἀντίθετο) ἄν δηλαδή ὑποθέσουμε ὅτι γιά τίς u_{ti}, u_{tj} $(i,j = 1,\dots,p)$ ἰσχύουν οἱ ἑξῆς σχέσεις:

$$E(u_{ti}^2) = \sigma_i^2 \equiv \frac{\sigma_{\varepsilon i}^2}{1-\rho_i^2} \quad \text{(ἑτεροσκεδαστικότητα)} \tag{7.100}$$

$$E(u_{ti}u_{tj}) = 0 \qquad i \neq j \tag{7.101}$$

$$u_{ti} = \rho_i u_{t-1,i} + \varepsilon_{ti} \qquad \text{(αὐτοσυσχέτιση)} \tag{7.102}$$

$$u_{oi} \quad \text{εἶναι} \quad N\left(0, \frac{\sigma_{\varepsilon i}^2}{1-\rho_i^2}\right) \tag{7.103}$$

καί γιά τίς $\varepsilon_{ti}, \varepsilon_{tj}$ $(i,j = 1,\dots,p)$ ἰσχύουν τά ἑξῆς:

$$\varepsilon_{ti} \quad \text{εἶναι} \quad N(0,\sigma_{\varepsilon i}^2) \tag{7.104}$$

$$E(u_{t-1,i}\,\varepsilon_{tj}) = 0 \quad \text{γιά ὅλα τά } i \text{ καί } j \tag{7.105}$$

καί, κατά συνέπειαν, ἔχουμε:

$$E(u_{ti}u_{ri}) = \rho_i^{t-r}\sigma_i^2 \qquad r \leqslant t \tag{7.106}$$

$$E(u_{ti}u_{sj}) = 0 \qquad t \neq s, \quad i \neq j \tag{7.107}$$

τότε:

$$E(uu') = \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2\Omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2\Omega_2 & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & & \dots & \sigma_p^2\Omega_p \end{bmatrix} \quad (7.108)$$

ὅπου

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} 1 & \rho_i & \dots & \rho_i^{T-1} \\ \rho_i & 1 & \dots & \rho_i^{T-2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \rho_i^{T-1} & \rho_i^{T-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (7.109)$$

Γιά νά μπορέσουμε νά προχωρήσουμε στήν ἐφαρμογή τῆς γενικευμένης μεθόδου τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, χρειάζεται νά ἐκτιμηθοῦν οἱ σ_i καί ρ_i, $i=1,\dots,p$.

Ἄν ἐκτιμήσουμε τό ὑπόδειγμα (7.99) μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων, μποροῦμε ἀπό τά κατάλοιπα $\hat{u}_{ti}$ νά ὑπολογίσουμε τίς $\hat{\rho}_i$ μέ τόν τύπο:

$$\hat{\rho}_i = \frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{ti}\hat{u}_{t-1,i}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{t-1,i}^2} \qquad i=1,\dots,p \qquad (7.110)$$

Χρησιμοποιώντας τίς $\hat{\rho}_i$ μετασχηματίζουμε τήν ἀνεξάρτητη καί τίς ἐξαρτημένες μεταβλητές καί τούς διαταρακτικούς ὅρους γιά $i = 1, \dots, p$ καί $t=2,\dots,T$ ὡς ἑξῆς:

$$y^*_{ti} = y_{ti} - \hat{\rho}_i y_{t-1,i} \qquad (7.111)$$

$$x^*_{tji} = x_{tji} - \hat{\rho}_i x_{t-1,ji} \qquad j = 1,\dots,n \qquad (7.112)$$

$$\varepsilon^*_{ti} = u_{ti} - \hat{\rho}_i u_{t-1,i} \qquad (7.113)$$

καί προχωροῦμε στήν ἐκτίμηση τοῦ ὑποδείγματος

$$y^*_{ti} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x^*_{tji} + \varepsilon^*_{ti} \qquad (7.114)$$

μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων.

Ἀπό τά κατάλοιπα τῆς (7.114), $\hat{\varepsilon}^*_{ti}$, ὑπολογίζουμε τίς

$$s^2_{\varepsilon i} = \frac{1}{T-n-1} \sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}^{*2}_{ti} \qquad (7.115)$$

καί τίς

$$s^2_i = \frac{s^2_{\varepsilon i}}{1-\hat{\rho}^2_i} \qquad (7.116)$$

Τόσο οἱ (7.110) ὅσο καί οἱ (7.115) εἶναι συνεπεῖς ἐκτιμητές. Ἄρα καί οἱ (7.116) εἶναι συνεπεῖς.

Ἀντικαθιστώντας τίς (7.110) καί (7.116) στήν (7.108) βρίσκουμε τόν ἐκτιμητή τῆς Ω, $\hat{\Omega}$. Τόν ἐκτιμητή αὐτόν τόν χρησιμοποιοῦμε γιά νά βροῦμε τίς

$$\hat{\beta} = (X'\hat{\Omega}^{-1} X)^{-1} X'\hat{\Omega}^{-1} y \qquad (7.117)$$

Ἀντί νά ἐκτιμήσουμε τίς β μέ τήν (7.117) μποροῦμε νά μετασχηματίσουμε τίς (7.111), (7.112) καί (7.113) γιά i=1,...,p καί t=2, ...,T ὡς ἑξῆς:

$$y^{**}_{ti} = \frac{y^*_{ti}}{s_{\varepsilon i}} \tag{7.118}$$

$$x^{**}_{tji} = \frac{x^*_{tji}}{s_{\varepsilon i}} \qquad j = 1,\ldots,n \tag{7.119}$$

$$\varepsilon^{**}_{ti} = \frac{\varepsilon^*_{ti}}{s_{\varepsilon i}} \tag{7.120}$$

καί μετά νά έκτιμήσουμε μέ τήν άπλή μέθοδο τῶν έλαχίστων τετραγώνων τό ὑπόδειγμα

$$y^{**}_{ti} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x^{**}_{tji} + \varepsilon^{**}_{ti} \tag{7.121}$$

Οἱ έκτιμητές πού βρίσκουμε άπό τήν έκτίμηση τῆς (7.121) εἶναι Α.Γ.Α.Ε.

VI. Συνδυασμὸς Συσχετιζομένων Διαστρωματικῶν Στοιχείων καὶ Αὐτοσχετιζομένων Χρονολογικῶν Σειρῶν

'Από τίς ὑποθέσεις πού κάναμε στό προηγούμενο τμῆμα, ή (7.101) φαίνεται μᾶλλον άπίθανη. Γιά τό λόγο αὐτό ὑποθέτουμε στό τμῆμα αὐτό ὅτι ὑπάρχει συσχέτιση άνάμεσα στά διαστρωματικά στοιχεῖα. Οἱ ὑποθέσεις σχετικά μέ τούς διαταρακτικούς ὅρους τοῦ ὑποδείγματος (7.91) εἶναι τώρα $(i,j=1,\ldots,p)$ οἱ έξῆς:

$$E(u^2_{ti}) = \sigma_{ii} \tag{7.122}$$

$$E(u_{ti}u_{tj}) = \sigma_{ij} \quad , \quad i \neq j \tag{7.123}$$

$$u_{ti} = \rho_i u_{t-1,i} + \varepsilon_{ti} \tag{7.124}$$

$$\varepsilon_{ti} \text{ εἶναι } N(0, \Phi_{ii}) \tag{7.125}$$

$$E(u_{t-1,i}\varepsilon_{tj}) = 0 \qquad (7.126)$$

$$E(\varepsilon_{ti}\varepsilon_{tj}) = \Phi_{ij} \qquad (7.127)$$

$$E(\varepsilon_{ti}\varepsilon_{sj}) = 0 \quad , t \neq s \qquad (7.128)$$

$$u_{oi} \text{ είναι } N\left(0, \frac{\Phi_{ii}}{1-\rho_i^2}\right) \qquad (7.129)$$

$$E(u_{oi}u_{oj}) = \frac{\Phi_{ij}}{1-\rho_i\rho_j} \qquad (7.130)$$

'Επομένως

$$E(uu') = \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\Omega_{11} & \cdots & \sigma_{1p}\Omega_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{p1}\Omega_{p1} & \cdots & \sigma_{pp}\Omega_{pp} \end{bmatrix} \qquad (7.131)$$

ὅπου

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_j & \rho_j^2 & \cdots & \rho_j^{T-1} \\ \rho_i & 1 & \rho_j & \cdots & \rho_j^{T-2} \\ \rho_i^2 & \rho_i & 1 & & \rho_j^{T-3} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \rho_i^{T-1} & \rho_i^{T-2} & \rho_i^{T-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (7.132)$$

Γιά νά μπορέσουμε νά σχηματίσουμε τόν έκτιμητή τοῦ Ω ἐκτιμοῦμε ὅπως καί προηγουμένως, τό ὑπόδειγμα μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων καί ἀπό τά κατάλοιπα ὑπολογίζουμε τίς $\hat{\rho}_i$.Μετά, χρησιμοποιώντας τίς ρ_i μετασχηματίζουμε τό ὑπόδειγμα ὅπως στίς (7.111) - (7.114) καί τό ἐκτιμοῦμε. Ἀπό τά κατάλοιπά τοῦ μετασχηματισμένου ὑποδείγματος, $\hat{\varepsilon}^*_{ti}$, ὑπολογίζουμε τίς

$$\hat{\Phi}_{ij} = \frac{1}{T-n-1} \sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}^*_{ti}\, \hat{\varepsilon}^*_{tj} \tag{7.133}$$

καί τίς

$$s_{ij} = \frac{\hat{\Phi}_{ij}}{1-\hat{\rho}_i\hat{\rho}_j} \tag{7.134}$$

Μέ τίς $\hat{\rho}_i$ καί s_{ij} σχηματίζουμε τήν μήτρα $\hat{\Omega}$ καί τήν χρησιμοποιοῦμε ὅπως καί στήν (7.117) γιά νά βροῦμε Α.Γ.Α.Ε. τῶν β.

Γιά μιά ἄλλη μέθοδο βλέπε Kmenta (1971) σελ. 513-514.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

'Αθανασιάδη, Κ.Α. (1954) Οἰκονομετρία, 'Αθῆναι, 'Εκδότης 'Αργύρης Παπαζήσης.

'Αθανασιάδη, Κ.Α. (1957α) Στατιστική, Μέρος Πρῶτον, 'Αθῆναι, 'Εκδότης 'Αργύρης Παπαζήσης.

'Αθανασιάδη, Κ.Α. (1957β) Στατιστική, Μέρος Δεύτερον, 'Αθῆναι, 'Εκδότης 'Αργύρης Παπαζήσης.

'Αθανασιάδη, Κ.Α. (1958) Στατιστική, Μέρος Τρίτον, 'Αθῆναι, 'Εκδότης 'Αργύρης Παπαζήσης.

'Ανδρεαδάκη, Σ.Α. (1974) Μαθήματα Γραμμικῆς 'Αλγέβρας, 'Αθῆναι.

Γκαμαλέτσου, Θ.Γ. (1972) Οἰκονομετρία, 'Αθῆναι.

Γκαμαλέτσου, Θ.Γ. (1973) 'Εφηρμοσμένη Οἰκονομετρία, 'Αθῆναι, 'Εκδόσεις Παπαζήση.

Δρακάτου, Κ.Γ. (1968) Εἰσαγωγή εἰς τήν Στατιστικήν, 'Αθῆναι, 'Εκδόσεις Παπαζήση.

Δρακάτου, Κ.Γ. (1971) Μαθήματα Οἰκονομομετρίας, Μέρος Πρῶτον: Μέθοδοι, 'Αθῆναι.

Δρακάτου, Κ.Γ. (1972) Στατιστική, Τεῦχος Πρῶτον, 'Αθῆναι, 'Εκδόσεις Παπαζήση.

Δρακάτου, Κ.Γ. (1973) Μαθήματα Οἰκονομομετρίας, Μέρος Δεύτερον: 'Εφαρμογαί, 'Αθῆναι.

Δρακάτου, Κ.Γ. (1974) Στατιστική, Τεῦχος Δεύτερον, 'Αθῆναι, 'Εκδόσεις Παπαζήση.

Δρεττάκη, Μ (1975) Γραμμική Άλγεβρα, Αθήνα

Κάκουλλου, Θ.Ν. (1969) Μαθήματα Θεωρίας Πιθανοτήτων, Τεῦχος Α΄, Ἀθῆναι.

Κάκουλλου, Θ.Ν. (1972) Στατιστική Θεωρία καί Ἐφαρμογαί, Ἀθῆναι.

Κάππου, Δ.Α. (1962) Μαθήματα Ἀναλύσεως-Ἀπειροστικός Λογισμός, Τεῦχος Α΄, Ἀθῆναι.

Κεβόρκ, Κ.Η. (1972α) Στατιστική, Τόμος Ι, Περιγραφική Στατιστική, Ἀθῆναι.

Κεβόρκ, Κ.Η. (1972β) Στατιστική, Τόμος ΙΙ, Ἐπαγωγική Στατιστική, Ἀθῆναι.

Κεβόρκ, Κ.Η. (1972γ) Στατιστική, Τόμος ΙΙΙ, Τεῦχος Α΄, Ἀνάλυσις Παλινδρομήσεως καί Συσχετίσεως, Ἀθῆναι.

Κεβόρκ, Κ.Η. (1972δ) Στατιστική, Τόμος ΙΙΙ, Τεῦχος Β΄, Ἀνάλυσις Παλινδρομήσεως καί Συσχετίσεως, Ἀθῆναι.

Κεβόρκ, Κ.Η. (1972ε) Πίνακες διά Στατιστικάς Ἐρεύνας, Ἀθῆναι.

Κιντῆ, Α.Α. (1974) Οἰκονομετρική Θεωρία, Τόμος Ι, Ἀθῆναι.

Λαμπράκη, Δ.Π. (1972) Μαθηματική Στατιστική 1, Ἰωάννινα.

Μπένου, Θ.Ε. & Stronge, W.B. (1974) Μαθηματικός Λογισμός Προβλημάτων Οἰκονομίας καί Ἐπιχειρήσεων, Τεῦχος Α΄, Θεσσαλονίκη, Ἐκδόσεις Ἀφῶν Σακκουλᾶ.

Στεριώτη, Π.Ι. (1969) Στοιχεῖα Γενικῶν Μαθηματικῶν, Τόμος Ι, Ἀθῆναι.

Στεριώτη, Π.Ι. (1973) Γενικά Μαθηματικά δι᾽Οἰκονομολόγους ΙΙ, Ἀθῆναι.

ΞΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Afifi, A.A. and Elashoff, R.M. (1967) "Missing Observations in Multivariate Statistics II, Point Estimation in Simple Linear Regression", Journal of the American Statistical Association, Vol. 62, March, pp. 10-29.

Aitchison, J. and Brown, A.C. (1957) The Lognormal Distribution, Cambridge, Cambridge University Press.

Aitken, A.C. (1935) "On Least Squares and Linear Combinations of Observations", Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Vol. 55, pp. 42-48.

Aitken, A.C. (1949) Determinants and Matrices, Edinburgh, Oliver and Boyd.

Allard, P.J. (1974) An Approach to Econometrics, London, Philip Allan.

Barten, A.P. (1962) "Note on Unbiased Estimation of the Squared Multiple Correlation Coefficient",Statistica Neerlandica, 16, pp. 151-163.

Chait, B. (1949) "Sur l' Econometrie", Bruxelles, J. Lebeque et Co.

Charatsis, E.G. (1970) "Statistical Methods for Estimation of Production Functions: A Cross-Section and Time Series Analysis of the Greek Manufacturing Industry", Ph.D. Thesis, University of London, London School of Economics and Political Science .

Chow, G.C. (1960)	"Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions", Econometrica, Vol. 28, pp. 591-605.
Chow, G.C. (1968)	"Two Methods of Computing Full-Information Maximum Likelihood Estimates in Simultaneous Stochastic Equations", International Economic Review, Vol.9, pp. 100-112.
Christ, C.F. (1966)	Econometric Models and Methods, New York, John Wiley and Sons Inc.
Cobb, C.W. and Douglas, P.H. (1928)	"A Theory of Production", American Economic Review, Vol. 18, Suppl. 139-165.
Cochrane, D.and Orcutt, G.H. (1949)	"Application of Least Squares Regression to Relationships Containing Autocorrelated Error Terms", Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, pp. 32-61.
Courant, R. (1936)	Differential and Integral Calculus, Vol. II, London, Blackie and Son Ltd.
Courant, R. (1937)	Differential and Integral Calculus, Vol. I, London, Blackie and Son Ltd.
Cramer, J.S. (1964)	"Efficient Grouping, Regression and Correlation in Engel Curve Analysis", Journal of the American Statistical Association, Vol.59,pp.233-50
Cramer, J.S. (1971)	Empirical Econometrics, Amsterdam, North-Holland Publishing Company.
Darmois, M. (1953)	"Discours" in the book Econometrie, Paris, Centre National de la Recherche Scientifique.

Davis, H.T. (1941) — The Theory of Econometrics, Bloomington, Indiana, The Principia Press.

Dean, J. (1936) — Statistical Determination of Costs with Special Reference to Marginal Cost, Chicago, The University Press.

Dhrymes, P.J. (1970) — Econometrics, Statistical Foundations and Applications, New York, Harper and Row.

Dhrymes, P.J. (1971) — Distributed Lags, San Francisco-Edinburgh, Holden-Day Inc. - Oliver and Boyd.

Drettakis, E.G. (1971) — "Missing Data in Econometric Estimation", Ph.D. thesis, University of London, London School of Economics and Political Science.

Drettakis, E.G. (1973a) — "Missing Data in Econometric Estimation", Review of Economic Studies,Vol.XL,pp.537-52.

Drettakis, E.G. (1973b) — "An Expository Note on the Derivation of the Two-Stage and Three-Stage Least Squares Estimators", Bulletin of Economic Research, Vol. 25, No.2, pp.146-47.

Drettakis, E.G. (1975a) — "Analyse des Jahrlichen Wanderungstrome in der Bundesrepublik Deutschland, 1962-1971", Mitteilungen aus der Arbeitsmarkt und Berufsforschung (forthcoming).

Drettakis, E.G. (1975b) — "Verschiebungen in der Zusammensetzung Deutscher Erwerbspersonen und der Zustrom Auslandischer Arbeiter, 1961-71", IFO-Studien, (forthcoming).

Drettakis, E.G. (1975c) — "Migrations des Travailleurs Europeens en France de 1956 a 1972", Les Annales de l' INSEE, No. 18, Jan-April.

Drettakis, E.G. (1975d) "Jugoslavenska Migracija u SR Njemacku i iz SR Njemacke 1962-1973", Yugoslav External Migration, Book 5, Zagreb.

Duesenberry, J.S., Fromm, G., Klein, L. R. and Kuh, E. (1965) The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States, Chicago-Amsterdam, Rand-Mc Nally and Co.-North Holland Publishing Co.

(1969) The Brookings Model: Some Further Results.

Duncan, O.D., Haller, A.D. and Portes, A. (1968) "Peer Influences on Aspirations: A re-interpretation", American Journal of Sociology, Vol. 74, pp. 119-37.

Durbin, J. and Watson, G.S. (1950) "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression I", Biometrica, Vol. 37, pp. 409-428.

Durbin, J. and Watson, G.S. (1951) "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression II", Biometrica, Vol. 38, pp. 159-178.

Durbin, J. (1953) "A Note on the Regression when there is Extraneous Information about one of the Coefficients", Journal of the American Statistical Association, Vol.48, pp.799-808.

Durbin, J. (1960) "Estimation of Parameters in Time-Series Regression Models", Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 22, pp. 139-153.

Durbin, J. (1970a) "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression when some of the Regressors are Lagged Endogenous Variables", Econometrica, Vol. 38, pp. 410-421.

Durbin, J. (1970b) "An Alternative to the Bounds Tests for Serial Correlation in Least Squares Regression", Econometrica, Vol. 38, pp. 422-424.

Eisenpress, H. and Greenstadt, J. (1966) "The Estimation of Non-Linear Econometric Systems", Econometrica, Vol. 34, pp.851-861.

Engel, E. (1857) "Die Produktions- und Consumptionsverhaeltinisse des Koenigsreichs Sachsen", Zeitschrift des Statistischen Bureaus des Koeniglich Saechsichen Ministerium des Inneren, Nos. 8,9.

Fisher, F.M. (1966) The Identification Problem in Econometrics, New York, Mc Graw Hill Book Co.

Fisher, F.M. (1970) "Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions: An Expository Note", Econometrica, Vol. 38, pp. 361-366.

Fox, K. (1958) Econometric Analysis for Public Policy, Ames, State University Press.

Frisch, R. (1933) "Editorial", Econometrica, Vol. 1, pp. 1-4.

Frisch, R. (1934) "Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems, Oslo, Universitets Økonomiske Institutt.

Gauss, K.F. (1821-3) "Theoria Combinationis Observationum Erroribus Minimis Obnoxiae" French translation by J.

Bertrand under the title "Methode des Moindres Carres", Paris, Mallet-Bachelier, 1855.

Gillespie, R.P. (1954) Partial Differentiation, Edinburgh and London, Oliver and Boyd.

Gillespie, R.P. (1955) Integration, Edinburgh and London, Oliver and Boyd.

Glejser, H. (1969) "A New Test for Heteroskedasticity", Journal of the American Statistical Association, Vol.64, pp. 316-323.

Goldberger, A.S. (1964) Econometric Theory, New York, John Wiley and and Sons Inc.

Goldberger, A.S. (1972) "Structural Equation Methods in Social Sciences", Econometrica, Vol.40, pp. 979-1001.

Goldfeld, S.M. and Quandt,R.E. (1965) "Some Tests for Heteroskedasticity", Journal of the American Statistical Association, Vol.60, pp.531-547.

Haavelmo, T. (1943) "The Statistical Implications of a System of Simultaneous Equations", Econometrica, Vol. 11, pp. 1-12.

Hadley, G. (1961) Linear Algebra, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Hardy, G.H. (1952) Pure Mathematics, Cambridge, Cambridge University Press.

Hart, B.I. and Neumann, J.von (1942a) "Tabulation of the Probabilities for the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance", Annals of Mathematical Statistics Vol. 13, pp. 207-214.

Hart, B.I. and Neumann, J. von (1942b) "Significance Levels for the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance", Annals of Mathematical Statistics Vol. 13, pp. 445-447.

Haitovsky, Y. (1967) "Regression Estimation from Grouped Observations", National Bureau of Economic Research, New York.

Hendry, D.F. (1970) "The Estimation of Economic Models with Auto-regressive Errors", Ph.D. thesis, University of London, London School of Economics and Political Science.

Hendry, D.F. (1974) "Stochastic Specification in an Aggregate Demand Model of the United Kingdom", Econometrica, Vol. 42, pp. 559-78.

Hoel, P.G. (1962) Introduction to Mathematical Statistics, New York, John Wiley and Sons Inc.

Hoood, W.C. and Koopmans, T.C. (Editors) (1953) Studies in Econometric Method, New York, John Wiley and Sons Inc.

Johnston, J. (1972) Econometric Methods, 2nd Edition, New York-Tokyo, McGraw-Hill Book Co.-Kogakusha Co.Ltd.

Joreskog, K.G. (1969) "A General Approach to Confirmatory Maximum Likelihood Factor Analysis", Psychometrica, Vol. 34, pp. 183-202.

Jorgenson, D.W. (1964) "Minimum Variance, Linear Unbiased Seasonal Adjustment of Economic Time Series", Journal of the American Statistical Association, Vol. 59, pp. 681-724.

Kane, E.J. (1969) Economic Statistics and Econometrics, London-Tokyo, Harper and Row-John Weatherhill.

Kelvin, Lord. (1889) Popular Lectures and Addresses, Vol. 1, London.

Kendall, M.G. and Stuart A. (1973) The AdvancedTheory of Statistics, Vol.2, Third Edition, London,Charles Griffin and Co. Ltd.

Kmenta, J. (1971) Elements of Econometrics, New York, The Macmillan Company.

Klein, L.R.and Goldberger,A.S. (1955) An Econometric Model of the United States,1929-1952, Amsterdam, North Holland Publishing Co.

Klein, L.R., Ball, R.J., Hazlewood,A. and Vandome,P. (1961) An Econometric Model of the United Kingdom, Oxford, Basil Blackwell.

Klein, L.R. (1960) "Single Equation vs. Equation System Methods of Estimation in Econometrics",Econometrica Vol. 28, pp. 866-871.

Klein, L.R. (1962) An Introduction to Econometrics, Englewood, Cliffs, N.J. , Prentice-Hall, Inc.

Klein, L.R. (1974) A Textbook of Econometrics, 2nd Edition, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall Inc.

Koutsoyiannis,A. (1973) Theory of Econometrics, London, Macmillan.

Lange, O. (1959) Introduction to Econometrics, London, Pergamon Press.

Larson, H.J. and Bancroft, T.A. (1963) "Biases in Prediction by Regression for Certain Incompletely Specified Models", Biometrica, Vol. 50, pp. 391-402.

Leser, C.E.V. (1966) "The Role of Macroeconomic Models in Short-Term Forecasting", Econometrica, Vol. 34, pp. 862-872.

Leser, C.E.V. (1968) "A Survey of Econometrics", Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General) pp. 530-566.

Leser, C.E.V. (1974) Econometric Techniques and Problems, 2nd Edition, London, Griffin's Statistical Monographs and Courses No. 12, Charles Griffin and Co. Ltd.

Lewis Parry, J. (1969) An Introduction to Mathematics for Students of Economics, 2nd Edition, London, Macmillan Co. Ltd.
Βλέπε καί μετάφραση στά Ἑλληνικά τοῦ Κ.Γ. Δρακάτου σέ τρεῖς τόμους μέ τόν τίτλο: Εἰσαγωγή εἰς τά Μαθηματικά τῆς Οἰκονομικῆς Ἀναλύσεως, Ἀθῆναι, Ἐκδόσεις Παπαζήση.

Malinvaud, E. (1961) Methodes Statistiques de l' Econometrie, Paris Dunod. See also English translation under the title Statistical Methods of Econometrics, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1966.

Malinvaud, E. (1961) "The Estimation of Distributed Lags: A Comment", Econometrica, Vol. 29, pp. 430-33.

Mann, H.B. and Wald, A. "On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations", Econometrica

(1943) Vol.11, pp.173-220.

Markov, A.A. (1912) Wahrscheinlichkeitsrechnung, German translation from the Second Russian Edition, Leipsig, B.G. Teubner.

Marschak, J. (1948) Introduction to Econometrics (lecture-notes) Buffalo, University of Buffalo.

Mill, J.S. (1941) A System of Logic, London, Longmans, Green and and Co.

Mitchell, W.C. (1937) "Quantitative Analysis in Economic Theory", The Background Art of Spending Money and Other Essays, New York, Mc Graw-Hill Book Co. pp. 20-41.

Mood, M.M. and Graybill, F.A. (1963) Introduction to the Theory of Statistics, New York, Mc Graw-Hill Book Co. Inc.

Moore, H.L. (1914) Economic Cycles, Their Law and Cause, New York, The Macmillan Company.

Nerlove, M. and Wallis, K.F. (1966) "Use of the Durbin-Watson Statistic in Inappropriate Situations", Econometrica, Vol. 34, pp. 235-238.

Nerlove, M. (1966) "A Tabular Survey of Macro-econometric Models", International Economic Review, Vol. 7, No. 2 pp. 127-175.

Neumann, J.von (1941) "Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive Difference to the Variance", Annals of Mathematical Statistics, Vol.12, pp.367-95.

Neumann, J.von (1942) "A Further Remark Concerning the Distribution of the Ratio of the Mean Square Successive

Difference to the Variance", Annals of Mathematical Statistics, Vol. 13, pp. 86-88.

Orcutt, G.H. and Cochrane, D. (1949) "A Sampling Study of the Merits of Autoregressive and Reduced Form Transformations in Regression Analysis", Journal of the American Statistical Association, Vol. 44, pp. 356-372.

Powell, M.J.D. (1964) "An Efficient Method for Finding the Minimum of a of Several Variables Without Calculating Derivatives", Computer Journal, Vol. 7, pp.155-62.

Prais, S.J. and Aitchison, J. (1954) "The Grouping of Obsrvations in Regression Analysis", Review of the International Statistical Institute, Vol. 22, pp. 1-22.

Prais, S.J. and Houthakker, H.S. (1955) The Analysis of Family Budgets, London-Cambridge, Cambridge University Press.

Press, S.J. and Brooks, R.B. (1969) "Testing for Serial Correlation in Regression", Report No. 6911, Center for Mathematical Studies in Business and Economics, The University of Chicago.

Rao, C.R. (1965) Linear Statistical Inference and its Applications New York, John Wiley and Sons.

Sargan, J.D. (1958) "The Estimation of Economic Relationships Using Instrumental Variables", Econometrica, Vol.26, pp.393-415.

Sargan, J.D. (1959) "The Estimation of Relationships with Auto-correlated Residuals by the Use of Instrumental Variables", Journal of the Royal Statistical Society, Series B, XXI, August pp. 91-105.

Sargan, J.D. (1964) "Wages and Prices in the United Kingdom: A Study in Econometric Methodology" in Econometric Analysis for National Economic Planning, London, Butterworth and Co. Ltd.

Sargan, J.D. and Drettakis, E.G. (1974) "Missing Data in An Autoregressive Model", International Economic Review, Vol. 15, pp. 39-57.

Schultz, H. (1938) The Theory of Measurement of Demand, Chicago, University Press.

Schumpeter, J. (1933) "The Common Sense of Econometrics", Econometrica, Vol.1, pp. 5-12.

Schumpeter, J. (1954) History of Economic Analysis, New York-Oxford University Press.

Stekler, H.O. (1968) "Forecasting with Econometric Models : An Evaluation", Econometrica, Vol.36, pp.437-63.

Stone, J.R.N. (1954) The Measurement of Consumer's Expenditure and Behaviour in the United Kingdom, 1920-1938, 1, Cambridge, Cambridge University Press.

Suits, D.B. (1957) "Use of Dummy Variables in Regression Equations", Journal of the American Statistical Association, Vol.52, pp.548-51.

Theil, H. (1953) "Repeated Least Squares Applied to Complete Equation Systems", The Hague, Central Planning Bureau.

Theil, H. (1961) Economic Forecasts and Policy, Amsterdam, North-Holland Publishing Co.

Theil, H. and Goldberger, A.S. "On Pure and Mixed Statitical Estimation in Economics", International Economic Review,

(1961) Vol.2, pp. 65-78.

Theil, H. (1963) "On the Use of Incomplete Prior Information in Regression Analysis", Journal of the American Statistical Association, Vol. 58, pp. 401-14.

Theil, H. (1965) "The Analysis of Disturbances in Regression Analysis", Journal of the American Statistical Association, Vol.60, pp. 1067-79.

Theil, H. (1968) "A Simplification of the BLUS procedure for Analysing Regression Disturbances", Journal of the American Statistical Association, Vol. 63, pp. 242-251.

Theil, H. (1971) Principles of Econometrics, New York, John Wiley and Sons Inc.

Tinbergen, J. (1937) An Econometric Approach to Business Cycle Problems, Paris, Hermann and Cie.

Tinbergen, J. (1939) Business Cycles in the United States of America, 1919-1932", Geneva, League of Nations.

Tinbergen, J. (1951) Econometrics, London, George Allen and Unwin Ltd.

Tintner, G. (1953) "The Definition of Econometrics", Econometrica Vol. 21, pp. 31-40.

Tintner, G. (1955) "The Teaching of Econometrics", Econometrica, Vol.23, pp. 77-100.

Wallis, K.F. (1972) Introductory Econometrics, London, Gray Mills Publishing Ltd.

Walters, A.A. (1970) An Introduction to Econometrics , 2nd Edition, London, Macmillan.

Walsh, J. (1966) Numerical Analysis, An Introduction, London, Academic Press.

Wicksteed, P.A. (1914) "The Scope and Method of Political Economy", Economic Journal, pp. 1-23.

Wold, H.O. (1954) "Causality and Econometrics", Econometrica, Vol. 22, pp. 162-177.

Wold, H.O.et al. (1967) "Forecasting on a Scientific Basis", Lisbon, Gulbenkian Institute of Science.

Wold, H.O. (1969) "Econometrics as Pioneering in Non-Experimental Model Building", Econometrica, Vol. 37, pp. 369-381.

Wonnacott, R.J. and T.H. (1970) Econometrics, New York, John Wiley and Sons Inc.

Working, H. (1927) "What do Statistical Demand Curves Show?", Quarterly Journal of Economics, Vol. 41, pp. 212-235.

Zellner, A. (1962) "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias", Journal of the American Statistical Association, Vol.57,pp.348-68.

Zellner,A.and Huang, D.S. (1962) "Further Properties of Efficient Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations", International Economic Review,pp.300-313.

Zellner, A. (1963) "Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations : Some Exact Finite Sample Results", Journal of the American Statistical Association, Vol. 58, pp. 977-992.

ΑΓΓΛΟΕΛΛΗΝΙΚΟ ΓΛΩΣΣΑΡΙΟ ΟΡΩΝ

Στό γλωσσάριο αὐτό δίνουμε, ἀπό τά ἀγγλικά στά ἑλληνικά, τούς περισσότερους ἀπό τούς ὅρους πού χρησιμοποιοῦμε στό βιβλίο αὐτό ἀνεξάρτητα ἀπό τό ἄν δόθηκε ἤ ὄχι στό κείμενο ἡ ἀγγλική λέξη (μέσα σέ παρένθεση) μετά τόν ἑλληνικό ὅρο.

A priori information	=	A priori πληροφορίες
Adjusted Coefficient of determination	=	Προσαρμοσμένος συντελεστής προσδιορισμοῦ
Alternative hypothesis	=	Διαζευκτική ὑπόθεση
Analysis of variance	=	Ἀνάλυση διακυμάνσεως
Applied Econometrics	=	Ἐφαρμοσμένη Οἰκονομετρία
Assumption	=	Ὑπόθεση
Asymptotic bias	=	Ἀσυμπτωτική μεροληψία ἤ ἀσυμπτωτικό μεροληπτικό σφάλμα
Asymptotic theory	=	Ἀσυμπτωτική θεωρία
Asymptotic unbiasedness	=	Ἀσυμπτωτική Ἀμεροληψία
Autocorrelation	=	Αὐτοτυσχέτιση
Autocorrelated disturbances	=	Αὐτοσυσχετιζόμενοι διαταρακτικοί ὅροι
Auxiliary regressions	=	Βοηθητικές παλινδρομήσεις
Basic assumptions	=	Βασικές ὑποθέσεις
Behavioural equations	=	Ἐξισώσεις συμπεριφορᾶς
Best Linear Unbiased Estimator	=	Ἄριστος Γραμμικός Ἀμερόληπτος Ἐκτιμητής
Bias	=	Μεροληψία ἤ Μεροληπτικό σφάλμα
Cause		Αἰτία ἤ Αἴτιο

Chi-squared distribution = Ἡ κατανομή

Classical Linear Model = Τό Κλασσικό Γραμμικό Ὑπόδειγμα

Coefficient = Συντελεστής

Coefficient of determination= Συντελεστής Προσδιορισμοῦ

Computer = Ἠλεκτρονικός ὑπολογιστής

Conditional = κάτω ἀπό τή συνθήκη

Confidence interval = Διάστημα ἐμπιστοσύνης

Consistency = Συνέπεια

Consistent = Συνεπής

Constant term = Σταθερός ὅρος

Constraint = Δεσμός ἤ περιορισμός

Corrected = διορθωμένος

Correlation Coefficient = Συντελεστής συσχετίσεως

Covariance Analysis = Ἀνάλυση συνδιακυμάνσεως

Cross-section data = Διαστρωματικά στοιχεῖα

Data = Στοιχεῖα ἤ δεδομένα

Degrees of freedom = Βαθμοί ἐλευθερίας

Density function = Συνάρτηση πυκνότητος.

Dependent Variable = Ἐξαρτημένη μεταβλητή

Deseasonalisation = Ἀπαλλαγή τῶν στατιστικῶν στοιχείων ἀπό τήν ἐποχικότητα

Detrimental = ἐπιβλαβής

Discarding = Ἀπόρριψη

Disturbance term = Διαταρακτικός ὅρος

Dynamic = δυναμικός

Dummy Variable = Ψευδομεταβλητή

Durbin-Watson statistic = Τό κριτήριο τῶν Durbin-Watson

Economic Statistics = Οἰκονομική Στατιστική

Economic Theory	=	Οἰκονομική θεωρία
Econometric methods	=	Οἰκονομετρικές Μέθοδοι
Econometric Society	=	Οἰκονομετρική Ἑταιρεία
Econometric theory	=	Οἰκονομετρική θεωρία
Econometrics	=	Οἰκονομετρία
Effect	=	Ἀποτέλεσμα ἤ αἰτιατό
Efficiency	=	Ἀποτελεσματικότητα
Efficient	=	Ἀποτελεσματικός
Endogenous variable	=	Ἐνδογενής Μεταβλητή
Estimates	=	Ἐκτιμήσεις
Estimation	=	Ἐκτίμηση
Estimator	=	Ἐκτιμητής
Experimental	=	Πειραματικός
Expected Value	=	Ἀναμενόμενη τιμή
Explained Sum of Squares	=	Ἑρμηνευόμενο Ἄθροισμα Τετραγώνων
Explanatory Variable	=	Ἑρμηνευτική Μεταβλητή
Exogenous Variable	=	Ἐξωγενής Μεταβλητή
F-distribution	=	Ἡ κατανομή F
First difference	=	Πρώτη διαφορά
First Order autocorrelation	=	Αὐτοσυσχέτιση Πρώτης τάξεως
First Order conditions	=	Συνθῆκες πρώτης τάξεως
Forecast	=	Πρόγνωση
Full-rank	=	Πλήρης βαθμός
Generalised Least Squares	=	Γενικευμένη μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων
Generalised Linear model	=	Τό Γενικευμένο Γραμμικό Ὑπόδειγμα

Global minimum	=	Ἀπόλυτο ἐλάχιστο
Grouped data	=	Ὁμαδοποιημένα στοιχεῖα
Grouping	=	Ὁμαδοποίηση
Heteroskedasticity	=	Ἑτεροσκεδαστικότητα
Homoskedasticity	=	Ὁμοσκεδαστικότητα
Hypothesis testing	=	Ἔλεγχος τῶν Ὑποθέσεων
Identity	=	Ταυτότητα
Independence	=	Ἀνεξαρτησία
Independent	=	Ἀνεξάρτητος
Interval	=	Διάστημα
Jacobian	=	Ἰακωβιανή ορίζουσα
Joint Probability distribution	=	ἀπό κοινοῦ κατανομή πιθανότητος
Lagged endogenous variable	=	Ἐνδογενής μεταβλητή μέ ὑστέρηση
Lagrange Multipliers	=	Πολλαπλασιαστές τοῦ Lagrange
Least squares method	=	Ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων
Level of significance	=	Ἐπίπεδο σημαντικότητος
Likelihood function	=	Συνάρτηση πιθανότητος
Limit	=	Ὅριο
Linearity	=	Γραμμικότητα
Local Minimum	=	Σχετικό ἐλάχιστο
Logarithmic transformation	=	Λογαριθμικός μετασχηματισμός
Log-normal distribution	=	Λογαριθμική κανονική κατανομή

Lower limit = Κάτω ὅριο

Maintained hypothesis = Ἐλεγχόμενη Ὑπόθεση
Mathematical Economics = Μαθηματική Οἰκονομική
Mathematical Statistics = Μαθηματική Στατιστική
Mathematics = Μαθηματικά
Maximisation = Μεγιστοποίηση
Maximum = Μέγιστο
Maximum Likelihood Principle = Ἡ Ἀρχή τῆς Μεγίστης πιθανότητος
Mean = Ὁ μέσος
Measurement error = Σφάλμα μετρήσεως
Method of estimation = Μέθοδος ἐκτιμήσεως
Minimum = Ἐλάχιστο
Minimisation = Ἐλαχιστοποίηση
Multicollinearity = Πολυσυγγραμμικότητα

Near multicollinearity = Ὄχι πλήρης πολυσυγγραμμικότητα
Necessary condition = Ἀναγκαία συνθήκη
Non-experimental = Μή πειραματικός
Non-linear = Μή γραμμικός
Normal distribution = Κανονική κατανομή

Observation = Παρατήρηση
One-tailed test = Μονοκατάληκτο κριτήριο ἐλέγχου
Orthogonal variables = Ὀρθογώνιες μεταβλητές

Parameter = Παράμετρος
Pooling = Συνδυασμός
Perfect = Πλήρης

Predetermined Variable = Προκαθορισμένη μεταβλητή
Prediction = Πρόβλεψη
Probability = Πιθανότητα
Program = Πρόγραμμα

Random sample = Τυχαῖο δεῖγμα
Random Variable = Τυχαία μεταβλητή
Randomnisation = Τυχαιοποίηση
Ratio = Λόγος
Reduced form = Ἀνηγμένη μορφή
Regression = Παλινδρόμηση
Regression strategy = Στρατηγική παλινδρομήσεως
Repeated Samples = Ἐπαναλαμβανόμενα δείγματα
Restricted Least Squares = Ἡ μέθοδος τῶν ἐλαχίστων τετραγώνων μέ περιορισμούς

Sample = Δεῖγμα
Seasonality = Ἐποχικότητα
Second-order conditions = Συνθῆκες δεύτερης τάξεως
Semi-log = Ἡμιλογαριθμικός
Significance = Σημαντικότητα
Series = Σειρά
Simultaneous equation models = Ὑποδείγματα ἀλληλεξαρτημένων ἐξισώσεων
Single equation models = Ὑποδείγματα μιᾶς ἐξισώσεως
Specification = Ἐξειδίκευση
Specification error = Σφάλμα ἐξειδικεύσεως
Standard error of estimate = Τυπικό σφάλμα ἐκτιμήσεως παραμέτρου
Stochastic = Στοχαστικός

Structural form	=	Διαρθρωτική μορφή
Structure	=	Δομή ή Διάρθρωση
Student's distribution	=	Ἡ κατανομή τοῦ Student
Sufficient condition	=	Ἱκανή συνθήκη
Sum of Squared Residuals	=	Ἄθροισμα τετραγώνων καταλοίπων
Sum of Squares	=	Ἄθροισμα τετραγώνων
Superfluous	=	Περιττός
t-distribution	=	Ἡ κατανομή τοῦ Student
Taylor Series	=	Σειρά τοῦ Taylor
Test of Hypotheses	=	Ἔλεγχος Ὑποθέσεων
Test of Significance	=	Ἔλεγχος σημαντικότητος
Time Series	=	Χρονολογικές σειρές
Theoretical Econometrics	=	Θεωρητική Οἰκονομετρία
Total Sum of Squares	=	Συνολικό Ἄθροισμα τετραγώνων
Total Variance	=	Συνολική διακύμανση
Transformation	=	Μετασχηματισμός
Trend	=	Τάση
Two-tailed test	=	Δικατάληκτο κριτήριο ἐλέγχου
Unbiased	=	Ἀμερόληπτος
Unbiasedness	=	Ἀμεροληψία
Uncorrelated	=	Ἀσυσχέτιστος
Unexplained variance	=	Ἀνερμήνευτη διακύμανση
Uniformly bounded	=	Ὁμοιόμορφα περατωμένος
Upper limit	=	Ἄνω ὅριο
Variability	=	Μεταβλητικότητα
Variable	=	Μεταβλητή

Variance	=	Διακύμανση
Variance table	=	Πίνακας διακυμάνσεως
Variation	=	Μεταβολή
Von Neumann Ratio	=	Ὁ λόγος τοῦ von Neumann

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΥΛΗΣ

Θ Ε Ω Ρ Η Τ Ι Κ Η   Ο Ι Κ Ο Ν Ο Μ Ε Τ Ρ Ι Α

Ι

Δ Ι Ο Ρ Θ Ω Σ Ε Ι Σ

Ἡ ἀνάγκη νά διανεμηθῆ ἐγκαίρως τό περασμένο ἀκαδημαϊκό ἔτος τό βιβλίο αὐτό στούς φοιτητές εἶχε σάν συνέπεια νά μή γίνουν ὁρισμένες διορθώσεις (δακτυλογραφικῶν κυρίως) λαθῶν, ὅπως αὐτές πού δίνονται παρακάτω.

Μανόλης Γ. Δρεττάκης
Καθηγητής Οἰκονομετρίας στήν ΑΣΟΕΕ

Ἀθήνα, Ἰανουάριος 1976

Σελίδα	Γραμμή	Ἀντί	Γράφε
8	11	Haarelnio	Haavelmo
15	14	Ἐλαχίστης Πιθανότητος	Μεγίστης Πιθανότητος
36	1,3	$\frac{\partial f}{\partial x^{*\prime}}$, $\frac{\partial f}{\partial x^{*}\partial x^{*\prime}}$	$\left(\frac{\partial f}{\partial x^{*\prime}}\right)_{x^*=\bar{x}^*}$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x^{*}\partial x^{*\prime}}\right)_{x^*=\bar{x}^*}$
47	6	$\hat{u}'\hat{u} = (y' - b'X)(y - Xb)$	$\hat{u}'\hat{u} = (y' - b'X')(y - Xb)$
49	1	$E[\{b-E(b)\}\{ b-E(b)\}]'$	$E[\{b-E(b)\}\{b-E(b)\}']$
57	5-17	τῶν X_1 , τίς X_1 , μεταβλητές X_2	τῶν X_2 , τίς X_2 , μεταβλητές X_1
59	9	$[I = X_1(X_1'X)^{-1}X_1']$	$[I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']$
60	7	$x^*_{1t.} = (x^*_{t1}, x^*_{t2},\dots\dots,x^*_{tn_1})$	$x^*_{2t.} = (x^*_{t,n_1+1}, x^*_{t,n_1+2},\dots\dots,x^*_{tn})$
60	18	$u_t^- = u_t^*$	$\hat{u}_t = \hat{u}_t^*$
61	1	Ἀφοῦ $x_{1t.} \neq o$ τότε θά πρέπη νά ἔχουμε	Ἡ (2,129) ἰσχύει ἄν ἔχουμε
62	4	(2.133)	(2.133α)
62	7	$[I = X_1(X_1'X)^{-1}X_1']$	$[I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']$
67	21	ἀπό οινοῦ	ἀπό κοινοῦ
74	13	διαιρέσουμε τήν (2,41)	διαιρέσουμε τήν (3.31)
75	12	$E(\hat{u}) - E(Qu) - QE(u) = o$	$E(\hat{u}) = E(Qu) = QE(u) = o$
75	18	καί (3,48),	καί (3.48) καί $QX(X'X)^{-1} = 0$ (βλέπε Goldberger (1964) σελ. 111)
79	6-18	$\frac{(\Sigma y_t)^2}{T} - \frac{(\Sigma y_t)^2}{T}$	$-\frac{(\Sigma y_t)^2}{T} + \frac{(\Sigma y_t)^2}{T}$
80	6	$\frac{\Sigma\hat{u}_t^2}{(y_t-\bar{y})^2}$	$\frac{\Sigma\hat{u}_t^2}{\Sigma(y_t-\bar{y})^2}$
80	7	Ἀπό τίς (3,65) καί (3,66) φαίνεται ὅτι ἡ (3.72) μπορεῖ νά γραφτῆ καί ὡς ἑξῆς:	Ἄν στίς σχέσεις (3,73)-(3.76) {καθώς καί στίς σχέσεις (3,120)-(3,125) καί (4.51)-βλέπε καί Johnston(1972) σελ.130 κ.ἑ.} τά y καί $\hat{y}$ εἶναι Tx1 διανύσματα καί ἡ X εἶναι Tx(n-1)μήτρα μέ στοιχεῖα τίς ἀποκλίσεις τῶν μεταβλητῶν ἀπό τούς μέσους τους καί β εἶναι ἕνα (n-1)x1 διάνυσμα τότε:
81	21	$\Sigma\hat{u}_t$	$\Sigma\hat{u}_t^2$
86	7	$\begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix}$
88	16	$\sigma^2(n^2)$	$\sigma^2(n_2)$
91	13	$X_2 = (x_{.n_1+1}, x_{.n_2+1},\dots\dots,x_{.n})$	$X_2 = (x_{.n_1+1}, x_{.n_1+2},\dots\dots,x_{.n})$
92	15	(3.123)	(3.125)
95	1,3	(3.133), (3.134)	νά σβύσουν οἱ ἀριθμοί αὐτοί τελείως.
95	5	$+u_{T+1}$	$-u_{T+1}$
97	12	$T\Sigma x_{t2} = (\Sigma x_{t2})^2$	$T\Sigma x_{t2}^2 - (\Sigma x_{t2})^2$
101	11	τό ὑπόδειγμα (4.3)	τό ὑπόδειγμα (4.4)
106	5	$\hat{u} = y - D^*c$	$\hat{u} = y - D^*c^*$
108	29	$y_{T_4 4}$ o o o o	$y_{T_4 4}$ o o o 1
111	14	$j = 1,2,3$	$j = 1,2,3$ καί τήν γ_4
116	7	$(i_i \,!\, X)$	$(i_i \,\vdots\, X^*)$
126-7		126,127 ἡ ἀρίθμηση τῶν σελίδων	νά γίνη 127, 126
127	23	$(X'X_+ = 0)$	(στό ὅριο $X'X_+ = 0$)
137	9	$= M^*$	$= M^*$,ὅπου M^* εἶναι μιά μή ἰδιάζουσα μήτρα
141	2	$\sigma_{st} = \sigma^2 w_{st}$	$\sigma_{st} = \sigma^2\omega_{st}$
142	4	$\sigma^2\Omega =$	$E(uu') = \sigma^2\Omega =$
149	15	Ἐλαχίστης Πιθανότητος	Μεγίστης Πιθανότητος
159	11	$\sum_{t=2}^{T} u_t^2 \cong \sum_{t=2}^{T} u_{t-1}^2$	$\sum_{t=2}^{T} u_t^2 \cong \sum_{t=2}^{T} u_{t-1}^2 \cong \sum_{t=1}^{T} u_t^2$
173	6,13	στίς (6.65)	στίς (6.55)
173	12	$\sum_{t\ 2}^{T}$	$\sum_{t=2}^{T}$
175	4	$\gamma' = (\beta' \quad -\rho\beta')$	$\gamma' = (\beta' , -\rho\beta')$
177	9-20	$\beta_o = 1$	$\beta_o^* = 1$, $\beta_j^* = -\beta_j$, $j = 1,2,\dots\dots,n$ καί σ'ὅλες τίς σχέσεις ἀντικαθιστοῦμε τά β_j μέ τά β_j^* ($j = 0,1,2,\dots,n$)
178	14	$\gamma^{*\prime} = (\beta^{*\prime}, \quad \rho\beta^{*\prime})$	$\gamma^{*\prime} = (\beta^{*\prime} , -\rho\beta^{*\prime})$
179	16	$(x_{tj} - x_{t-1,j})$	$(x_{tj} - \rho x_{t-1,j})$
179	22	$\frac{T-1}{2}\log 2\pi$	$-\frac{T-1}{2}\log 2\pi$
180	1	(Jacobian)	(Jacobian),δηλαδή ἡ ὁρίζουσα της μήτρας
180	2	= 1 (6.103)	εἶναι ἴση μέ 1 (6.103)
189	5	θετικά ἡμιορισμένη	ἀρνητικά ἡμιορισμένη
194	22	μῆτες	μῆτρες
203	1	$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1}$	$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{bmatrix}$
210	13	$1 \quad \rho_j \quad \rho_j^2$.	$1 \quad \rho_j \quad \rho_j^2$