Μανόλη Δρεττάκη
Καθηγητῆ Α.Σ.Ο.Ε.Ε.

Θεωρητική Οἰκονομετρία

II

$$y = Xa + u$$

$$a = [\ldots Z')X]^{-1} X'(S^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')y$$

Ἀθήνα 1979

Μανόλη Δρεττάκη
Καθηγητή Α.Σ.Ο.Ε.Ε.

Θεωρητική Οἰκονομετρία

II

$$y = Xa + u$$

$$a = \left[X'(S^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')X\right]^{-1} X'(S^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')y$$

Ἀθήνα 1979

Κάθε γνήσιο άντίτυπο έχει τήν ύπογραφή τοῦ συγγραφέα

Στήν Ἄρτεμη
καί
Στό Γιώργη

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ Δεύτερος Τόμος τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας, ὅπως προαναγγέλθηκε στόν Πρόλογο τοῦ Πρώτου Τόμου, εἶναι ἀφιερωμένος στά συστήματα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων καί στίς μεθόδους ἐκτίμησης τῶν παραμέτρων τους.

Ἐνῶ τά τρία τέταρτα, περίπου, τῆς ὕλης τοῦ Πρώτου Τόμου μποροῦν νά διδαχτοῦν σέ προπτυχιακό ἐπίπεδο καί τό ὑπόλοιπο σέ μεταπτυχιακό, οἱ ἀναλογίες αὐτές, στήν περίπτωση τούτου τοῦ Τόμου, εἶναι ἀντιστραμένες. Ὁ Δεύτερος Τόμος, δηλαδή, περιέχει ὕλη μεταπτυχιακοῦ, κατά κύριο λόγο, ἐπιπέδου. Μόνο ὁρισμένα τμήματα τῶν τεσσάρων πρώτων Κεφαλαίων του μποροῦν νά διδαχτοῦν σέ προπτυχιακούς σπουδαστές πού ἔχουν ἀφομοιώσει ἕνα μεγάλο μέρος τῆς ὕλης πού περιλαμβάνεται στά δύο προηγούμενα ἐγχειρίδια τοῦ συγγραφέα, δηλαδή τή Γραμμική Ἄλγεβρα γιά σπουδαστές τῆς Οἰκονομετρίας (1975) καί τή Θεωρητική Οἰκονομετρία - I (1975).

Τά ὅσα ἀναφέρονται πιό πάνω καί ἡ ἀνυπαρξία, μέχρι τό 1978, τμημάτων μεταπτυχιακῶν σπουδῶν στίς Οἰκονομικές Σχολές πανεπιστημιακοῦ ἐπιπέδου, ἀποτελοῦν μερικούς ἀπό τούς λόγους γιά τούς ὁποίους στά περισσότερα ἐγχειρίδια πού ἔχουν μέχρι σήμερα κυκλοφορήσει στήν Ἑλλάδα (βλέπε καί ἑλληνική βιβλιογραφία στόν Πρῶτο Τόμο) δέν ὑπάρχουν Κεφάλαια ἀφιερωμένα στά συστήματα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων. Καί στά λίγα ἐγχειρίδια ὅπου ὑπάρχουν τέτοια Κεφάλαια, ἡ κάλυψη ἑνός μικροῦ μόνο τμήματος τοῦ μεγάλου πεδίου τῶν συστημάτων ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων εἶναι πάρα πολύ συνοπτική.

Ὁ Δεύτερος αὐτός Τόμος τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας, κατά συνέπεια, ἔρχεται νά καλύψει ἕνα κενό στήν ἑλληνική βιβλιογραφία πάνω στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων συστημάτων ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων.

Ἄν πάρει κανείς ὑπόψη τήν τεράστια ἀνάπτυξη τοῦ τομέα τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας, πού φιλοδοξεῖ νά καλύψει ὁ Τόμος αὐτός, τά τελευταῖα 20 χρόνια, φυσικό εἶναι νά ὑπάρχουν πολλά θέματα τά ὁποῖα δέν ἦταν δυνατόν νά περιληφθοῦν σ'αὐτόν. Τά θέματα αὐτά, ὅπως καί ἐκεῖνα πού δέν καλύφθηκαν στόν Πρῶτο Τόμο (καί πού ἀφοροῦν τά ὑποδείγματα τῆς μιᾶς ἐξίσωσης), θά περιληφθοῦν στόν Τρίτο καί τελευταῖο Τόμο τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας. Γιά τόν ἐνδιαφερόμενο, ὅμως, ἀναγνώστη ὑπάρχει στόν Τόμο αὐτό (ὅπως καί στόν Πρῶτο) μιά ἀρκετά ἐκτεταμένη-πού φτάνει μέχρι καί τό 1978-βιβλιογραφία.

Ἡ ὕλη τοῦ Τόμου αὐτοῦ μπορεῖ νά διαιρεθεῖ σέ τέσσερα μέρη:

Τό πρῶτο (Κεφάλαιο 1) ἀποτελεῖ μιά εἰσαγωγή στίς βασικές ἔννοιες καί στά κύρια ἀποτελέσματα τῆς ἀσυμπτωτικῆς θεωρίας πού εἶναι ἀναγκαῖα γιά τήν κατανόηση τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐκτιμητῶν πού ἐξετάζονται στά ἑπόμενα Κεφάλαια.

Τό δεύτερο (Κεφάλαια 2 καί 3) εἶναι εἰσαγωγικό στά συστήματα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων καί καλύπτει τό συμβολισμό καί τίς βασικές ὑποθέσεις τοῦ ὑποδείγματος τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles καθώς καί τό πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης.

Τό τρίτο καλύπτει τίς κλασσικές μεθόδους ἐκτίμησης τῶν παραμέτρων μιᾶς ἐξίσωσης (Κεφάλαιο 4) καί ὁλόκληρου τοῦ συστήματος (Κεφάλαιο 5). Οἱ μέθοδοι αὐτές εἶναι: ἡ ἔμμεση μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων, ἡ μέθοδος τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν, ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια (γιά τή μιά ἐξίσωση) καί σέ τρία στάδια (γιά ὁλόκληρο τό σύστημα).

Τό τέταρτο καί τελευταῖο μέρος τοῦ Τόμου αὐτοῦ ἀφιερώνεται στήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων μιᾶς ἐξίσωσης ἤ ἑνός ὑποσυνόλου ἐξισώσεων (Κεφάλαιο 6) καί τῆς μεθόδου μέγιστης πιθανότητας μέ ὅλες τίς πληροφορίες γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων ὁλόκληρου τοῦ συστήματος (Κεφάλαιο 7).

Στό τέλος τοῦ Τόμου αὐτοῦ ὑπάρχουν ἡ βιβλιογραφία, ἕνα ἀγγλοελληνικό γλωσσάριο ὅρων καί τό εὑρετήριο ὕλης.

Ὑπενθυμίζουμε στόν ἀναγνώστη ὅτι, ὅπως καί στόν πρῶτο Τόμο, γιά τίς μῆτρες καί τά διανύσματα χρησιμοποιοῦμε τό μεγαλύτερο τύπο γραμμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ καί τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου. Π.χ.

Α, Β, Γ καί Χ, Υ, Ζ εἶναι μῆτρες καί 0 εἶναι ἡ μηδενική μήτρα

$\alpha_{.i}$, β καί x , y εἶναι διανύσματα στῆλες καί ο εἶναι τό μηδενικό διάνυσμα, ἐνῶ

$\alpha'_{.i}$, β΄ καί $x_{t.}$, y΄ εἶναι διανύσματα γραμμές.

Ὅταν μιά μήτρα ὑποδιαιρεῖται σέ ὑπομῆτρες ἤ ἕνα διάνυσμα σέ ὑποδιανύσματα προσθέτουμε δεῖχτες πού, σέ ὁρισμένες περιπτώσεις, ὑποδηλώνουν διαστάσεις, π.χ.

$\Pi_{n_1m_1}$ εἶναι μιά ὑπομήτρα διαστάσεων n_1xm_1, ἐνῶ

γ_{m_1} εἶναι ἕνα ὑποδιάνυσμα διαστάσεων m_1x1

Ὁ μικρότερος τύπος γραμμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ καί τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου χρησιμοποιοῦνται γιά τά στοιχεῖα τῶν μητρῶν καί τῶν διανυσμάτων καθώς καί γιά ἀριθμούς (π.χ. α_{ij},β_{ij}, x_{ti}, z_{tj} εἶναι στοιχεῖα τῶν μητρῶν Α, Β, Χ καί Ζ, ἀντίστοιχα, ἐνῶ α_i, β_i, y_t εἶναι στοιχεῖα τῶν διανυσμάτων α, β καί y ἀντίστοιχα καί λ,k εἶναι σταθερές).

Ὁ Τόμος αὐτός, μέ τό νά εἶναι συνέχεια τοῦ πρώτου (δηλαδή ἕνα ἐγχειρίδιο) εἶναι δύσκολο (γιά τούς λόγους πού ἀναφέρθηκαν στόν Πρῶτο Τόμο) νά διεκδικήσει τίτλους πρωτοτυπίας.

Περισσότερο ἀπό τόν Πρῶτο Τόμο θά πρέπει νά τονιστεῖ ἐδῶ τό μεγάλο χρέος τοῦ συγγραφέα στόν Καθηγητή J.D. Sargan τῆς London School of Economics and Political Science τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Λονδίνου, ὁ ὁποῖος τόν δίδαξε Οἰκονομετρία καί μέ τόν ὁποῖο ἔκανε καί τή διδακτορική του διατριβή. Ἡ ἐπίδραση τοῦ Καθηγητῆ Sargan εἶναι ἔκδηλη τόσο στόν Πρῶτο ὅσο καί σέ τοῦτο τόν Τόμο.

Ἡ παρουσίαση τῆς ὕλης καί σ'αὐτόν τόν Τόμο πολλά ὀφείλει καί στή διδακτική ἐμπειρία πού εἶχε ὁ συγγραφέας - καθώς καί στίς παρατηρήσεις τῶν σπουδαστῶν του - στή School of Economic Studies τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Leeds στήν Ἀγγλία, ὅπου ἐργάστηκε ὡς μέλος τοῦ μόνιμου διδακτικοῦ προσωπικοῦ στήν περίοδο 1970-1974.

Κλείνοντας τόν Πρόλογο αὐτό θά ἤθελα νά ἐκφράσω τίς εὐχαριστίες μου:

-στόν Καθηγητή τοῦ Πανεπιστημίου τοῦ Λονδίνου D.F.Hendry γιά ὁρισμένες παρατηρήσεις πού ἔκανε στά Κεφάλαια 1, 4, 5 καί 6

-στόν Καθηγητή τοῦ Πανεπιστημίου Πατρῶν κ. Γ. Ρούσσα γιά τίς χρήσιμες παρατηρήσεις του στό Κεφάλαιο 1, καί

-στόν κ. Μ.Μαγδαληνό, Βοηθό στήν ἕδρα μου στήν Α.Σ.Ο.Ε.Ε., γιά τήν ἐργασία πού πρόσφερε στά δύο χρόνια (1977-1979) πού χρειάστηκαν γιά τήν προετοιμασία τοῦ Τόμου αὐτοῦ.

Εἶναι αὐτονόητο ὅτι γιά ὅσα λάθη ὑπάρχουν ἀκόμα στό κείμενο, ἡ εὐθύνη βαρύνει ἀποκλειστικά ἐμένα.

Ἀθήνα, Σεπτέμβριος 1979

Μανόλης Γ. Δρεττάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ 7

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 11

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Εἰσαγωγή 15

I. Σύγκλιση ἀκολουθίας τυχαίων μεταβλητῶν σέ μιά σταθερή 16

II. Σύγκλιση ἀκολουθίας τυχαίων μεταβλητῶν σέ μιά τυχαία μεταβλητή 22

III. Ἀκολουθίες διανυσματικῶν τυχαίων μεταβλητῶν 25

IV. Νόμοι τῶν μεγάλων ἀριθμῶν καί κεντρικά ὁριακά θεωρήματα 28

V. Συγκλίνουσες ἀκολουθίες ἐκτιμητῶν 32

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΛΛΗΛΕΞΑΡΤΗΜΕΝΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Εἰσαγωγή 35

I. Ἡ ἀκαταλληλότητα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων 36

II. Τό ὑπόδειγμα τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles 40

III. Οἱ βασικές ὑποθέσεις γιά τό ὑπόδειγμα τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles 49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Εἰσαγωγή 55

Ι. Τό πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης μέ ἕνα παράδειγμα 56

ΙΙ. Τό πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης στή γενικότητά του 59

ΙΙΙ. Ἡ κλασσική μέθοδος ταυτοποίησης 64

IV. Ἡ μέθοδος τοῦ Fisher 71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Εἰσαγωγή 75

Ι. Ἡ ἔμμεση μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων 76

ΙΙ. Ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια 84

ΙΙΙ. Ἀσυμπτωτικές ἰδιότητες τῶν ἐκτιμητῶν τῆς 2ΣΜΕΤ 91

IV. Ἡ μέθοδος τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν 93

V. Συγκρίσεις τῶν ἐκτιμητῶν μέ τίς διάφορες μεθόδους 100

VI. Οἱ ἐκτιμητές τάξης διπλοῦ k, τάξης k καί τάξης h 104

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Εἰσαγωγή 107

Ι. Συμβολισμός ἑνός συστήματος μέ τή μορφή μιᾶς ἐξίσωσης 108

ΙΙ. Ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια 110

ΙΙΙ. Ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ τρία στάδια 113

IV. Ἡ μέθοδος τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν 116

V. Συγκρίσεις τῶν ἐκτιμητῶν μέ τίς διάφορες μεθόδους 119

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

Εἰσαγωγή 125

I. Ἡ μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας στήν περίπτωση μιᾶς διανυσματικῆς τυχαίας μεταβλητῆς 126

II. Ἡ συνάρτηση πιθανότητας ὁλόκληρου τοῦ συστήματος 130

III. Ἡ μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες στήν περίπτωση ἑνός ὑποσυνόλου ἐξισώσεων 134

IV. Ἡ μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες γιά μιά ἐξίσωση 143

V. Ἰδιότητες τῶν ἐκτιμητῶν τῆς ΜΜΠΠΠ 148

VI. Ἔλεγχοι ἐξειδίκευσης μιᾶς ἐξίσωσης 150

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

Εἰσαγωγή 151

I. Ἐφαρμογή τῆς ΜΜΠΟΠ στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς ἀνηγμένης μορφῆς 153

II. Ἐφαρμογή τῆς ΜΜΠΟΠ στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς 155

III. Ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς μέ τή ΜΜΠΟΠ χωρίς περιορισμούς στή μήτρα Σ 158

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΜΗΤΡΩΝ 165

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 167

ΑΓΓΛΟΕΛΛΗΝΙΚΟ ΓΛΩΣΣΑΡΙΟ ΟΡΩΝ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΥΛΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Εισαγωγή

Ἕνα ἀπό τά πιό δύσκολα τμήματα τῆς Μαθηματικῆς Στατιστικῆς εἶναι ἐκεῖνο πού ἀναφέρεται στήν ἀσυμπτωτική θεωρία (asymptotic theory). Ἡ γνώση ὁρισμένων βασικῶν ἐννοιῶν καί ἀποτελεσμάτων τοῦ τμήματος αὐτοῦ εἶναι ἀπαραίτητη γιά τήν κατανόηση τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐκτιμητῶν πού θά ἐξετάσουμε στά ἑπόμενα Κεφάλαια τοῦ Τόμου αὐτοῦ.

Ἐπειδή οἱ περισσότεροι σπουδαστές τῆς Οἰκονομετρίας στίς Οἰκονομικές Σχολές πανεπιστημιακοῦ ἐπιπέδου στήν Ἑλλάδα δέν ἔχουν τίς προαπαιτούμενες γνώσεις γιά μιά διεξοδική μελέτη τῆς ἀσυμπτωτικῆς θεωρίας, προσπαθήσαμε, στό Κεφάλαιο αὐτό, νά κρατήσουμε τή μαθηματική ἀνάλυση σέ ὅσο γίνεται πιό προσιτό ἐπίπεδο. Γιά νά τό πετύχουμε αὐτό, στά τμήματα πού ἀκολουθοῦν, παραθέτουμε τούς ὁρισμούς, τίς προτάσεις καί τά θεωρήματα τῆς ἀσυμπτωτικῆς θεωρίας πού μᾶς χρειάζονται, δίνοντας, ὅπου αὐτό εἶναι δυνατό, τίς ἀποδείξεις σέ ἁπλή μορφή. Ἄν αὐτό εἶναι ἀδύνατο, δίνουμε παραπομπές στή σχετική βιβλιογραφία (ἄρθρα καί ἐγχειρίδια) τήν ὁποία μπορεῖ νά συμβουλευτεῖ ὁ ἐνδιαφερόμενος ἀναγνώστης.

1. Σύγκλιση ἀκολουθίας τυχαίων μεταβλητῶν σέ μιά σταθερή

Ἄν ἔχουμε μιά ἀκολουθία (sequence) τυχαίων μεταβλητῶν (τ.μ.) (random variables):

$$\{x_t \ , \ t \ = \ 1,2,\ldots\ldots, T, \ldots\ldots\}$$

λέμε ὅτι συγκλίνει σέ μιά σταθερή, ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο καί πέρα, τά στοιχεῖα της πλησιάζουν, μέ κάποια ἔννοια, τή σταθερή αὐτή.

Διακρίνουμε τρεῖς τρόπους σύγκλισης (convergence) μιᾶς ἀκολουθίας τ.μ. σέ μιά σταθερή c :

(i) Κατά μέσο τετραγώνου (in quadratic mean), ἄν

$$\lim_{t\to\infty} \left[E\,(x_t - c)^2 \right] = 0 \tag{1.1}$$

(ii) Μέ πιθανότητα τή μονάδα (with probability one), ἄν γιά κάθε ε>0 ὑπάρχει ἕνας δείχτης T, τέτοιος ὥστε, γιά κάθε t⩾T

$$\Pr\{|x_t - c| < \varepsilon\} = 1 \text{ , δηλαδή}$$

$$\Pr\{\lim x_t = c\} = 1 \text{ , ἤ} \tag{1.2}$$

$$\lim x_t = c \text{ μέ πιθανότητα 1.}$$

(iii) Κατά πιθανότητα (in probability) , ἄν γιά κάθε δ,ε > 0 ὑπάρχει ἕνας δείχτης T=T(δ,ε) τέτοιος ὥστε γιά κάθε t⩾T

$$\Pr\{\,|x_t - c| < \varepsilon\} > 1 - \delta \tag{1.3}$$

ἤ ἰσοδύναμα:

$$\Pr\{\,|x_t - c| \geqslant \varepsilon\} < \delta \tag{1.4}$$

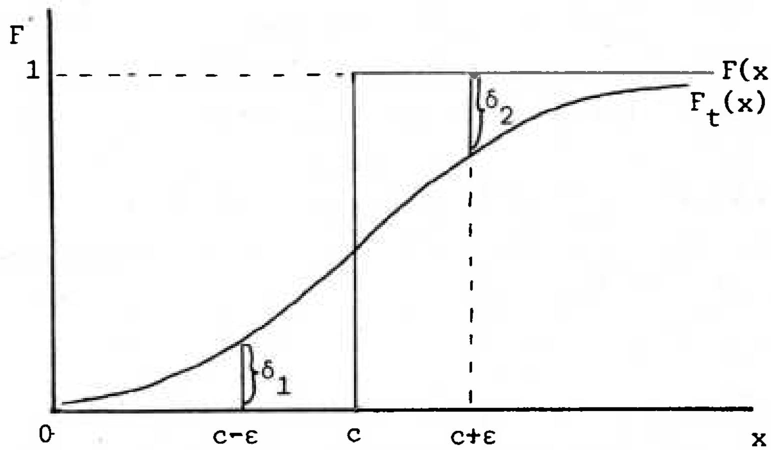
Ἄν στήν (1.3) ἀντικαταστήσουμε τήν $<$ μέ $\leqslant$ καί στήν (1.4) τήν $\geqslant$ μέ $>$, ὅπως κάνουν οἱ Theil (1971), Rao (1973) κ.ἄ. ,οἱ νέοι ὁρισμοί εἶναι ἰσοδύναμοι μέ τούς (1.3) καί (1.4). Ἐπίσης ἰσοδύναμη μέ τήν (1.4) εἶναι ἡ συνθήκη:

$$\lim_{t \to \infty} \Pr \{ |x_t - c| > \varepsilon \} = 0$$

Συμβολίζουμε τή σύγκλιση κατά πιθανότητα μέ

$$\operatorname*{plim}_{t \to \infty} x_t = c, \text{ἤ πιό ἁπλά, } \operatorname{plim} x_t = c$$

Γιά νά δείξουμε διαγραμματικά τή σύγκλιση κατά πιθανότητα, ἔστω $F_t(x)$ οἱ συναρτήσεις κατανομῆς (σ.κ.) τῶν τ.μ. x_t, $t = 1,2,\dots\dots\dots,$ συνεχεῖς στό διάστημα $[c - \varepsilon\ ,\ c + \varepsilon]$. Τότε,



Διάγραμμα 1. Σύγκλιση ἀκολουθίας τ.μ. σέ μιά σταθερή

στό Διάγραμμα 1:

$$\delta_1 = F_t(c - \varepsilon) = \Pr \{ x_t \leqslant c - \varepsilon \} = \Pr \{ -(x_t - c) \geqslant \varepsilon \}$$

καί

$$\delta_2 = 1 - F_t(c + \varepsilon) = 1 - \Pr\{ x_t \leqslant c + \varepsilon \} = \Pr\{ (x_t - c) > \varepsilon \}$$

Κατά συνέπεια:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \Pr \{ | x_t - c| \geqslant \varepsilon \}$$

καί ἀπό τήν (1.4) εἶναι φανερό ὅτι, ἄν

$$\text{plim}\ x_t = 0$$

τότε $\underset{t \to \infty}{\delta \longrightarrow 0}$, δηλ. οἱ σ.κ. F_t συγκλίνουν στή συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} 1 \text{ γιά } x \geqslant c \\ \\ 0 \text{ γιά } x < c \end{cases}$$

πού εἶναι σ.κ. μιᾶς **ἐκφυλισμένης (degenerate)** τ.μ. x , μέ ὁλόκληρη τή μάζα πιθανότητας συγκεντρωμένη στό c , δηλαδή

$$\Pr\{\ x = c\ \} = 1$$

Ὁ ρυθμός σύγκλισης μιᾶς ἀκολουθίας τ.μ. προσδιορίζεται μέ τίς **στοχαστικές τάξεις μεγέθους (stochastic orders of magnitude)**. Ἐνῶ ἡ βιβλιογραφία γιά τή σύγκλιση ἀκολουθιῶν τ.μ. εἶναι πλούσια, πολύ λίγα συγγράμματα ἤ ἄρθρα ἀναφέρονται στίς στοχαστικές τάξεις μεγέθους (βλ. π.χ. Rao (1973), σελ. 151-52, καί Man and Wald (1943)).

Ἄν $\{\ x_t\ ,\ t = 1,2,\dots\dots\ \}$ εἶναι μιά ἀκολουθία τ.μ. καί S(t)εἶναι μιά θετική συνάρτηση πάνω στούςφυσικούς ἀριθμούς, λέμε ὅτι

(α) ἡ x_t εἶναι στοχαστικῆς τάξης μεγέθους μικροῦ ο, ἤ, συμβολικά $x_t = o[S(t)]$,ἄν

$$\text{plim}\left(\frac{x_t}{S(t)}\right) = 0$$

(β) ἡ x_t εἶναι στοχαστικῆς τάξης μεγέθους κεφαλαίου O, ἤ συμβολικά $x_t = O[S(t)]$,ἄν γιά κάθε δ, ὁσοδήποτε μικρό, ὑπάρχει ἕνα ε(δ), τέτοιο ὥστε γιά κάθε t $\geqslant$ T

$$\Pr\{\ |\ x_t\ | \leqslant \varepsilon S(t)\ \} > 1 - \delta$$

Εἶναι εὔκολο νά δειχτεῖ ὅτι οἱ κανόνες πού ἰσχύουν γιά τίς μή στοχαστικές τάξεις μεγέθους(βλ.π.χ. Hardy(1952), σελ. 164, 183) ἰσχύουν καί γιά τίς στοχαστικές τάξεις μεγέθους.

Πρίν προχωρήσουμε, θεωροῦμε ἀναγκαῖο νά δώσουμε δύο, γνωστές ἀπό τή Μαθηματική Στατιστική, ἀνισότητες, πού θά τίς χρησιμοποιήσουμε στή συνέχεια.

Ἄν $y = |x - c|$ ὅπου x μιά τ.μ. , c μιά σταθερή καί $\varepsilon, r > 0$, τότε

$$E(y^r) = \int_{-\infty}^{\infty} y^r dF = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} y^r dF + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y^r dF + \int_{\varepsilon}^{\infty} y^r dF \geqslant$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} y^r dF + \int_{\varepsilon}^{\infty} y^r dF \geqslant \varepsilon^r \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} dF + \int_{\varepsilon}^{\infty} dF \right) =$$

$$\varepsilon^r (Pr\{ y \geqslant \varepsilon \})$$

Κατά συνέπεια

$$Pr\{ |x - c| \geqslant \varepsilon \} \leqslant \frac{E|x - c|^r}{\varepsilon^r} ,$$

πού εἶναι ἡ ἀνισότητα τοῦ Markov (Markov inequality).

Καί γιά $r = 2$

$$Pr\{ |x - c| \geqslant \varepsilon \} \leqslant \frac{E|x - c|^2}{\varepsilon^2} ,$$

πού εἶναι ἡ ἀνισότητα τοῦ Chebychev (Chebychev inequality).

Βλέπε, σχετικά, καί Roussas (1973), σελ. 93-4.

Πρόταση 1. Ἡ σύγκλιση κατά μέσο τετραγώνου συνεπάγεται τή σύγκλιση κατά πιθανότητα.

Ἀπόδειξη: Ἄν ἰσχύει ἡ (1.1) παίρνουμε τά ὅρια τῆς ἀνισότητας τοῦ Chebychev, ὁπότε ἔχουμε:

$$\lim \Pr \{ |x_t - c| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \lim \frac{E(x_t - c)^2}{\varepsilon^2} = 0$$

δηλαδή

$$\operatorname{plim} x_t = c$$

Πρόταση 2. Ἡ σύγκλιση μέ πιθανότητα τή μονάδα συνεπάγεται τή σύγκλιση κατά πιθανότητα.

Ἀπόδειξη: Βλέπε Roussas (1973), σελ. 133-134.

Πρόταση 3. Ἡ ἀκολουθία τ.μ. $\{ x_t , t = 1,2,.......... \}$ συγκλίνει κατά μέσο τετραγώνου σέ μιά σταθερή c, ὅταν καί μόνο ὅταν:

$$\lim E(x_t) = c \quad \text{καί} \quad \lim \operatorname{Var}(x_t) = 0 \qquad (1.5)$$

Ἀπόδειξη: Παίρνουμε τήν

$$\begin{aligned} E(x_t - c)^2 &= E[(x_t - E(x_t)) + (E(x_t) - c)]^2 = \\ &= \operatorname{Var}(x_t) + [E(x_t) - c]^2 \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Κατά συνέπεια

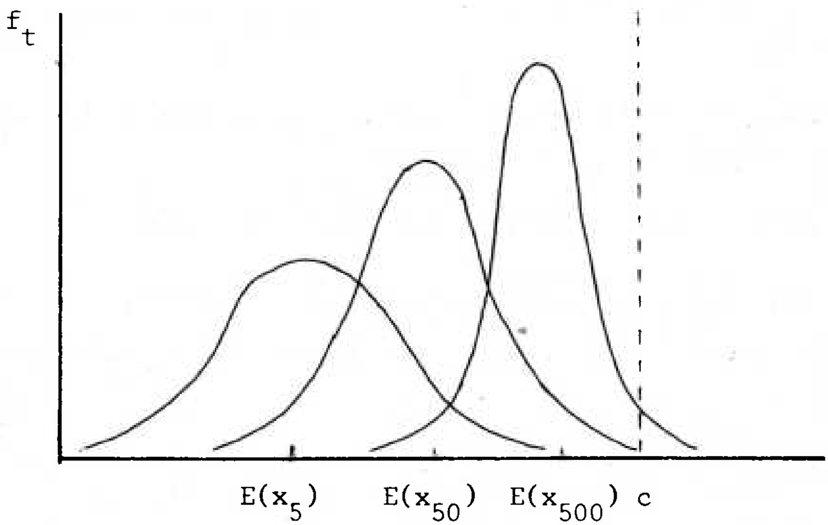
$$0 \leqslant \operatorname{var}(x_t) \leqslant E(x_t - c)^2$$

καί

$$0 \leqslant [E(x_t) - c]^2 \leqslant E(x_t - c)^2$$

Παίρνοντας τά ὅρια στίς δύο παραπάνω ἀνισότητες καί ἐφόσον ἰσχύει ἡ (1.1), ἀποδείχνουμε ὅτι ἰσχύουν οἱ (1.5). Ἀντίστροφα, ἄν ἰσχύουν οἱ (1.5), παίρνοντας τά ὅρια στήν (1.6) ἀποδείχνουμε ὅτι ἰσχύει ἡ (1.1).

Ἄν ἰσχύουν οἱ (1.5) λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία καταρρέει στή σταθερή c . Ἡ κατάρρευση μιᾶς ἀκολουθίας στή σταθερή c , ὅταν ὑπάρχουν οἱ συναρτήσεις πυκνότητας (σ.π.) f_t , φαίνεται στό Διάγραμμα 2:



Διάγραμμα 2. Κατάρρευση μιᾶς ἀκολουθίας τ.μ. σέ μιά σταθερή.

Ἀπό τίς Προτάσεις 1 καί 3 συμπεραίνουμε ὅτι ἡ κατάρρευση μιᾶς ἀκολουθίας σέ μιά σταθερή συνεπάγεται ὅτι ἡ σταθερή αὐτή εἶναι τό ὅριο πιθανότητας τῆς ἀκολουθίας. Ἡ ὕπαρξη, ὅμως, τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ὁρίου δέν συνεπάγεται τήν κατάρρευση τῆς ἀκολουθίας τ.μ. Πάνω στό θέμα αὐτό βλέπε καί τό παράδειγμα πού δίνει ὁ Dhrymes (1970) στή σελίδα 88.

II. Σύγκλιση ἀκολουθίας τυχαίων μεταβλητῶν σέ μιά τυχαία μεταβλητή

Μιά ἀκολουθία τ.μ. εἶναι δυνατόν νά συγκλίνει, ὄχι σέ μιά σταθερή, ἀλλά σέ μιά ἄλλη τ.μ.

Λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία τ.μ. $\{x_t\ ,\ t = 1,2,........\}$ συγκλίνει στήν τ.μ. x μέ τήν ἔννοια τῶν ὁρισμῶν (i), (ii) ἤ (iii) τοῦ προηγούμενου τμήματος, ἄν ἡ ἀκολουθία$\{(x_t - x),\ t = 1,2..\}$συγκλίνει στό μηδέν σύμφωνα μέ τούς ὁρισμούς (i), (ii) ἤ (iii).

Ἄν $F_t(x)$ εἶναι ἡ σ.κ. τῆς τ.μ. x_t καί $F(x)$ ἡ σ.κ. τῆς τ.μ. x , ὁρίζουμε τή

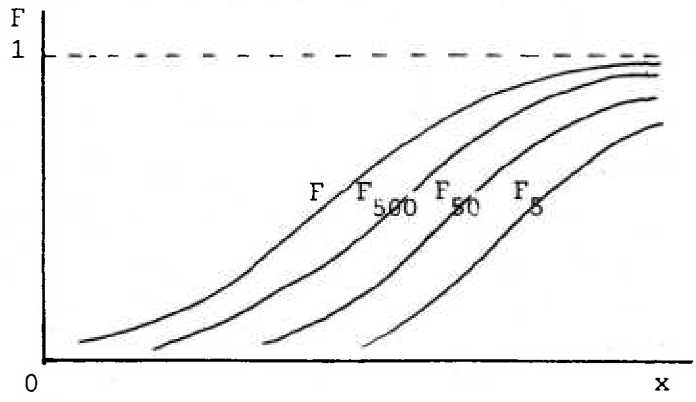
(iv) Σύγκλιση κατά κατανομή (in distribution), ἄν

$$\lim_{t\to\infty} F_t(x) = F(x)$$ γιά κάθε σημεῖο συνέχειας

τῆς F καί τή συμβολίζουμε μέ

$$x_t \xrightarrow{d} x \qquad (1.7)$$

Ἡ σύγκλιση ἀκολουθίας τ.μ. κατά κατανομή φαίνεται στό Διάγραμμα 3



Διάγραμμα 3. Σύγκλιση ἀκολουθίας τ.μ. κατά κατανομή.

Ἡ κατανομή F(x) ὀνομάζεται **ὁριακή κατανομή** (limiting distribution) τῆς ἀκολουθίας $\{x_t,\ t = 1,2,\ldots\ldots\}$

Πρόταση 4. Ἡ σύγκλιση κατά πιθανότητα συνεπάγεται τή σύγκλιση κατά κατανομή. Τό ἀντίστροφο ἰσχύει ἄν ἡ ὁριακή κατανομή εἶναι ἐκφυλισμένη.

Ἀπόδειξη : Βλέπε Loève (1963), σελ.168 καί Roussas (1973), σελ. 134-136.

Ὅπως παρατηρεῖ ὁ Dhrymes (1970), σελ. 93, ἡ σημασία τῆς παραπάνω Πρότασης βρίσκεται στό γεγονός ὅτι, ὅταν ἔχουμε ἕνα ἐκτιμητή τοῦ ὁποίου δέν εἶναι εὔκολο νά προσδιορίσουμε τήν κατανομή σέ μικρά δείγματα, μπορούμε νά συνάγουμε τήν ἀσυμπτωτική του κατανομή ἄν μπορούμε νά προσδιορίσουμε τό ὅριο πιθανότητας τοῦ ἐκτιμητῆ αὐτοῦ.

Ἐπιπλέον, ὅπως φαίνεται ἀπό τό Διάγραμμα 1, ὅταν ἔχουμε σύγκλιση σέ μιά σταθερή, ἡ σύγκλιση κατά πιθανότητα καί ἡ σύγκλιση κατά κατανομή εἶναι ταυτόσημες.

Περιληπτικά οἱ σχέσεις ἀνάμεσα στούς διάφορους τρόπους σύγκλισης εἶναι οἱ ἑξῆς:

$$
\begin{array}{lcl}
\lim x_t = x \text{ μέ πιθ.1} \ \searrow & & \\
 & \operatorname{plim} x_t = x \ \underset{\Leftarrow}{\Rightarrow} \ x_t \xrightarrow{d} x & \\
\lim E(x_t - x)^2 = 0 \ \nearrow & \text{(ἄν } x = c) &
\end{array}
$$

Πρόταση 5. Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία τ.μ. x_t μέ σ.κ.$F_t(x)$ συγκλίνει κατά κατανομή στήν τ.μ. x μέ σ.κ.F(x) καί, ἀκόμη, g(x) μιά συνεχής συνάρτηση, τότε

(i) ἄν a καί b (a < b) εἶναι σημεῖα συνέχειας τῆς F , τότε

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b g(x)dF_t = \int_a^b g(x)dF$$

(ii) Ἂν ἡ $g(x)$ εἶναι φραγμένη, τότε

$$\lim_{t \to \infty} \int g(x)dF_t = \int g(x)dF$$

ὅπου $\int \equiv \int_{-\infty}^{\infty}$

Ἀπόδειξη: Βλέπε Loève (1963), σελ. 180-2.

Πρόταση 6. Θεώρημα τῆς συνέχειας (Continuity Theorem). Ἂν $\varphi_t(u)$ εἶναι οἱ χαρακτηριστικές συναρτήσεις πού ἀντιστοιχοῦν στίς τ.μ. x_t , $t > 1$, ὅπου $x_t \xrightarrow{d} x$, καί ἂν $\varphi(u)$ εἶναι ἡ χαρακτηριστική συνάρτηση τῆς τ.μ. x , τότε

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_t(u) = \varphi(u), \text{ γιά κάθε } u .$$

Ἀντίστροφα, ἂν ὑπάρχει μιά συνάρτηση $\varphi(u)$, συνεχής στό $u = 0$, τέτοια ὥστε νά ἰσχύει ἡ παραπάνω σχέση, τότε

$$x_t \xrightarrow{d} x$$

ὅπου x εἶναι ἡ τ.μ. μέ χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(u)$.

Ἀπόδειξη: Βλ. Dhrymes (1970), σελ.94 καί Loève (1963), σελ.191.

Πρίν προχωρήσουμε δίνουμε τόν παρακάτω ὁρισμό:

Μιά συνάρτηση $g(x)$ εἶναι ὁμοιόμορφα ὁλοκληρώσιμη (uniformly integrable) ὡς πρός τίς σ.κ. F_t, $t = 1,2,\ldots..$, ἂν

$$\sup_{t=1,2,\ldots} \int_{|x|>c} |g(x)|dF_t \xrightarrow[c \to \infty]{} 0$$

Πρόταση 7. Ἔστω μιά ἀκολουθία τ.μ. $\{x_t\ , t = 1,2,\ldots.\}$ μέ σ.κ. $\{F_t\ , t = 1,2,\ldots..\}$. Ἂν γιά κάποιο $r_o > 0$, ἡ $|x|^{r_o}$ εἶναι ὁμιοόμορφα ὁλοκληρώσιμη ὡς πρός τίς F_t ,τότε ὑπάρχει μιά ὑπακολουθία $\{x_{t'}\}$ τῆς ἀκολουθίας $\{x_t\}$ καί μιά τ.μ. x,τέτοιες ὥστε:

$$x_t \xrightarrow{d} x$$

καί γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό r καί θετικό ἀκέραιο k

$$r \leqslant r_o \Rightarrow \lim E\,|x_t|^r = E\,|x|^r$$

$$k \leqslant r_o \Rightarrow \lim E\,(x_t^k) = E(x^k)$$

'Απόδειξη: Βλέπε Loëve (1963), σελ. 184.

III. Ἀκολουθίες διανυσματικῶν τυχαίων μεταβλητῶν

Οἱ ὁρισμοί τῆς σύγκλισης πού δόθηκαν στά προηγούμενα τμήματα εἶναι εὔκολο νά ἐπεκταθοῦν καί σέ ἀκολουθίες διανυσματικῶν τυχαίων μεταβλητῶν (δ.τ.μ.) (vector random variable).

Πιό συγκεκριμένα, λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία δ.τ.μ.

$$\{ x_{t.} = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots\ldots, x_{tn}), t = 1,2,\ldots.\} \quad (1.8)$$

συγκλίνει κατά τούς τρόπους (i), (ii) ἤ (iii) στή δ.τ.μ.

$$x' = (x_1, x_2, \ldots\ldots., x_n) \quad (1.9)$$

ἄν γιά κάθε $i = 1,2,\ldots..,n$ ἡ ἀκολουθία τ.μ. $\{x_{ti}, t = 1, 2,\ldots...\}$ συγκλίνει στήν τ.μ. x_i κατά τούς τρόπους (i), (ii) ἤ (iii), ἀντίστοιχα.

Ὁ ὁρισμός (iv) τοῦ τμήματος II, γιά τή σύγκλιση κατά κατανομή, ἰσχύει καί γιά τίς ἀκολουθίες δ.τ.μ., ἀρκεῖ ἡ τ.μ. x στή σχέση (1.7), νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό μιά δ.τ.μ. x'.

Στήν πράξη, ἀντί γιά τόν παραπάνω ὁρισμό, χρησιμοποιοῦμε τήν πιό κάτω Πρόταση:

Πρόταση 8. Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά συγκλίνει κατά κατανομή ἡ ἀκολουθία δ.τ.μ. (1.8) στή δ.τ.μ. (1.9) εἶναι γιά όποιουσδήποτε n πραγματικούς άριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ ή τ.μ.

$$w_t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{ti}$$

νά συγκλίνει κατά κατανομή στήν τ.μ.

$$w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

'Απόδειξη : Γιά τήν άπόδειξη τῆς ἰσοδυναμίας τῶν δύο όρισμῶν βλέπε Rao (1973), σελ. 123.

'Εφαρμόζοντας τούς όρισμούς καί τήν Πρόταση 8 εἶναι εὔκολο νά άποδείξουμε ὅτι οἱ Προτάσεις 1 μέχρι 7 ἰσχύουν καί γιά άκολουθίες δ.τ.μ.

Πρόταση 9 . Ἔστω ἡ άκολουθία δ.τ.μ. (1.8) καί ἡ δ.τ.μ. (1.9) καί g μιά συνεχής συνάρτηση, τέτοια ὥστε $g(x_{t.})$ καί $g(x')$ εἶναι τ.μ.:

(α) Ἄν $x_{t.} \xrightarrow{d} x'$ τότε $g(x_{t.}) \xrightarrow{d} g(x')$

(β) Ἄν $\operatorname{plim} x_{t.} = x'$ τότε $\operatorname{plim} g(x_{t.}) = g(x')$

'Απόδειξη: Γιά τό (α) βλέπε Rao (1973), σελ. 124, καί γιά τό (β) βλέπε Roussas (1973), σελ.151-2.

Θεώρημα τοῦ Slutsky (Slutsky's Theorem). Μετά τήν Πρόταση 9 δίνουμε τό Θεώρημα τοῦ Slutsky τό όποῖο χρησιμοποιεῖται σέ μεγάλη ἔκταση στή Θεωρητική Οἰκονομετρία.
Ἄν $\operatorname{plim} x_{t.} = c'$, ὅπου c' εἶναι ἕνα σταθερό διάνυσμα, καί ἄν g εἶναι μιά ρητή συνάρτηση, τέτοια ὥστε $g(x_{t.})$ καί $g(c')$ ὑπάρχουν τότε:

$$\operatorname{plim} g(x_{t.}) = g(c')$$

'Απόδειξη :Βλ. Cramér (1946),σελ.225 καί Malinvaud (1970), σελ. 319.

Πρόταση 10. Ἄν $x_t \xrightarrow{d} x$ καί plim $y_t = c$ (ὅπου c εἶναι μιά σταθερή), τότε

(i) $(x_t + y_t) \xrightarrow{d} (x + c)$

(ii) $x_t y_t \xrightarrow{d} xc$

(iii) Ἄν $c \neq 0$ καί $\Pr\{y_t \neq 0\} = 1$, $\frac{x_t}{y_t} \xrightarrow{d} \frac{x}{c}$

'Απόδειξη: Βλ. Cramér (1946), σελ. 254 , καί Roussas (1973), σελ. 152.

Θεώρημα τοῦ Cramer (Cramér's Theorem). Μετά τήν Πρόταση 10 δίνουμε τό θεώρημα τοῦ Cramér τό ὁποῖο, ὅπως καί τό θεώρημα τοῦ Slutsky, χρησιμοποιεῖται συχνά στήν Οἰκονομετρία.
Ἔστω $\{ A_t = (a_{tij}), t = 1,2,\ldots.. \}$ μιά ἀκολουθία τυχαίων nxn μητρῶν, $A = (a_{ij})$ μιά σταθερή nxn μήτρα, $x_{t.}'$ καί x , nx1 δ.τ.μ.

Ἄν plim $A_t = A$ καί $x_{t.} \xrightarrow{d} x$, τότε

$$y_{t.} = A_t x_{t.} \xrightarrow{d} y = Ax$$

'Απόδειξη: Ἡ ἀπόδειξη στηρίζεται στήν κατευθεῖαν ἐφαρμογή τῶν Προτάσεων 10 (ii), 9 (α) καί 8.

Πρόταση 11. Ἡ Πρόταση αὐτή χρησιμοποιεῖται, συνήθως, μαζί μέ τό θεώρημα τοῦ Cramér.
Ἄν ἡ nx1 δ.τ.μ. x κατανέμεται σάν N (μ , Σ) καί ἄν $y = b + Bx$, ὅπου b εἶναι ἕνα mx1 σταθερό διάνυσμα, καί

B μιά σταθερή nxn μήτρα, τότε

$$y \sim N\,(b + B\mu,\ B\Sigma B')$$

'Απόδειξη: Βλέπε Dhrymes (1970), σελ. 15 καί Roussas (1973), σελ. 361-2.

IV. Νόμοι τῶν μεγάλων ἀριθμῶν καί κεντρικά ὁριακά θεωρήματα

Σ'αὐτό τό τμῆμα θά ἀσχοληθοῦμε μέ τή σύγκλιση τοῦ μέσου μιᾶς ἀκολουθίας ἀνεξάρτητων τ.μ.

Οἱ **Νόμοι τῶν Μεγάλων 'Αριθμῶν (ΝΜΑ)** (Laws of Large Numbers) ἐξετάζουν τή σύγκλιση σέ μιά σταθερή, ἐνῶ τά **Κεντρικά 'Οριακά Θεωρήματα (ΚΟΘ)** (Central Limit Theorems) ἀναφέρονται στή σύγκλιση σέ μιά κατανομή.

Πρόταση 12. Ἔστω μιά ἀκολουθία **ἀνεξάρτητων** (independent) τ.μ. $\{ x_t,\ t = 1,2,\ldots\ldots \}$ μέ $E(x_t) = \mu_t \neq \pm\infty$ καί $Var(x_t) = \sigma_t^2 < \infty$. 'Ορίζοντας τούς μέσους:

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \quad , \quad \bar{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \mu_t$$

ἔχουμε:

(i) **Θεώρημα** τοῦ Chebychev (Chebychev's Theorem)

$$\text{Ἄν } \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} \sigma_t^2 = 0, \quad \text{τότε} \quad \text{plim}\,(\bar{x}_T - \bar{\mu}_T) = 0$$

(ii) **Θεώρημα** τοῦ Kolmogorov (Kolmogorov's Theorem)

$$\text{Ἄν } \lim_{T\to\infty} \sum_{t=1}^{T} \frac{\sigma_t^2}{t^2} < \infty\ , \quad \text{τότε } \bar{x}_T - \bar{\mu}_T \to 0 \text{ μέ πιθαν. } 1$$

'Απόδειξη: Βλέπε Feller (1957), σελ.238 καί 243 (i καί ii)

Πορίσματα : Ἔστω μιά ἀκολουθία ἀνεξάρτητων καί μέ τήν ἴδια κατανομή (independent and identically distributed) τ.μ. $\{x_t\ , t = 1,2,\ldots.\}$ μέ $E(x_t) = \mu \neq \pm\infty$. Κάτω ἀπό τίς ὑποθέσεις αὐτές,καί σάν Πορίσματα τῆς Πρότασης 12, ἔχουμε τά δύο παρακάτω θεωρήματα:

(i) Θεώρημα τοῦ Khintchine (Khintchine's Theorem)

$$\text{plim}\ \bar{x}_T = \mu$$

(ii) Θεώρημα τοῦ Kolmogorov (Kolmogorov's Theorem)

$$\bar{x}_T \longrightarrow \mu \quad \text{μέ πιθανότητα } 1$$

Ἀποδείξεις: Βλέπε Dhrymes (1970) γιά τό (i) , καί Feller (1957), σελ. 244 γιά τό (ii).

Τά τμήματα (i) τῆς Πρότασης 12 καί τοῦ Πορίσματος πού ἀκολουθεῖ, πού ἀφοροῦν τή σύγκλιση κατά πιθανότητα, ὀνομάζονται Ἀσθενεῖς (Weak) ΝΜΑ, ἐνῶ τά τμήματα (ii)πού ἀφοροῦν τή σύγκλιση μέ πιθανότητα τή μονάδα, ὀνομάζονται Ἰσχυροί (Strong) ΝΜΑ.

Στίς μορφές τοῦ ΚΟΘ πού ἐξετάζουμε στή συνέχεια στό τμῆμα αὐτό παίρνουμε μιά ἀκολουθία ἀνεξάρτητων τ.μ. $\{x_t, t = 1,2,\ldots\}$ μέ σ.κ. $\{F_t,\ t = 1,2,\ldots\ldots\}$ μέ:

$$-\infty < E(x_t) = \mu_t < \infty \quad \text{καί} \quad E(x_t - \mu_t)^2 = \sigma_t^2 < \infty$$

Ἀπό τήν ἀκολουθία αὐτή σχηματίζουμε τήν ἀκολουθία τῶν τυποποιημένων (standardised) τ.μ.

$$z_T = \frac{1}{s_T}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \mu_t), \qquad s_T^2 = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^2$$

καί ἐξετάζουμε κάτω ἀπό ποιές συνθῆκες ἡ ἀκολουθία αὐτή συγκλίνει σέ μιά τ.μ. $z \sim N\ (0,1)$.

Πρόταση 13. (Θεώρημα τῶν Lindeberg-Levy). Ἄν οἱ x_t ἔχουν τήν ἴδια κατανομή, τότε

$$z_T = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \mu) \xrightarrow{d} z \sim N(0,1)$$

Ἀπόδειξη: Βλέπε Dhrymes (1970), σελ. 104.

Πρόταση 14. (Θεώρημα τοῦ Liapounov). Ἄν ὑπάρχει κάποιο $\delta>0$ τέτοιο ὥστε:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{s_T^{2+\delta}} \sum_{t=1}^{T} E|x_t|^{2+\delta} = 0, \text{ τότε } z_T \xrightarrow{d} z \sim N(0,1)$$

Ἀπόδειξη: Βλέπε Loève (1963), σελ. 275-6.

Πρόταση 15. (Θεώρημα τῶν Lindeberg-Feller). Ἡ z_T συγκλίνει κατά κατανομή στή τ.μ. $z \sim N(0,1)$ καί

$$\lim_{T\to\infty} \max_{1\leq t\leq T} \frac{\sigma_t}{s_T} = 0$$

ὅταν καί μόνον ὅταν γιά κάθε $\varepsilon > 0$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{s_T^2} \sum_{t=1}^{T} \int_{|x-\mu_t|>\varepsilon s_T} (x - \mu_t)^2 dF_t = 0$$

Ἀπόδειξη: Βλέπε Loève (1963), σελ. 280-2.

Τά θεωρήματα τῶν Lindeberg-Levy καί Lindeberg-Feller γενικεύονται καί γιά δ.τ.μ.

Πρόταση 16. Ἄν $\{x_{t.}^{\prime},\ t = 1,2,\ldots\ldots\}$ εἶναι μιά ἀκολουθία ἀνεξάρτητων καί μέ τήν ἴδια κατανομή δ.τ.μ. μέ :

$$E(x_{t.}) = \mu\ , \quad Var(x_{t.}) = \Sigma$$

τότε:

$$z_{T.} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} (x_{t.} - \mu') =$$

$$\sqrt{T}(\bar{x}_{T.} - \mu') \xrightarrow{d} z \sim N(o, \Sigma)$$

Ἀπόδειξη: Βλέπε Dhrymes (1970), σελ.107.

Πρόταση 17. Ἔστω μιά ἀκολουθία ἀνεξάρτητων δ.τ.μ. $\{x_{t.}\ ;\ t = 1,2,\ldots\ldots\}$ μέ σ.κ. $\{F_t\ ,\ t = 1,2,\ldots\ldots\}$ καί

$$E(x_{t.}) = o\ ,\ Var(x_{t.}) = \Phi_t,\ t = 1,2,\ldots\ldots$$

Ἄν

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \Phi_t = \Phi < \infty$$

ὅπου Φ εἶναι μιά μή μηδενική μήτρα, καί ἐπιπλέον ἄν

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \int_{|x|>\varepsilon\sqrt{T}} |x|^2 dF_t = 0$$

ὅπου $|x|$ εἶναι τό μῆκος τοῦ διανύσματος x , τότε

$$z_{T.} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} x_{t.} \xrightarrow{d} z' \sim N(o,\Phi)$$

Ἀπόδειξη: Βλέπε Dhrymes (1970), σελ. 108.

Πρόταση 18. Ἔστω $\{x_t,\ t = 1,2,.\}$ μιά ἀκολουθία τ.μ. μέ μέσο μ καί σ.κ.$\{F_t\ ,t = 1,2,\ldots\}$. Ἄν

$$\sup_{t=1,2,\ldots} \int_{|x|>c} |x|\ dF_t \to 0 \text{ γιά } c \to \infty$$

τότε $$\operatorname{plim} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t = \mu$$

Ἀπόδειξη: Βλ.Anderson(1958),σελ.26 & Loève(1963),σελ.278.

V. Συγκλίνουσες ἀκολουθίες ἐκτιμητῶν

Ἔστω μιά ἀκολουθία τ.μ. $\{x_t\ ,\ t = 1,2,\ldots\ldots\}$ μέ σ.κ. $\{F_t\ (x_t;\vartheta),\ t = 1,2,\ldots\ldots\}$ ὅπου ϑ εἶναι τό διάνυσμα τῶν (κοινῶν) παραμέτρων τῶν κατανομῶν.

Ἄν g εἶναι μιά συνάρτηση, τέτοια ὥστε

$$\hat{\vartheta}_T = g(x_1,\ x_2,\ldots\ldots,x_T)$$

νά εἶναι τ.μ., τότε ὁ $\hat{\vartheta}_T$ ὀνομάζεται **ἐκτιμητής** (estimator) τοῦ διανύσματος ϑ γιά δεῖγμα μεγέθους T (βλ. Mood and Graybill,σελ. 160 καί Roussas (1973),σελ. 227)

Ὁ ἐκτιμητής $\hat{\vartheta}_T$ ὀνομάζεται:

(i) **Συνεπής** (Consistent), ἄν

$$\operatorname*{plim}_{T \to \infty} \hat{\vartheta}_T = \vartheta$$

(ii) **Ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος** (Asymptotically unbiased),ἄν

$$\lim_{T\to\infty} E(\hat{\vartheta}_T) = \vartheta$$

Βλέπε Goldberger (1964), ἀλλά καί Theil(1971),σελ.377

Ὅπως εἴδαμε στό τέλος τοῦ Τμήματος I, ἕνας συνεπής ἐκτιμητής δέν εἶναι, ἀναγκαστικά, καί ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος.

Ἀντίθετα (βλέπε καί Πρόταση 3), ἄν

$$\lim_{T\to\infty} E(\hat{\vartheta}_T) = \vartheta \quad \text{καί} \quad \lim_{T\to\infty} Var(\hat{\vartheta}_T) = 0$$

ὁ ἐκτιμητής εἶναι συνεπής καί γιά $T \to \infty$ ὁλόκληρη ἡ μάζα πιθανότητας συγκεντρώνεται στό ϑ, δηλαδή ἡ ὁριακή κατανομή εἶναι ἐκφυλισμένη (μέ μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης 0).

῾Η τελευταία αὐτή παρατήρηση σημαίνει ὅτι, ἄν ἔχουμε δύο ἐκτιμητές γιά τούς ὁποίους ἰσχύουν τά παραπάνω, δέν εἶναι δυνατόν νά συγκρίνουμε τίς ἀσυμπτωτικές τους ἰδιότητες. Αὐτός εἶναι ὁ λόγος γιά τόν ὁποῖο ἐξετάζουμε τήν ἀκολουθία δ.τ.μ.

$$z_T = \sqrt{T}(\hat{\vartheta}_T - \vartheta), \quad T = 1,2,\ldots\ldots$$

ἡ ὁποία, στίς περιπτώσεις πού συνήθως ἐξετάζονται στήν Οἰκονομετρία, συγκλίνει κατά κατανομή σέ μιά μή ἐκφυλισμένη δ.τ.μ. μέ σ.κ. F καί μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης V.

Μέ βάση τά παραπάνω ὁρίζουμε:

(iii) **᾿Ασυμπτωτική κατανομή** (asymptotic distribution) τοῦ $\hat{\vartheta}_T$ τήν ὁριακή κατανομή F τῆς δ.τ.μ. z_T (βλέπε Theil (1971), σελ. 377 καί Mood and Graybill (1965), σελ. 160)

(iv) **᾿Ασυμπτωτική διακύμανση** (asymptotic variance - asy.var) τοῦ $\hat{\vartheta}_T$ τή μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης τοῦ z_T διαιρεμένη μέ T, δηλαδή:

$$\text{asy. var}(\hat{\vartheta}_T) = \frac{1}{T}V$$

(Βλ. Theil (1971), σελ. 378 καί Dhrymes (1970), σελ. 192)

῾Η παραπάνω ὁρολογία (iii) καί (iv) ἔχει ἐπικρατήσει. Προτιμότερο θά ἦταν νά ἀναφέρονται, ἀντίστοιχα, ὡς κατά προσέγγιση ἀσυμπτωτική κατανομή καί ἀσυμπτωτική διακύμανση.

(v) **᾿Ασυμπτωτικά ἀποτελεσματικό** (asymptotically efficient), ἕνα συνεπῆ ἐκτιμητή $\hat{\vartheta}_T$ ἄν, γιά κάθε ἄλλο συνεπῆ ἐκτιμητή ϑ^*_T ἡ μήτρα :

$$D_T = \text{asy. var}(\vartheta^*_T) - \text{asy. var}(\hat{\vartheta}_T)$$

εἶναι θετικά ἡμιορισμένη (βλέπε Goldberger (1964) σελ. 129).

(vi) Ἄριστο ἀσυμπτωτικά κανονικό (best asymptotically normal) ἕνα ἐκτιμητή $\hat{\vartheta}_T$ ἄν

$$\sqrt{T}(\hat{\vartheta}_T - \vartheta) \xrightarrow{d} N(o, V)$$

καί γιά κάθε ἐκτιμητή ϑ_T^*, τέτοιο ὥστε

$$\sqrt{T}(\vartheta_T^* - \vartheta) \xrightarrow{d} N(o, V^*)$$

ἡ μήτρα

$$V^* - V$$

εἶναι θετικά ἡμιορισμένη (βλέπε Mood and Graybill (1965),σελ. 296 καί Dhrymes(1970) , σελ.128)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΛΛΗΛΕΞΑΡΤΗΜΕΝΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Εισαγωγή

Ὅπως ἀναφέραμε καί στόν Πρόλογο, ὁ Τόμος αὐτός εἶναι ἀφιερωμένος στίς μεθόδους ἐκτίμησης τῶν παραμέτρων μιᾶς ἤ ὅλων τῶν ἐξισώσεων ἑνός συστήματος ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων. Τό Κεφάλαιο αὐτό εἶναι μιά γενική εἰσαγωγή σ'αὐτά τα συστήματα.

Παίρνοντας ἕνα ἁπλό μακροοικονομικό ὑπόδειγμα καί χρησιμοποιώντας τά στοιχεῖα τῆς ἀσυμπτωτικῆς θεωρίας πού δώσαμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο, δείχνουμε, πρῶτα, τούς λόγους γιά τούς ὁποίους οἱ ἐκτιμητές ἐλάχιστων τετραγώνων μιᾶς ἐξίσωσης δέν ἔχουν τίς ἐπιθυμητές στατιστικές ἰδιότητες. Ὁ συμβολισμός πού χρησιμοποιεῖται γιά τό ὑπόδειγμα αὐτό εἶναι ἐκεῖνος τῶν συστημάτων ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων. Μέ τόν τρόπο αὐτό ὁ ἀναγνώστης ἔρχεται σέ μιά πρώτη "ἐπαφή" μέ τό ἀντικείμενο τοῦ Τόμου αὐτοῦ.

Τά ὑπόλοιπα τμήματα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ εἶναι ἀφιερωμένα στήν παρουσίαση τῆς γενικῆς μορφῆς ἑνός συστήματος ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων -πρόκειται γιά τό ὑπόδειγμα τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles (Cowles Commission Model) - καί τῶν βασικῶν ὑποθέσεων πού γίνονται γι'αὐτό.

1. Ἡ ἀκαταλληλότητα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων

Τό παράδειγμα πού θά χρησιμοποιήσουμε δίνεται σέ ὅλα σχεδόν τά ἐγχειρίδια Οἰκονομετρίας (βλ. π.χ. Dhrymes (1970), Theil (1971), Johnston (1972), Wallis (1972) κ.ο.κ.). Πρόκειται γιά ἕνα ἁπλό Κεϋνσιανό ὑπόδειγμα μέ μιά ἐξίσωση καί μιά ταυτότητα (identity).

Ἔστω:

y_{t1} = κατανάλωση

y_{t2} = εἰσόδημα

z_{t1} = 1 , γιά κάθε t

z_{t2} = ἐπένδυση

u_{t1} = διαταρακτικός ὅρος

Μέ τό συμβολισμό αὐτό τό ὑπόδειγμα εἶναι:

$$y_{t1} = \gamma_{11} z_{t1} + \beta_{12} y_{t2} + u_{t1} \tag{2.1}$$

$$y_{t2} = y_{t1} + z_{t2} \tag{2.2}$$

Ἄν τώρα θέσουμε

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_{12} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} -\gamma_{11} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

καί

$$\begin{aligned} y_{t.} &= (y_{t1}, y_{t2}), \quad z_{t.} = (z_{t1}, z_{t2}) \quad \text{καί} \\ u_{t.} &= (u_{t1}, 0 \ ) \end{aligned} \tag{2.4}$$

τότε ἡ ἐξίσωση (2.1) καί ἡ ταυτότητα (2.2) γράφονται σάν σύστημα ὡς ἑξῆς:

$$By'_{t.} + \Gamma z'_{t.} = u'_{t.} \qquad (2.5)$$

Οἱ σχέσεις (2.3), (2.4) καί (2.5) εἶναι ἕνα ἁπλό παράδειγμα τοῦ συμβολισμοῦ πού χρησιμοποιεῖται γιά τή γενική μορφή τοῦ ὑποδείγματος τῆς Cowles Commission, τό ὁποῖο θά παρουσιάσουμε στό ἑπόμενο τμῆμα.

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τή (2.1) στή (2.2) καί ἐπιλύσουμε τή σχέση ὡς πρός y_{t2} ἔχουμε :

$$y_{t2} = \frac{\gamma_{11}}{1-\beta_{12}} + \frac{1}{1-\beta_{12}} z_{t2} + \frac{u_{t1}}{1-\beta_{12}} \qquad (2.6)$$

Μιά ἀπό τίς βασικές ὑποθέσεις στίς ὁποῖες στηρίζεται ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων εἶναι ὅτι οἱ ἑρμηνευτικές μεταβλητές εἶναι ἀσυσχέτιστες μέ τούς διαταρακτικούς ὅρους Στήν περίπτωση τῆς ἐξίσωσης (2.1) οἱ ἑρμηνευτικές μεταβλητές εἶναι οἱ $z_{t\cancel{2}}$ καί ἡ y_{t2}. / 1

Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ $z_{t\cancel{2}}$ δίνεται ἔξω ἀπό τό σύστημα καί εἶναι ἀσυσχέτιση μέ τό διαταρακτικό ὅρο u_{t1}.

Ἐπιπλέον ὑποθέτουμε ὅτι:

$$E(u_{t1}) = 0,\ E(u^2_{t1}) = \sigma^2 < \infty$$
$$E(u^4_{t1}) = \sigma^4 < \infty \quad \text{γιά κάθε } t \qquad (2.7)$$

Ἀπό τίς (2.6) καί (2.7) βλέπουμε ὅτι

$$E(u_{t1}y_{t2}) = \frac{\sigma 2}{1-\beta_{12}} \neq 0 \qquad (2.8)$$

Ἄρα ἡ ἑρμηνευτική μεταβλητή y_{t2} τῆς ἐξίσωσης (2.1) δέν εἶναι ἀσυσχέτιστη μέ τό διαταρακτικό ὅρο u_{t1} τῆς ἐξίσωσης αὐτῆς.

Συμβολίζοντας τούς έκτιμητές τῶν παραμέτρων γ_{11} καί β_{12} μέ τά άντίστοιχα λατινικά γράμματα c_{11} καί b_{12} , καί έφαρμόζοντας τή μέθοδο τῶν έλάχιστων τετραγώνων (βλέπε Θεωρητική Οίκονομετρία - I, σελ. 63) στήν έξίσωση (2.1) ἔχουμε:

$$b_{12} = \frac{\Sigma(y_{t1} - \bar{y}_1)(y_{t2} - \bar{y}_2)}{\Sigma(y_{t2} - \bar{y}_2)^2} \qquad (2.9)$$

καί

$$c_{11} = \bar{y}_1 - b_{12}\bar{y}_2 \qquad (2.10)$$

ὅπου τά άθροίσματα εἶναι άπό t=1 μέχρι t=T καί ή ¯ συμβολίζει τόν άριθμητικό μέσο.

Ἄν άντικαταστήσουμε τή

$$\bar{y}_1 = \gamma_{11} + \beta_{12}\bar{y}_2 + \bar{u}_1 \qquad (2.11)$$

στή (2.9), ἔχουμε

$$b_{12} = \beta_{12} + \frac{\Sigma(y_{t2} - \bar{y}_2)(u_{t1} - \bar{u}_1)}{\Sigma(y_{t2} - \bar{y}_2)^2} \qquad (2.12)$$

Άπό τή (2.6) φαίνεται ὅτι ὁ παρανομαστής στή (2.12), εἶναι στοχαστικός καί, κατά συνέπεια, δέν μποροῦμε νά βροῦμε τήν άναμενόμενη τιμή τοῦ b_{12}. Μποροῦμε, ὅμως, νά βροῦμε τό ὅριο πιθανότητας τοῦ b_{12}, έφαρμόζοντας τό θεώρημα τοῦ Slutsky. Τό ὅριο αὐτό πιθανότητας εἶναι:

$$\text{plim}(b_{12}) = \beta_{12} + \frac{\text{plim}\left[\frac{1}{T}\Sigma(y_{t2} - \bar{y}_2)(u_{t1} - \bar{u})\right]}{\text{plim}\left[\frac{1}{T}\Sigma(y_{t2} - \bar{y}_2)^2\right]} \qquad (2.13)$$

Ἄν στήν (2.6) πάρουμε άριθμητικούς μέσους καί τή νέα έξίσωση πού προκύπτει τήν άφαιρέσουμε άπό τήν άρχική έξίσωση (2.6), ἔχουμε:

$$y_{t2} - \bar{y}_2 = \frac{(z_{t2} - \bar{z}_2) + (u_{t1} - \bar{u}_1)}{1 - \beta_{12}}$$

καί ἀντικαθιστώντας τήν παραπάνω σχέση στή (2.13) ἔχουμε:

$$\text{plim}(b_{12}) = \beta_{12} + (1 - \beta_{12})\text{plim}(q) \qquad (2.14)$$

ὅπου:

$$\text{plim}(q) = \frac{\text{plim}\ \frac{1}{T}\Sigma(z_{t2} - \bar{z}_2)(u_{t1} - \bar{u}_1) + \text{plim}\ \frac{1}{T}\Sigma(u_{t1} - \bar{u}_1)^2}{\text{plim}\ \frac{1}{T}\Sigma\left[(z_{t2} - \bar{z}_2) + (u_{t1} - \bar{u}_1)\right]^2}$$

'Από τίς ὑποθέσεις (2.7) καί τήν Πρόταση 12 τοῦ Κεφαλαίου 1 ἔχουμε:

$$\text{plim}(u_{t1} - \bar{u}) = 0 \quad \text{καί} \quad \text{plim}(u_{t1} - \bar{u}_2)^2 = \sigma^2 \qquad (2.15)$$

'Επιπλέον, ἀφοῦ οἱ z_{t2} καί u_{t1} εἶναι ἀσυσχέτιστες

$$\text{plim}\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T}(z_{t2} - \bar{z}_2)(u_{t1} - \bar{u}_1) = 0 \qquad (2.16)$$

Τέλος ὑποθέτοντας ὅτι:

$$\text{plim}\ \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T}(z_{t2} - \bar{z}_2)^2 = \sigma_z^2 < \infty \qquad (2.17)$$

ἀντικαθιστοῦμε τίς (2.15), (2.16) καί (2.17) στή (2.14) καί βρίσκουμε:

$$\text{plim}(b_{12}) = \beta_{12} + \frac{(1 - \beta_{12})\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_z^2} \qquad (2.18)$$

'Από τήν οἰκονομική θεωρία γνωρίζουμε ὅτι ἡ ὁριακή ῥοπή πρός κατανάλωση (β_{12}) εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό μηδέν, ἀλλά μικρότερη ἀπό τή μονάδα. Κατά συνέπεια:

$$\operatorname{plim}(b_{12}) > \beta_{12} \qquad (2.19)$$

δηλαδή ὁ ἐκτιμητής ἐλάχιστων τετραγώνων δέν εἶναι συνεπής. Ἀπό τή (2.19) φαίνεται καθαρά ὅτι ὁ ἐκτιμητής αὐτός εἶναι ἀσυμπτωτικά μεροληπτικός (asymptotically biased) πρός τά ἄνω.

Ἀπό τό ἁπλό αὐτό παράδειγμα φάνηκε καθαρά ἡ ἀκαταλληλότητα τῆς μεθόδου τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων μιᾶς ἐξίσωσης πού ἀνήκει σέ ἕνα σύστημα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων.

Γιά νά βροῦμε ἐκτιμητές πού θά ἔχουν, ἀσυμπτωτικά, ἐπιθυμητές στατιστικές ἰδιότητες, θά πρέπει νά ἐφαρμόσουμε ἄλλες μεθόδους. Μέ τίς μεθόδους αὐτές ἀσχολούμαστε στά ἑπόμενα Κεφάλαια τοῦ Τόμου αὐτοῦ.

ΙΙ Τό ὑπόδειγμα τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles

Τό ὑπόδειγμα τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles, πού προτάθηκε γιά πρώτη φορά ἀπό τούς Koopmans, Rubin and Leipnic (1950) καί Koopmans (1953), δίνεται σέ ὁρισμένα ἐγχειρίδια μέ συμβολισμό διαφορετικό ἀπό ἐκεῖνο πού χρησιμοποιήθηκε ἀπό τούς παραπάνω συγγραφεῖς (παραδείγματα τοῦ διαφορετικοῦ συμβολισμοῦ ὑπάρχουν στά γνωστά ἐγχειρίδια τῶν Goldberger (1964), Theil (1971) καί Johnston (1972)).

Στόν Τόμο αὐτό θά χρησιμοποιήσουμε τόν ἀρχικό συμβολισμό. Ὁ συμβολισμός αὐτός χρησιμοποιεῖται ἀπό ὁρισμένους συγγραφεῖς (βλ. π.χ. Sargan (1964), Hendry (1976)), ἀλλά μέ λατινικά ἀντί γιά ἑλληνικά γράμματα γιά τίς μῆτρες τῶν συντελεστῶν. Ὁ Madansky (1976) δίνει ἕνα κατάλογο ἀντιστοιχιῶν γιά τούς διαφορετικούς αὐτούς συμβολισμούς.

Τό ὑπόδειγμα, στό ὁποῖο ἀναφερόμαστε, καλύπτει T χρονικές περιόδους (π.χ. ἔτη ἤ τρίμηνα) (t = 1,2,.....T) καί ἔχει:

n ἐνδογενεῖς μεταβλητές (endogenous variables)

y_{tj} , j = 1,2,........,n

πού προσπαθοῦμε νά ἑρμηνεύσουμε. Πρόκειται, δηλαδή, γιά τίς μεταβλητές πού ἀλληλοπροσδιορίζονται μέσα στό σύστημα,

m προκαθορισμένες μεταβλητές (predetermined variables)

z_{tk} , k = 1,2,.......,m

στίς ὁποῖες περιλαμβάνονται:

(i) ἐξωγενεῖς μεταβλητές (exogenous variables), δηλαδή μεταβλητές πού προσδιορίζονται ἔξω ἀπό τό σύστημα, καί

(ii) ἐνδογενεῖς μεταβλητές μέ χρονικές ὑστερήσεις (lagged endogenous variables)

Τέλος, τό ὑπόδειγμα ἔχει

n διαταρακτικούς ὅρους (disturbances)

u_{ti} , i = 1,2,.......,n

Ἐφόσον ἔχουμε n ἐνδογενεῖς μεταβλητές, θά ἔχουμε καί n ἐξισώσεις. Ἡ καθεμιά ἀπό τίς ἐξισώσεις αὐτές θά περιλαμβάνει ἕνα ὑποσύνολο τῶν n ἐνδογενῶν καί τῶν m προκαθορισμένων μεταβλητῶν.

Ἐπειδή τό ὑπόδειγμα ἔχει περισσότερες ἀπό μιά ἐξισώσεις, χρειάζεται νά γίνει διάκριση ἀνάμεσα στίς παραμέτρους (parameters) ἤ συντελεστές (coefficients) τῆς καθεμιᾶς ἐξίσωσης.

Συμβολίζουμε μέ:

β_{ij} τό συντελεστή (ἤ παράμετρο) τῆς ἐνδογενοῦς μεταβλητῆς j στήν ἐξίσωση i , καί μέ

γ_{ik} τό συντελεστή (ἤ παράμετρο) τῆς προκαθορισμένης μεταβλητῆς k στήν ἐξίσωση i.

Μέ τό συμβολισμό αὐτό ἡ ἐξίσωση i τοῦ ὑποδείγματος τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles γράφεται:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} y_{tj} + \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ik} z_{tk} = u_{ti}} \tag{2.20}$$

Στήν (2.20) ὁρισμένοι ἀπό τούς συντελεστές β_{ij} καί γ_{ik} μπορεῖ νά εἶναι ἴσοι μέ τό μηδέν.

Ἄν συμβολίσουμε μέ:

$$\beta_{i.} = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \ldots\ldots\ldots, \beta_{in}) \tag{2.21}$$

$$\gamma_{i.} = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \gamma_{im}) \tag{2.22}$$

καί μέ

$$y_{t.} = (y_{t1}, y_{t2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, y_{tn}) \tag{2.23}$$

$$z_{t.} = (z_{t1}, z_{t2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, z_{tm}) \tag{2.24}$$

μποροῦμε νά γράφουμε τή (2.20) ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{y_{t.}\beta'_{i.} + z_{t.}\gamma'_{i.} = u_{ti}} \tag{2.25}$$

Γιά νά γράφουμε ὅλες τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος γιά μιά περίοδο - ὅπως κάναμε στήν ειδική περίπτωση τῆς(2.5) - θά πρέπει νά ὁρίσουμε μῆτρες τῶν συντελεστῶν τῶν n ἐξισώσεων. Οἱ μῆτρες αὐτές εἶναι οἱ:

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{1.} \\ \beta_{2.} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{n.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \beta_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.26)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{1.} \\ \gamma_{2.} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{n.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{nm} \end{bmatrix} \qquad (2.27)$$

Ἐπιπλέον ὁρίζουμε καί τό διάνυσμα τῶν διαταρακτικῶν ὅρων :

$$u_{t.} = (u_{t1}, u_{t2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_{tn}) \qquad (2.28)$$

Χρησιμοποιώντας τίς (2.26), (2.27) καί (2.28), μποροῦμε νά γράψουμε ὅλες τίς ἐξισώσεις τοῦ ὑποδείγματος γιά τήν περίοδο t ὡς ἐξῆς:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{t.}B' + z_{t.}\Gamma' &= u_{t.} \\ \text{ἤ} \quad By'_{t.} + \Gamma z'_{t.} &= u'_{t.} \end{aligned}} \qquad (2.29)$$

Τέλος γιά νά γράψουμε τό ὑπόδειγμα (2.29) γιά ὅλες τίς T περιόδους θά πρέπει νά ὁρίσουμε τίς μῆτρες τῶν παρατηρήσεων (observations) ὅλων τῶν ἐνδογενῶν καί προκαθορισμένων μεταβλητῶν:

$$Y = \begin{bmatrix} y_{1.} \\ y_{2.} \\ y_{3.} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{T.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{T1} & y_{T2} & \cdot & \cdot & \cdot & y_{Tn} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_{1.} \\ z_{2.} \\ z_{3.} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{T.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_{1m} \\ z_{21} & z_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_{2m} \\ z_{31} & z_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{T1} & z_{T2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_{Tm} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

καθώς καί τή μήτρα τῶν διαταρακτικῶν ὅρων

$$U = \begin{bmatrix} u_{1.} \\ u_{2.} \\ u_{3.} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{T.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ u_{31} & u_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{T1} & u_{T2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{Tn} \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Χρησιμοποιώντας τίς (2.30), (2.31) καί (2.32) οἱ T παρατηρήσεις τοῦ ὑποδείγματος (2.29) γράφονται ὡς ἑξῆς:

$$YB' + Z\Gamma' = U$$

ἤ (2.33)

$$BY' + \Gamma Z' = U'$$

Ἡ (2.33) (ἤ ἡ (2.29)) ὀνομάζεται **διαρθρωτική μορφή** (structural form) γιατί περιγράφει τή **δομή (διάρθρωση)** (structure) τοῦ φαινομένου πού μελετᾶμε. Στή μορφή αὐτή, ἀνάμεσα στίς ἑρμηνευτικές μεταβλητές, περιλαμβάνονται καί ἐνδογενεῖς μεταβλητές.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ μήτρα B εἶναι μή ἰδιάζουσα, καί ἄν πολλαπλασιασουμε τή (2.33) - στή δεύτερή της μορφή - ἀπό τά ἀριστερά μέ τήν B^{-1} ἔχουμε:

$$Y' = \Pi Z' + V'$$

ἤ (2.34)

$$Y = Z\Pi' + V$$

ὅπου

$$\Pi = -B^{-1}\Gamma \quad \text{καί} \quad V' = B^{-1}U' \qquad (2.35)$$

Ἐξάλλου ἄν πολλαπλασιασουμε τή (2.29) ἀπό τά ἀριστερά μέ B^{-1} καί χρησιμοποιήσουμε τή (2.35), ἔχουμε

$$y'_{t.} = \Pi z'_{t.} + v'_{t.} \qquad (2.36)$$

ὅπου

$$v_{t.} = B^{-1}u_{t.} \qquad (2.37)$$

Ἡ (2.34) (ἤ ἡ 2.36) ὀνομάζεται **ἀνηγμένη μορφή** (reduced form). Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς αὐτῆς περιέχει μιά μόνο ἐνδογενῆ μεταβλητή, τήν ὁποία ἐξηγεῖ χρησιμοποιώντας μόνο ἐξωγενεῖς μεταβλητές καί διαταρακτικούς ὅρους.

Οἱ (2.29) καί (2.33) μποροῦν νά γραφτοῦν καί μέ ἕνα ἄλλο τρόπο, πιό συνεπτυγμένο, πού, μαζί μέ τούς ἄλλους, χρησιμοποιεῖται στά ἑπόμενα Κεφάλαια τοῦ Τόμου αὐτοῦ.

Ἄν ὁρίσουμε τίς μῆτρες:

$$A = (B \vdots \Gamma) \tag{2.38}$$

$$X = (Y \vdots Z) \tag{2.39}$$

καί τό διάνυσμα

$$x_{t.} = (y_{t.}\ ,\ z_{t.}) \tag{2.40}$$

τότε τό ὑπόδειγμα (2.29) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$x_{t.}A' = u_{t.} \quad \text{ἤ} \quad Ax'_{t.} = u'_{t.} \tag{2.41}$$

Ἐνῶ ἡ (2.33) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$XA' = U \quad \text{ἤ} \quad AX' = U' \tag{2.42}$$

Σέ πολλά ἀπό τά ἑπόμενα Κεφάλαια θά χρειαστεῖ νά χρησιμοποιήσουμε, γιά ὅλες τίς παρατηρήσεις τῆς ἐξίσωσης i, μιά μορφή διαφορετική ἀπό ἐκεῖνες πού δόθηκαν πιό πάνω. Γιά νά γράφουμε τήν ἐξίσωση i μέ τή μορφή αὐτή ὑποθέτουμε ὅτι ἡ i μεταβλητή ὑπάρχει στήν i ἐξίσωση, ὑποθέτουμε, δηλαδή, ὅτι

$$\beta_{ii} \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n.$$

Χωρίς νά χάσουμε πληροφορίες διαιροῦμε τήν ἐξίσωση i μέ τό β_{ii} . Ἡ νέα μορφή τῆς ἐξίσωσης, πού προκύπτει μετά τή διαίρεση αὐτή, ὀνομάζεται τυποποιημένη (normalised).

Ἡ συνθήκη γιά νά ἔχουμε τυποποιημένες ἐξισώσεις εἶναι:

$$\beta_{ii} = 1 , \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n \tag{2.43}$$

δηλαδή ἡ διαγώνιος τῆς μήτρας B εἶναι μονάδες. Ἡ συνθήκη αὐτή ὀνομάζεται κανόνας τυποποίησης (normalisation rule).

Παίρνοντας τήν i τυποποιημένη ἐξίσωση ὑποθέτουμε ὅτι περιέχει n_i ἐνδογενεῖς μεταβλητές (στίς ὁποῖες περιλαμβάνεται καί ἡ y_{ti}) καί m_i προκαθορισμένες μεταβλητές. Ἀνακατατάσσοντας τίς στῆλες τῶν μητρῶν Y καί Z μποροῦμε νά τίς γράφουμε ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} Y &= (y_i \vdots Y_i \vdots Y_i^*) \\ Z &= (Z_i \vdots Z_i^*) \end{aligned} \tag{2.44}$$

ὅπου

$y_i \equiv y_{.i}$ εἶναι τό Tx1 διάνυσμα τῶν παρατηρήσεων τῆς μεταβλητῆς y_{ti},

Y_i ἡ $Tx(n_i-1)$μήτρατῶν παρατηρήσεων τῶν ὑπόλοιπων ἐνδογενῶν μεταβλητῶν πού περιλαμβάνονται στήν ἐξίσωση i,

Y_i^* ἡ $Tx(n - n_i)$ μήτρα τῶν παρατηρήσεων τῶν ἐνδογενῶν μεταβλητῶν πού δέν περιλαμβάνονται στήν ἐξίσωση i

Z_i ἡ Txm_i μήτρα τῶν παρατηρήσεων τῶν προκαθορισμένων μεταβλητῶν πού περιλαμβάνονται στήν ἐξίσωση i, καί,τέλος

Z_i^* ἡ $Tx(m - m_i)$ μήτρα τῶν παρατηρήσεων τῶν προκαθορισμένων μεταβλητῶν πού δέν περιλαμβάνονται στήν ἐξίσωση i.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ i ἐξίσωση τοῦ συστήματος εἶναι τυποποιημένη , μποροῦμε νά γράψουμε ὅλες τίς παρατηρήσεις τῆς ἐξίσωσης i ὡς ἑξῆς:

Σύνολο εξισώσεων : $\underset{n\times n}{Y B'} + \underset{m\times n}{Z\Gamma'} = U$

για κάθε i :

$$\underset{T\times 1}{y_i} = Y_i\beta_i + Z_i\underset{(n_i-1)\times 1}{\gamma_i} + u_i \tag{2.45}$$

ὅπου

$$u_i = u'_{.i} = (u_{1i}, u_{2i}, \ldots\ldots\ldots\ldots, u_{Ti})$$

καί β_i , γ_i εἶναι $(n_i - 1)\mathrm{x}1$ καί $m_i\mathrm{x}1$ διανύσματα,ἀντίστοιχα, τά ὁποῖα ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$\beta_i = (-\beta_{i1}, -\beta_{i2}, \ldots, -\beta_{i(i-1)}, -\beta_{i(i+1)}, \ldots, -\beta_{in_i})$$

$$\gamma_i = (-\gamma_{i1}, -\gamma_{i2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, -\gamma_{im_i})' \tag{2.46}$$

Ἄν θέσουμε

$$X_i = (Y_i \vdots Z_i)$$

$$\alpha'_i = (\beta'_i , \gamma'_i) \tag{2.47}$$

τότε ἡ (2.45) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$y_i = X_i\alpha_i + u_i \tag{2.48}$$

Στό δεξιό μέρος τῶν (2.45) καί (2.48) περιλαμβάνονται:

$$N_i = n_i + m_i - 1$$

ἐνδογενεῖς καί προκαθορισμένες μεταβλητές, πού, πολλές φορές, σέ ἀναλογία μέ τό ὑπόδειγμα μιᾶς ἐξίσωσης, ὀνομάζονται **ἑρμηνευτικές μεταβλητές** (explanatory variables).

III. Οἱ βασικὲς ὑποθέσεις γιὰ τὸ ὑπόδειγμα τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles

Οἱ βασικές ὑποθέσεις γιά τό ὑπόδειγμα τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles δέν ἔχουν ἑνιαία μορφή στά ἄρθρα καί στά ἐγχειρίδια πού ἀσχολοῦνται μέ τό ὑπόδειγμα αὐτό. Οἱ διάφοροι συγγραφεῖς (βλ. π.χ.Mann and Wald (1943), Anderson and Rubin (1950), Koopmans, Rubin and Leipnik (1950),Anderson(1958),σελ.203-14, Goldberger (1964),σελ.299-304, Theil (1971),σελ.484-8 κ.ἄ) μεταχειρίζονται περισσότερο ἤ λιγότερο περιοριστικές ὑποθέσεις, ἀλλά καταλήγουν στίς ἴδιες (ἤ παρόμοιες) ἀσυμπτωτικές ἰδιότητες.

Σκοπός μας στό τμῆμα αὐτό εἶναι νά δώσουμε τίς λιγότερο περιοριστικές ἀπό αὐτές τίς ὑποθέσεις, καθώς καί τίς κύριες ἀσυμπτωτικές ἰδιότητες, κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε νά καλυφθεῖ ὅσο γίνεται μεγαλύτερο μέρος τῆς σχετικῆς βιβλιογραφίας

Οἱ βασικές ὑποθέσεις γιά τό ὑπόδειγμα τῆς Ἐπιτροπῆς Cowles εἶναι οἱ ἑξῆς:

(A) Τό σύστημα εἶναι πλῆρες (complete), δηλαδή ἡ μήτρα B , πού ὁρίζεται μέ τή (2.26), εἶναι μή ἰδιάζουσα.

(B) Τά διανύσματα $u_{t.}$, τῶν διαταρακτικῶν ὅρων τῶν n ἐξισώσεων στήν περίοδο t (πού εἶναι γραμμές τῆς μήτρας U ὅπως φαίνεται ἀπό τίς (2.28) καί (2.32)), εἶναι ἀνεξάρτητες δ.τ.μ. μέ μέσο μηδέν καί (κοινή) μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμνασης Σ , δηλαδή:

$$E(u_{t.}) = o \qquad (2.49)$$

$$E(u_{t.}'u_{s.}) = \delta_{st}\Sigma \quad , s,t = 1,2,\ldots\ldots\ldots$$

ὅπου:

δ_{st} εἶναι τό δέλτα τοῦ Kronecker καί Σ μιά nxn μή ἰδιάζουσα(στήν περίπτωση πού δέν ὑπάρχουν ταυτότητες) ἤ θετικά ἡμιορισμένη (στήν περίπτωση πού ὑπάρχουν ταυτότητες) μήτρα τῆς μορφῆς:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

καί ὅπου

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad i,j = 1,2,\ldots\ldots,n$$

Οἱ (2.49) σημαίνουν ὅτι ὑπάρχει συσχέτιση ἀνάμεσα στούς διαταρακτικούς ὅρους τῶν ἐξισώσεων στήν ἴδια χρονική περίοδο, ὄχι ὅμως καί διαχρονικά, δηλαδή

$$\begin{aligned} &E(u_{ti}) = 0 \\ &E(u_{ti}u_{sj}) = \delta_{ts}\sigma_{ij} \ , \ i,j = 1,\ldots,n \ , \ t,s = 1,2,\ldots,T \end{aligned} \tag{2.50}$$

(Γ) Ἄν F_t εἶναι ἡ συνάρτηση κατανομῆς τοῦ διανύσματος $u_{t.}$ τότε τό τετράγωνο τοῦ μήκους τῶν $u_{t.}$ εἶναι ὁμοιόμορφα ὁλοκληρώσιμο ὡς πρός τίς σ.κ. F_t,t = 1,2,.....,δηλαδή:

$$\sup_{t=1,2\ldots} \int_{|u|>c} |u|^2 dF_t \xrightarrow[c \to \infty]{} 0 \tag{2.51}$$

ὅπου $|u|$ εἶναι τό μῆκος τοῦ διανύσματος u .

(Βλ. Anderson (1958),σελ.23, Dhrymes (1970),σελ.214).

Ἡ συνθήκη(Γ)δέν ἐξασφαλίζεται, στήν πράξη, μόνον ὅταν οἱ σ.κ. F_t γιά $t \to \infty$ τείνουν σέ μιά συνάρτηση πού δέν εἶναι σ.κ. ἤ πού ἔχει ἄπειρη διακύμανση. Συχνά ἡ συνθήκη (Γ) ἀντικαθίσταται ἀπό περισσότερο περιοριστικές συνθῆκες ὅπως εἶναι οἱ παρακάτω:

(Γ΄) Ὑπάρχουν N, ε πραγματικοί θετικοί ἀριθμοί τέτοιοι ὥστε:

$E|u_{ti}|^{2+\varepsilon} < N, i = 1,2,\ldots\ldots$

(Βλ. Anderson (1958),σελ.208)

ἤ

(Γ΄΄) Οἱ τ.μ. $u_{t.}$ ἔχουν τήν ἴδια κατανομή,εἶναι δηλαδή ἀνεξάρτητα τυχαῖα δείγματα ἀπό ἕνα πληθυσμό μέ μέσο τό μηδενικό διάστημα καί μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης Σ (βλ. Theil (1971), σελ.485 καί Goldberger (1964),σελ.300)

Εἶναι εὔκολο νά δειχτεῖ ὅτι οἱ συνθῆκες (Γ΄) ἤ (Γ΄΄) συνεπάγονται τή συνθήκη (Γ).

Γιά τίς προκαθορισμένες μεταβλητές διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(Δ) Στήν περίπτωση πού ἡ μήτρα Z δέν περιλαμβάνει ἐνδογενεῖς μεταβλητές μέ χρονικές ὑστερήσεις, ὑποθέτουμε ὅτι τά στοιχεῖα της εἶναι μή στοχαστικά, ὁμοιόμορφα φραγμένα μέ $r(Z) = m$ καί

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} Z'Z = M \qquad (2.52)$$

ὅπου M μιά θετικά ὁρισμένη μήτρα.

Στήν περίπτωση πού ἡ μήτρα Z περιλαμβάνει καί ἐνδογενεῖς μεταβλητές μέ χρονικές ὑστερήσεις μέχρι g περιόδους, τότε τό ὑπόδειγμα (2.29) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$By'_{t.} + \Gamma_o z'_{ot.} + \sum_{r=1}^{g} \Gamma_r y_{(t-r).} = u_{t.} \qquad (2.53)$$

ὅπου $z_{ot.}$ εἶναι τό διάνυσμα τῶν ἐξωγενῶν μεταβλητῶν καί $y_{(t-r).}$ τό διάνυσμα τῶν ἐνδογενῶν μεταβλητῶν μέ ὑστέρηση r περιόδων. Στήν περίπτωση αὐτή κάνουμε τίς ἑξῆς ὑποθέσεις;

(Δ_1) Ὅλες οἱ gn ρίζες τῆς ἐξίσωσης:

$$\det(B\lambda^g + \sum_{r=1}^{g} \Gamma_r \lambda^{g-r}) = 0 \qquad (2.54)$$

βρίσκονται μέσα στό μοναδιαῖο κύκλο (unit circle) δηλαδή:

$|\lambda_i| < 1$, $i = 1,2,........,gn$

(Δ_2) Ἄν m > gn τότε γιά κάθε r = 1,2,.....,g ἡ (m-gn)x(m-gn) μήτρα πού ἔχει σάν ἀντιπροσωπευτικό στοιχεῖο τό:

$$\frac{1}{T-r} \sum_{t=1}^{T-r} z_{th} z_{(t+r)k} \quad , \quad h,k = 1,2,..,m-gn \qquad (2.55)$$

συγκλίνει σέ μιά σταθερή καί πεπερασμένη μήτρα M_r καί ἡ μήτρα

$$M_o = \text{plim} \frac{1}{T} Z'_o Z_o \qquad (2.56)$$

εἶναι θετικά ὁρισμένη, ὅπου Z_o εἶναι ἡ μήτρα τῶν ἐξωγενῶν μεταβλητῶν.

(Γιά τίς (Δ), (Δ_1) καί (Δ_2) βλέπε Theil (1971), σελ.485-6)

Μέ βάση τά στοιχεῖα τῆς ἀσυμπτωτικῆς θεωρίας,πού δόθηκαν στό Κεφάλαιο 1, μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν οἱ παρακάτω Προτάσεις:

Πρόταση 1. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Α) μέχρι (Δ) (ἤ ἀντί γιά τή (Δ) οἱ (Δ_1), (Δ_2)),τότε

$$\operatorname{plim} \frac{1}{T} \begin{bmatrix} Z' \\ Y' \\ U' \end{bmatrix} |Z \; \vdots \; Y \; \vdots \; U| =$$

$$\begin{bmatrix} M & (-B^{-1}\Gamma M)' & 0 \\ -B^{-1}\Gamma M & B^{-1}(\Gamma M\Gamma' + \Sigma)(B^{-1})' & B^{-1}\Sigma \\ 0 & (B^{-1}\Sigma)' & \Sigma \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

(βλέπε καί Theil (1971),σελ.487).

Πρόταση 2. Ἄν Z_i εἶναι μιά $T\text{x}m_i$ ὑπομήτρα τῆς Z καί ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Δ) (ἤ οἱ (Δ_1),(Δ_2)), τότε:

$$\operatorname{plim}(\tfrac{1}{T}Z_i'Z_i) = M_i \tag{2.58}$$

Ἄν, ἐπιπλέον, ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Β) καί (Γ), τότε

$$\frac{1}{\sqrt{T}} Z_i'u_{.i} \xrightarrow{d} N(o\,, \sigma_{ii}M_i) \tag{2.59}$$

Πρόταση 3. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Β), (Γ) καί (Δ), τότε τό mn διάνυσμα:

$$w_T = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{vec} U'Z = \frac{1}{\sqrt{T}}(I_n \otimes Z') \operatorname{vec} U' =$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\begin{bmatrix} Z' & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & Z' & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & Z' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{.1} \\ u_{.2} \\ . \\ . \\ . \\ u_{.n} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{T}}\begin{bmatrix} Z'u_{.1} \\ Z'u_{.2} \\ . \\ .. \\ . \\ Z'u_{.n} \end{bmatrix} \qquad (2.60)$$

συγκλίνει κατά κατανομή σέ μιά δ.τ.μ.

$$w \sim N(o, \Sigma \otimes M) \qquad (2.61)$$

Ἡ μετάβαση ἀπό τή πρώτη στή δεύτερη μορφή(στήν προηγούμενη σελίδα) τῆς (2.60) στηρίζεται στό ἀποτέλεσμα:

$$\text{vec } ABC = (A \otimes C') \text{ vec } B \qquad (2.62)$$

(Βλέπε καί Γραμμική Ἄλγεβρα, σελ.173. Γιά τήν Πρόταση 3, στό σύνολό της, βλέπε Theil(1971), σελ. 487)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Εἰσαγωγή

Πρίν προχωρήσουμε στίς μεθόδους ἐκτίμησης τῶν παραμέτρων μιᾶς ἤ ὅλων τῶν ἐξισώσεων ἑνός συστήματος ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων, θά ἐξετάσουμε στό Κεφάλαιο αὐτό τό πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης (the identification problem).

'Αφοῦ ἐξηγήσουμε τί εἶναι τό πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης, τόσο μέ ἕνα παράδειγμα ὅσο καί στή γενικότητά του, θά δώσουμε τίς δύο μεθόδους μέ τίς ὁποῖες γίνεται ἡ ἀνάλυσή του.

'Η κλασσική μέθοδος ἀναπτύχθηκε ἱστορικά πρώτη καί δίνεται στά περισσότερα ἐγχειρίδια Οἰκονομετρίας (βλ.π.χ. Johnston (1963), Goldberger (1964), Dhrymes (1970), Theil (1971) κ.ἄ.) 'Η μέθοδος αὐτή, ἐκτός ἀπό τό γεγονός ὅτι ἐμφανίστηκεπρώτη στή βιβλιογραφία, παρουσιάζει καί ἕνα πρόσθετο ἐνδιαφέρον διότι μέ αὐτήν ἀποδείχνονται ὁρισμένες σχέσεις ἀνάμεσα στίς παραμέτρους τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς καί στίς παραμέτρους τῆς ἀνηγμένης μορφῆς, σχέσεις πού εἶναι χρήσιμες στή μελέτη τῶν ἐκτιμητῶν πού θά γίνει στά ἑπόμενα Κεφάλαια τοῦ Τόμου αὐτοῦ. 'Η μέθοδος αὐτή δίνεται στό τρίτο τμῆμα τοῦ Κεφαλαίου.

'Η δεύτερη - καί λιγότερο γνωστή-μέθοδος , πού ἀναπτύχθηκε ἀπό τόν Fisher (1966) (βλ. καί Johnston (1972)), δίνεται στό τέταρτο καί τελευταῖο τμῆμα αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου.

1. Τό πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης μέ ἕνα παράδειγμα

Τό παράδειγμα πού θά χρησιμοποιήσουμε γιά νά ἐξηγήσουμε ποιό εἶναι τό πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης εἶναι ἕνα ἁπλό ὑπόδειγμα προσφορᾶς καί ζήτησης πού πρωτοχρησιμοποιήθηκε γιά τό σκοπό αὐτό ἀπό τόν Working (1927), καί τό ὁποῖο ἐπαναλαμβάνεται στά περισσότερα ἐγχειρίδια Οἰκονομετρίας (βλ.π.χ. Klein (1962),σελ.10, Dhrymes (1970),σελ.289, Theil (1971),σελ.446, Wallis (1972),σελ.47 κ.ἄ.).

Ἔστω:

q_t^s = ἡ ποσότητα ἑνός ἀγαθοῦ πού προσφέρεται στό χρόνο t

q_t^d = ἡ ποσότητα τοῦ ἀγαθοῦ πού ζητιέται στό χρόνο t

p_t = ἡ τιμή τοῦ ἀγαθοῦ στό χρόνο t

u_{t1} = ὁ διαταρακτικός ὅρος τῆς ἐξίσωσης προσφορᾶς (3.1)

u_{t2} = ὁ διαταρακτικός ὅρος τῆς ἐξίσωσης ζήτησης (3.2)

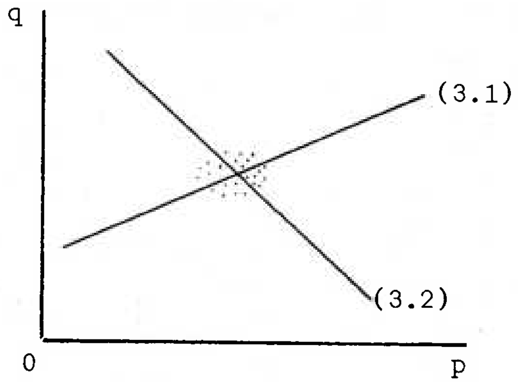
Μέ τό συμβολισμό αὐτό τό ὑπόδειγμα προσφορᾶς καί ζήτησης πού θά χρησιμοποιήσουμε σάν παράδειγμα εἶναι τό ἑξῆς:

$$q_t^s = \gamma_{11} + \beta_{11}p_t + u_{t1} \tag{3.1}$$

$$q_t^d = \gamma_{21} + \beta_{21}p_t + u_{t2} \tag{3.2}$$

$$q_t^s = q_t^d \tag{3.3}$$

Διαγραμματικά τό ὑπόδειγμα αὐτό δίνεται στήν ἑπόμενη σελίδα.



Διάγραμμα 1. Τό υπόδειγμα προσφορᾶς καί ζήτησης (3.1), (3.2) καί (3.3)

Ὁ Working (1927) παρατήρησε ὅτι στό υπόδειγμα πού δείχνεται στό Διάγραμμα 1 οἱ παρατηρήσεις γιά τήν ποσότητα καί τήν τιμή δέν μποροῦν νά μᾶς βοηθήσουν στήν ἀνεύρεση μιᾶς σχέσης πού θά τήν ὀνομάσουμε καμπύλη προσφορᾶς καί μιᾶς σχέσης πού θά τήν ὀνομάσουμε καμπύλη ζήτησης. Αὐτό ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι ὅλες οἱ παρατηρήσεις θά εἶναι διάσπαρτες γύρω ἀπό τό κοινό σημεῖο τῶν δύο εὐθειῶν, ὅπως φαίνεται στό Διάγραμμα 1. Μέ βάση τίς παρατηρήσεις αὐτές εἶναι ἀδύνατο νά ἐκτιμήσουμε τίς (3.1) καί (3.2), ἀφοῦ κάθε ἄλλη εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τό κοινό σημεῖο τῶν δύο εὐθειῶν, ἔχει τήν ἴδια μορφή μέ τίς ἐξισώσεις (3.1) καί (3.2) καί, κατά συνέπεια, δέν μπορεῖ νά διακριθεῖ ἀπό αὐτές.

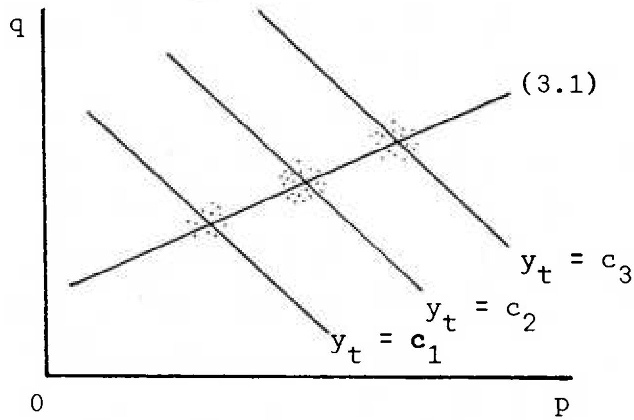
Ἄν, ἀντί γιά τήν (3.2) ἔχουμε μιά ἄλλη συνάρτηση ζήτησης, π.χ. τήν

$$q_t^d = \gamma_{21} + \beta_{21}p_t + \gamma_{22}y_t + u_{t2} \qquad (3.4)$$

ὅπου

y_t = διαθέσιμο εἰσόδημα στό χρόνο t

τότε ἡ ἐξίσωση (3.1) εἶναι δυνατόν νά ἐκτιμηθεῖ. Αὐτό φαίνεται ἀπό τό Διάγραμμα 2:



Διάγραμμα 2. Τό ὑπόδειγμα προσφορᾶς καί ζήτησης (3.1), (3.4) καί (3.3)

Ἀπό τό Διάγραμμα 2 φαίνεται ὅτι ἔχουμε τήν ἴδια ἐξίσωση προσφορᾶς, ἀλλά ἀντί γιά μιά, τρεῖς ἐξισώσεις ζήτησης, ἀνάλογα μέ τό ἐπίπεδο τοῦ εἰσοδήματος. Καθώς τό εἰσόδημα αὐξάνει, ἡ εὐθεία τῆς ζήτησης μετατοπίζεται. Γιά κάθε τιμή τοῦ εἰσοδήματος, οἱ παρατηρήσεις θά εἶναι τυχαῖα διάσπαρτες γύρω ἀπό τό κοινό σημεῖο τῶν εὐθειῶν προσφορᾶς καί ζήτησης. Ἀφοῦ ἔχουμε περισσότερα ἀπό ἕνα τέτοια σημεῖα μποροῦμε, κατ'ἀρχήν, νά ἐκτιμήσουμε τήν ἐξίσωση προσφορᾶς.

Καί στό ὑπόδειγμα ὅμως τοῦ Διαγράμματος 2 ἡ ἐξίσωση ζήτησης συνεχίζει νά παρουσιάζει τή δυσκολία πού παρουσίαζε καί στό Διάγραμμα 1: εἶναι, δηλαδή, ἀδύνατο νά ἐκτιμηθεῖ. Ἡ ἐκτίμηση καί τῆς ἐξίσωσης αὐτῆς μπορεῖ νά καταστεῖ δυνατή ἄν προσθέσουμε μιά νέα ἐξωγενῆ μεταβλητή. Λέμε "μπορεῖ", διότι δέν θά πρέπει νά νομιστεῖ ὅτι μέ τό νά προσθέτουμε νέες μεταβλητές στίς ἐξισώσεις, λύνουμε τό πρόβλημα τῆς ἐκτίμησής τους. Ἄν π.χ. προσθέταμε στήν (3.2) μιά ἐξωγενῆ μεταβλητή πού δέν ἐπηρεάζει τή ζήτηση, τότε ἡ εὐθεία θά παραμείνει ἡ ἴδια γιά τίς διάφορες τιμές τῆς ἐξωγενοῦς αὐτῆς μεταβλητῆς. Στήν περίπτωση αὐτή ἀντί γιά τό Διάγραμμα 2 θά εἴχαμε, πάλι , τό Διάγραμμα 1, ὁπότε ἡ ἐξίσωση προσφορᾶς θά ἦταν καί πάλι ἀδύνατο νά ἐκτιμηθεῖ.

Τό παραπάνω παράδειγμα δείχνει, μέ ἁπλό τρόπο, τό πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης: Στό ἀρχικό ὑπόδειγμα (3.1), (3.2) καί (3.3) οὔτε ἡ ἐξίσωση προσφορᾶς, οὔτε ἡ ἐξίσωση ζήτησης ἦταν δυνατόν νά ταυτοποιηθοῦν. Στό δεύτερο ὑπόδειγμα (3.1), (3.4) καί (3.3), καί ἐφόσον τό διαθέσιμο εἰσόδημα ἐπηρεάζει τή ζήτηση, ἡ ἐξίσωση προσφορᾶς εἶναι δυνατόν νά ταυτοποιηθεῖ, ὄχι ὅμως καί ἡ ἐξίσωση ζήτησης.

Ὅπως θά δοῦμε στά τμήματα III καί IV ἡ τυπική εἰσαγωγή τῆς μεταβλητῆς y_t ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη τάξης. Ἄν, ἐπιπλέον, ἡ νέα αὐτή μεταβλητή ἐπηρεάζει σημαντικά τή ζήτηση, τότε ἱκανοποιεῖται καί ἡ συνθήκη βαθμοῦ.

II. Τὸ πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης στὴ γενικότητά του

Τό πρῶτο βῆμα γιά μιά οἰκονομετρική μελέτη εἶναι ἡ **ἐξειδίκευση** (specification) τοῦ γενικοῦ ὑποδείγματος μέ τό ὁποῖο ἀσχοληθήκαμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο καί γιά τό ὁποῖο, ὅπως εἴδαμε, ἰσχύουν, ἀνάμεσα στά ἄλλα, καί τά ἑξῆς:

$$Ax'_{t.} = By'_{t.} + \Gamma z'_{t.} = u'_{t.}$$

$$E(u_{t.}) = o' \tag{3.5}$$

$$E(u'_{t.}u_{t.}) = \Sigma$$

Ἡ ἐξειδίκευση πετυχαίνεται μέ ἕνα σύνολο ἀπό περιορισμούς πού ἐπιβάλονται στά στοιχεῖα τῶν μητρῶν A καί Σ . Τό σύνολο αὐτό τῶν περιορισμῶν συμβολίζεται μέ:

$$R\ (A,\ \Sigma)$$

καί μπορεῖ νά περιέχει(γιά τίς παραμέτρους):

(i) μηδενικούς περιορισμούς (zero restrictions)

(ii) γραμμικούς περιορισμούς (linear restrictions)

(iii) μή γραμμικούς περιορισμούς (non-linear restrictions) ἤ, τέλος,

(iv) ἀνισότητες (inequalities)

ἀνάμεσα στίς παραμέτρους τοῦ συστήματος.

Στό Κεφάλαιο αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ τά δύο πρῶτα εἴδη τῶν περιορισμῶν, καί αὐτό γιατί ἡ θεωρία γιά τά ὑπόλοιπα μόνο μερικά ἔχει ἀναπτυχθεῖ (βλέπε Fisher (1966), Κεφ.5)

Γιά νά γίνει καταληπτή ἡ ἔννοια τῆς ἐξειδίκευσης μέσα στό πλαίσιο ἑνός συνόλου περιορισμῶν, παίρνουμε τό γενικό ὑπόδειγμα (3.5) γιά τήν περίπτωση τῶν δυο ἐξισώσεων. Τό ὑπόδειγμα αὐτό γράφεται ἀναλυτικά ὡς ἑξῆς:

normalization rule

$$\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{t1}\\ y_{t2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_{t1}\\ z_{t2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_{t1}\\ u_{t2}\end{bmatrix}$$

$$E(u_{t1},\ u_{t2}) = (0,\ 0) \qquad (3.6)$$

$$E\left(\begin{bmatrix}u_{t1}\\ u_{t2}\end{bmatrix}(u_{t1},\ u_{t2})\right) = \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{bmatrix}$$

Ἄν, τώρα, στό ὑπόδειγμα (3.6) ἐπιβάλουμε τούς περιορισμούς:

$$R(A\ ,\ \Sigma) = \begin{cases} \beta_{21} = \gamma_{22} = -1,\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0 \\ \sigma_{21} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0 \\ \beta_{11} = \beta_{22} = 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

τό ὑπόδειγμα (3.6), μέ τούς ὁρισμούς τῶν μεταβλητῶν πού δόθηκαν στό πρῶτο τμῆμα τοῦ Κεφαλαίου 2, ἐξειδικεύεται στίς ἐξισώσεις (2.1) καί (2.2) πού, ὅπως ἀναφέραμε στό τμῆμα ἐκεῖνο, εἶναι ἕνα ἁπλό Κεϋνσιανό ὑπόδειγμα.

Ἡ πρώτη γραμμή τῆς (3.7) εἶναι ἕνα σύνολο περιορισμῶν στίς διαρθρωτικές παραμέτρους, ἡ δεύτερη ἕνα σύνολο περιορισμῶν στίς παραμέτρους τῆς κατανομῆς τῶν διαταρακτικῶν ὅρων καί ἡ τρίτη ἀφορᾶ τούς κανόνες τυποποίησης τῶν δύο ἐξισώσεων.

Ἡ ἐξειδίκευση ἑνός ὑποδείγματος πού ἀναφέρεται σέ ἕνα τμῆμα τῆς οἰκονομίας στηρίζεται, βέβαια, στήν Οἰκονομική θεωρία. Ὅπως, ὅμως, εἴδαμε στό προηγούμενο τμῆμα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ (βλ. τό ὑπόδειγμα (3.1), (3.2) καί (3.3)),ἕνα ὑπόδειγμα μπορεῖ νά περιγράφει σωστά τή λειτουργία ἑνός τμήματος τῆς οἰκονομίας, ἀλλά οἱ ἐξισώσεις του νά μήν εἶναι δυνατόν νά ἐκτιμηθοῦν διότι δέν ὑπάρχουν ἀρκετοί περιορισμοί πού νά τό διακρίνουν ἀπό κάθε ἄλλο ὑπόδειγμα μέ τίς ἴδιες στατιστικές ἰδιότητες. Γιά νά ξεκαθαρίσουμε τό σημεῖο αὐτό,ἄς πολλαπλασιάσουμε τό ὑπόδειγμα ἀπό τά ἀριστερά μέ μιά μή ἰδιάζουσα nxn μήτρα Η. Ἄν θέσουμε:

$$A^* = HA,\quad B^* = HB,\quad \Gamma^* = H\Gamma$$

$$u^{*\prime}_{t.} = Hu^{\prime}_{t.}\ ,\ \Sigma^* = H\Sigma H^{\prime}$$

τότε τό ὑπόδειγμα πού προκύπτει εἶναι τό ἑξῆς:

$$A^*x^{\prime}_{t.} = B^*y^{\prime}_{t.} + \Gamma^*z^{\prime}_{t.} = u^{*\prime}_{t.}\ ,\ E(u^{*\prime}_{t.}u^{*}_{t.}) = \Sigma^* \tag{3.8}$$

$$E(u^{*\prime}_{t.}) = o$$

'Η συνάρτηση πυκνότητας τοῦ $y_{t.}$ στό ὑπόδειγμα (3.5) γιά δεδομένο $z_{t.}$ εἶναι:

$$p(y_{t.}|z_{t.}) = p(u_{t.}|z_{t.})\left|\det\frac{\partial u'_{t.}}{\partial y_{t.}}\right| \qquad (3.9)$$

ὅπου

$$\left|\det\frac{\partial u'_{t.}}{\partial y_{t.}}\right|$$

εἶναι ἡ ἀπόλυτη τιμή τῆς ὀρίζουσας τῆς μήτρας

$$\frac{\partial u'_{t.}}{\partial y_{t.}}$$

(βλέπε Γραμμική Ἄλγεβρα σελ. 161) πού εἶναι ἴση (ὅπως φαίνεται ἀπό τήν παραγώγιση τῆς (3.5)) μέ B . ('Ο τύπος (3.9) εἶναι ὁ τύπος τῆς **ἀλλαγῆς μεταβλητῶν** (change of variables) (βλ. π.χ. Roussas (1973),σελ.168, Hoel (1962),σελ.381, Johnston (1972),σελ.374)

'Αφοῦ τά διανύσματα $u_{t.}$ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπό τά $z_{t.}$ ἡ (3.9) γράφεται:

$$p(y_{t.}|z_{t.}) = p(u_{t.})|\det B| \qquad (3.10)$$

Τά $u_{t.}$,t = 1,2,...... εἶναι ἀνεξάρτητες δ.τ.μ., ἄρα ἡ συνάρτηση πιθανότητας (βλέπε Θεωρητική Οἰκονομετρία-Ι,σελ.68) ἑνός δείγματος $y_{t.}$,t = 1,2,.....,T ἀπό τό ὑπόδειγμα (3.5) θά εἶναι:

$$\mathcal{L} = \prod_{t=1}^{T}(y_{t.}|z_{t.}) = |\det B|^{T}\prod_{t=1}^{T} p(u_{t.}) \qquad (3.11)$$

Κατά ἀνάλογο τρόπο, ἡ συνάρτηση πιθανότητας ἑνός δείγματος $y_{t.}$, t = 1,2,.....,T ἀπό τό ὑπόδειγμα (3.8) θά εἶναι:

$$\mathcal{L}^* = |\det B^*|^T \prod_{t=1}^{T} p(u^*_{t.}) \tag{3.12}$$

'Αλλά (βλέπε Γραμμική Ἄλγεβρα, σελ. 47)

$$|\det B^*| = |\det HB| = |\det H|\,|\det B| \tag{3.13}$$

καί

$$p(u^*_{t.}) = p(u_{t.})\left|\det\frac{\partial u_{t.}}{\partial u^*_{t.}}\right| = p(u_{t.})|\det H|^{-1} \tag{3.14}$$

(Βλέπε Γραμμική Ἄλγεβρα, σελ. 165).

'Αντικαθιστώντας τίς (3.13) καί (3.14) στήν (3.12) ἔχουμε:

$$\mathcal{L}^* = |\det B|^T|\det H|^T|\det H|^{-T} \prod_{t=1}^{T} p(u_{t.}) = \mathcal{L} \tag{3.15}$$

'Η (3.15) σημαίνει ὅτι ἕνα δεδομένο σύνολο παρατηρήσεων θά ἔχει τίς ἴδιες ἀκριβῶς στατιστικές ἰδιότητες, εἴτε ὑποθέσουμε ὅτι προέρχεται ἀπό τό ὑπόδειγμα (3.5), εἴτεἀπό ὁποιοδήποτε ἄλλο ὑπόδειγμα τῆς μορφῆς (3.8). Δέν εἶναι, δηλαδή, δυνατόν νά ἐλέγξουμε ἀπό ποιό ὑπόδειγμα προέρχονται οἱ παρατηρήσεις.

Αὐτό εἶναι τό πρόβλημα τῆς ταυτοποίησης στή γενικότητά του. Ὅπως θά δοῦμε στά ἑπόμενα δύο τμήματα αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, τό πρόβλημα αὐτό ξεπερνιέται μόνο ὅταν ἔχουμε ἐξειδικεύσει τό ὑπόδειγμα κατά τέτοιο τρόπο ὥστε τό σύνολο τῶν **παρατηρησιακά ἰσοδύναμων** (observationally equivalent) ὑποδειγμάτων νά περιορίζεται σέ ἕνα καί μόνο ἕνα ὑπόδειγμα.

III. Ἡ κλασσική μέθοδος ταυτοποίησης

Ἄν Π* εἶναι ἡ μήτρα τῶν παραμέτρων τῆς ἀνηγμένης μορφῆς τοῦ (3.8), τότε

$$Π^* = -B^{*-1}Γ^* = -(HB)^{-1}HΓ = -B^{-1}Γ = Π \tag{3.16}$$

ὅπου Π εἶναι ἡ μήτρα τῶν παραμέτρων τῆς ἀνηγμένης μορφῆς τοῦ (3.5). Κατά συνέπεια ὅλα τά παρατηρησιακά ἰσοδύναμα ὑποδείγματα ἔχουν τήν ἴδια ἀνηγμένη μορφή.

Ἄν μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε κατά μοναδικό τρόπο τίς παραμέτρους τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς τοῦ ὑποδείγματος (3.5) ἀπό τίς παραμέτρους τῆς ἀνηγμένης μορφῆς, τότε κάθε ἄλλο ὑπόδειγμα τῆς μορφῆς (3.8) θά ταυτίζεται μέ τό ὑπόδειγμα (3.5), δηλαδή $H = I$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τό ὑπόδειγμα (3.5) εἶναι **ταυτοποιημένο** (identified). Κατά τόν ἴδιο τρόπο, λέμε ὅτι μιά ἐξίσωση τοῦ συστήματος (3.5) εἶναι ταυτοποιημένη, ἄν οἱ παράμετροι τῆς διαρθρωτικῆς της μορφῆς μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν κατά μοναδικό τρόπο ἀπό τίς παραμέτρους τῆς ἀνηγμένης μορφῆς τοῦ συστήματος (3.5).

Ἡ ταυτοποίηση ἑνός συστήματος (ἤ μιᾶς ἐξίσωσης του) πού ἀφορᾶ τήν ἐξήγηση ἑνός οἰκονομικοῦ φαινομένου πετυχαίνεται, συνήθως, μέ τήν ἐπιβολή μηδενικῶν περιορισμῶν πού προκύπτουν ἀπό τήν Οἰκονομική Θεωρία. Οἱ περιορισμοί αὐτοί, ὅπως ἀναφέρθηκε στό προηγούμενο τμῆμα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ, σημαίνουν ὅτι ὁρισμένα στοιχεῖα τῶν μητρῶν B καί Γ εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν, δηλαδή ὁρισμένες ἀπό τίς ἐνδογενεῖς καί τίς προκαθορισμένες μεταβλητές δέν ἔχουν σχέση μέ ὁρισμένες ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Ἄν στή (2.20) θέσουμε $i=1$, δηλαδή ἄν πάρουμε τήν πρώτη ἐξίσωση, καί ὑποθέσουμε ὅτι οἱ:

$Y_{t.} b'_{n_1} + z_{t.} \gamma'_{m_1} = u_{t1}$

$$\beta_{1j},\ j = 1,2,\ldots\ldots,n_1 \qquad \gamma_{1k},\ k = 1,2,\ldots\ldots,m_1 \qquad (3.17)$$

εἶναι διαφορετικές ἀπό τό μηδέν, ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες

$n_1^* = n - n_1$ ἐνδογενεῖς καί $m_1^* = m - m_1$ προκαθορισμένες

μεταβλητές δέν ἐμφανίζονται στήν πρώτη ἐξίσωση, μποροῦμε νά γράφουμε τήν ἐξίσωση αὐτή ὡς ἑξῆς:

$$y_{t.}\begin{bmatrix}\beta'_{n_1}\\ o'_{n_1^*}\end{bmatrix} + z_{t.}\begin{bmatrix}\gamma'_{m_1}\\ o'_{m_1^*}\end{bmatrix} = u_{t1} \qquad (3.18)$$

ὅπου

$$\beta_{n_1} = (\beta_{11}, \beta_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots,\beta_{1n_1})$$

$$(3.19)$$

$$\gamma_{\cancel{n}_1} = (\gamma_{11}, \gamma_{12},\ldots\ldots\ldots\ldots,\gamma_{1m_1})$$

$/m_1$

καί $o_{n_1^*}$, $o_{m_1^*}$ εἶναι μηδενικά διανύσματα-γραμμές μέ, ἀντίστοιχα, n_1^*, m_1^* ἀριθμό στοιχείων.

Ἀπό τή (2.34) ἔχουμε: $Y' = \Pi Z' + V'$, $B\Pi + B^{-1}\Gamma = 0$, $B\Pi + \Gamma = 0$

$$B\Pi + \Gamma = 0 \qquad (3.20)$$

Ἄν θέσουμε:

$$\Pi = \begin{bmatrix}\Pi_{n_1m_1} & \Pi_{n_1m_1^*}\\ \Pi_{n_1^*m_1} & \Pi_{n_1^*m_1^*}\end{bmatrix} \qquad (3.21)$$

ὅπου ὁ πρῶτος δείχτης στήν κάθε ὑπομήτρα δείχνει τόν ἀριθμό τῶν γραμμῶν της καί ὁ δεύτερος τόν ἀριθμό τῶν στηλῶν της, τότε ἡ (3.20) γιά τίς παραμέτρους τῆς (3.18) εἶναι:

$$(\beta_{n_1}\ ,\ o_{n_1^*})\begin{bmatrix}\Pi_{n_1m_1} & \Pi_{n_1m_1^*}\\ \Pi_{n_1^*m_1} & \Pi_{n_1^*m_1^*}\end{bmatrix} + (\gamma_{m1},\ o_{m_1^*}) = (o_{m_1}, o_{m_1^*}) \quad (3.22)$$

ὅπου o_{m_1} εἶναι ἕνα διάνυσμα-γραμμή μέ m_1 στοιχεῖα.

Τά δύο ὑποσυστήματα ἐξισώσεων πού προκύπτουν ἀπό τήν (3.22) εἶναι τά ἑξῆς:

$$\beta_{n_1}\Pi_{n_1m_1} + \gamma_{m_1} = o_{m_1} \quad (3.23)$$

$$\underset{(1\times n_1)}{\beta_{n_1}}\ \underset{(n_1\times m_1^*)}{\Pi_{n_1m_1^*}} = \underset{(1\times m_1^*)}{o_{m_1^*}} \quad (3.24)$$

n_1 = ἐνδογενεῖς τῆς 1
m_1^* = προκαθ. πού δέν περιλαμβάνονται στη 1

Ἄν

$$\boxed{r(\Pi_{n_1m_1^*}) = n_1 - 1} \quad (3.25)$$

τότε (βλέπε Γραμμική Ἄλγεβρα 87) οἱ μή τετριμμένες λύσεις τοῦ ὁμογενοῦς ὑποσυστήματος (3.24) θά εἶναι πολλαπλάσια μιᾶς λύσης. Ἄν ἐπιπλέον ἐπιβάλουμε τόν κανόνα τυποποίησης

$$\beta_{11} = 1$$

τότε ἡ λύση εἶναι μοναδική, δηλαδή ὑπολογίζουμε τό διάνυσμα β_{n_1} ἀπό τίς παραμέτρους τῆς ἀνηγμένης μορφῆς κατά μοναδικό τρόπο. Ἀντικαθιστώντας τή λύση αὐτή στήν (3.23) ὑπολογίζουμε, ἐπίσης κατά μοναδικό τρόπο, τό διάνυσμα γ_{m_1} . Κατά συνέπεια ἡ πρώτη ἐξίσωση εἶναι ταυτοποιημένη.

Ἀπό τά παραπάνω φαίνεται καθαρά ὅτι ἡ (3.25) εἶναι ἡ **ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη** (necessary and sufficient condition) γιά νά εἶναι ταυτοποιημένη ἡ πρώτη ἐξίσωση. Ὁ τρόπος διατύπωσης τῆς συνθήκης αὐτῆς ἔχει τό μειονέκτημα ὅτι θά πρέπει πρῶτα νά ὑπολογίσουμε τό ὑπόδειγμα στήν ἀνηγμένη του μορφή καί μετά νά έξετάσουμε τό βαθμό τῆς μήτρας $\Pi_{n_1 m_1^*}$. Πιό εὔχρηστος εἶναι ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο διατυπώνεται ἡ συνθήκη αὐτή σέ σχέση μέ τίς παραμέτρους τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς. Ὁ τρόπος αὐτός δίνεται στήν παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 1. Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ ὑποδείγματος (3.5) ταυτοποιημένη, μέ μόνους τούς περιορισμούς ὅτι οἱ:

$n_1^* = n - n_1$ ἐνδογενεῖς καί οἱ $m_1^* = m - m_1$ προκαθορισμένες μεταβλητές δέν περιλαμβάνονται στήν ἐξίσωση αὐτή, εἶναι

$$\boxed{r(A_1^*) = n - 1} \qquad \text{rank condition} \tag{3.26}$$

ὅπου A_1^* εἶναι ἡ $(n - 1)x(n_1^* + m_1^*)$ ὑπομήτρα τῆς μήτρας A πού σχηματίζεται ἄν ἀπαλείψουμε τήν γραμμή 1 καί τίς στῆλες n_1+m_1 πού τό πρῶτο στοιχεῖο τους εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδέν, δηλαδή εἶναι ἡ μήτρα τῶν συντελεστῶν σέ ὅλες τίς ἐξισώσεις, ἐκτός ἀπό τήν πρώτη, τῶν μεταβλητῶν πού δέν περιλαμβάνονται στήν πρώτη ἐξίσωση (βλέπε καί Johnston (1963), σελ.251).

Ἀπόδειξη: Πρῶτα γράφουμε τή μήτρα A ὡς ἑξῆς:

$$A = (B \vdots \Gamma) = \begin{bmatrix} \beta_{n_1} & o_{n_1^*} & \gamma_{m_1} & o_{m_1^*} \\ B_1 & B_1^* & \Gamma_1 & \Gamma_1^* \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Ἐξάλλου ἀπό τήν (3.21) ἔχουμε

$$B^{-1}A = (I \vdots B^{-1}\Gamma) = (I \vdots -\Pi) =$$

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0_{n_1 n_1^*} & -\Pi_{n_1 m_1} & -\Pi_{n_1 m_1^*} \\ 0_{n_1^* n_1} & I_{n_1^*} & -\Pi_{n_1^* m_1} & -\Pi_{n_1^* m_1^*} \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

Ἂν ὁρίσουμε

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0_{n_1^*} & 0_{m_1^*} \\ B_1^* & \Gamma_1^* \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad \bar{\Pi} = \begin{bmatrix} I_{n_1^*} & -\Pi_{n_1^* m_1^*} \\ 0_{m_1^* n_1^*} & -I_{m_1^*} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

τότε ἀπό τήν (3.28) ἔχουμε

$$B^{-1}\bar{A} = \begin{bmatrix} 0_{n_1 n_1^*} & -\Pi_{n_1 m_1^*} \\ I_{n_1^*} & -\Pi_{n_1^* m_1^*} \end{bmatrix}$$

καί

$$B^{-1}\bar{A}\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} 0_{n_1 n_1^*} & \Pi_{n_1 m_1^*} \\ I_{n_1^*} & 0_{n_1^* m_1^*} \end{bmatrix}$$

Κατά συνέπεια

$$r(B^{-1}\bar{A}\bar{\Pi}) = r(\Pi_{n_1 m_1^*}) + n_1^* \tag{3.30}$$

καί ἀφοῦ οἱ μῆτρες B^{-1} καί $\bar{\Pi}$ εἶναι μή ἰδιάζουσες

$$r(B^{-1}\bar{A}\bar{\Pi}) = r(\bar{A}) = r(B_1^* \,\vdots\, \Gamma_1^*) = r(A_1^*) \tag{3.31}$$

ὅπου

$$A_1^* = (B_1^* \,\vdots\, \Gamma_1^*)$$

Ἀπό τίς (3.30) καί (3.31) ἔχουμε:

$$r(A_1^*) = r(\Pi_{n_1 m_1^*}) + n_1^* \tag{3.32}$$

Ὅπως γνωρίζουμε, γιά νά εἶναι ταυτοποιημένη ἡ πρώτη ἐξίσωση θά πρέπει νά ἰσχύει ἡ συνθήκη (3.25). Κατά συνέπεια ἡ πρώτη ἐξίσωση εἶναι ταυτοποιημένη ὅταν καί μόνο ὅταν:

$$r(A_1^*) = n_1 - 1 + n_1^* = n_1 - 1 + n - n_1 = n - 1$$

Πόρισμα. 'Αναγκαία συνθήκη (necessary condition) γιά νά εἶναι ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ ὑποδείγματος ταυτοποιημένη μέ τούς περιορισμούς πού ἀναφέρονται στήν Πρόταση 1 εἶναι

$$m_1^* \geqslant n_1 - 1 \quad \text{(order condition)} \tag{3.33}$$

δηλαδή ὁ ἀριθμός τῶν προκαθορισμένων μεταβλητῶν πού δέν περιλαμβάνονται στήν πρώτη ἐξίσωση νά εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν ἐνδογενῶν μεταβλητῶν πού περιλαμβάνονται σ'αὐτή. μείον 1 $r(A_1^*) = n-1$

'Απόδειξη: 'Αφοῦ ἡ μήτρα A_1^* εἶναι $(n - 1)x(n_1^* + m_1^*)$, γιά νά ἰσχύει ἡ (3.26) θά πρέπει

$$n_1^* + m_1^* = n - n_1 + m_1^* \geqslant n - 1$$

ἤ

$$\boxed{m_1^* \geqslant n_1 - 1 .}$$

'Η συνθήκη (3.33) λέγεται **συνθήκη τάξης** (order condition) ἐνῶ ἡ συνθήκη (3.26) λέγεται **συνθήκη βαθμοῦ** (rank condition).

"Αν ἰσχύει ἡ συνθήκη βαθμοῦ (δηλ. ἡ (3.26) ἤ ἡ (3.25))καί

$m_1^* > n_1 - 1$ ἡ πρώτη ἐξίσωση εἶναι **ὑπερταυτοποιημένη** (overidentified)

$m_1^* = n_1 - 1$ ἡ πρώτη ἐξίσωση εἶναι **ἀκριβῶς ταυτοποιημένη** (just identified)

'Ενῶ ἄν

$m_1^* \geqslant n_1 - 1$ ἀλλα $r(\Pi_{n_1 m_1^*}) < n_1 - 1$

ἤ ἄν

$m_1^* < n_1 - 1$ ἡ πρώτη ἐξίσωση εἶναι **ὑποταυτοποιημένη** (underidentified).

(Σχετικά βλέπε καί Kmenta (1971), σελ. 544).

Παίρνοντας τό υπόδειγμα (3.1), (3.4) καί (3.3) καί θετοντας:

$$y_{t1} \equiv q_t^s = q_t^d$$

$$y_{t2} \equiv p_t$$

$$z_{t1} \equiv 1 \text{ γιά κάθε } t$$

$$z_{t2} \equiv y_t$$

παρατηροῦμε ὅτι ὁ περιορισμός πού ἐξειδικεύει, στήν περίπτωση αὐτή τό γενικό υπόδειγμα (3.6) εἶναι:

$$\gamma_{12} = 0$$

Ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ υποδείγματος αὐτοῦ ἔχει

$n_1 = 2$ καί $m_1^* = 1$

ἄρα

$$m_1^* = n_1 - 1 = 1$$

Ἐπιπλέον

$$A_1^* = \gamma_{22}$$

Κατά συνέπεια, ἄν $\gamma_{22} \neq 0$, ἡ πρώτη ἐξίσωση (προσφορᾶς) εἶναι ταυτοποιημένη.

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση (ζήτησης) ἔχει

$n_2 = 2$ καί $m_2 = 0$

ἄρα

$$m_2^* < n_2 - 1$$

καί, κατά συνέπεια, ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι υποταυτοποιημένη.

IV. Ἡ μέθοδος τοῦ Fisher

Ὅπως ἀναφέραμε καί στήν Εἰσαγωγή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου ἡ μέθοδος τοῦ Fisher ἀναπτύχθηκε μετά τήν κλασσική. Ἡ μέθοδος αὐτή χρησιμοποιεῖ ἕνα ὁρισμό τῆς ταυτοποίησης κατά πολύ γενικότερο ἀπό ἐκεῖνο πού δόθηκε στό προηγούμενο τμῆμα. Ὁ ὁρισμός αὐτός μᾶς ἐπιτρέπει νά χρησιμοποιήσουμε πολλά εἴδη περιορισμῶν γιά τήν ταυτοποίηση ἑνός ὑποδείγματος. Σύμφωνα μέ τή μέθοδο αὐτή:

(α) Ταυτοποιημένο ὀνομάζεται ἕνα ὑπόδειγμα τῆς μορφῆς (3.5) ἄν εἶναι ἐξειδικευμένο μέ ἕνα σύνολο περιορισμῶν $R(A,\Sigma)$ τέτοιο ὥστε, γιά κάθε ὑπόδειγμα τῆς μορφῆς (3.8)

$$R(A^*, \Sigma^*) \Longrightarrow H = I \qquad (3.34)$$

(β) Ταυτοποιημένη ὀνομάζεται ἡ ἐξίσωση τοῦ ὑποδείγματος (3.5), ἄν γιά κάθε ἄλλο ὑπόδειγμα τῆς μορφῆς (3.8)

$$R(A^*, \Sigma^*) \Longrightarrow h_{i.} = e_{i.} \qquad (3.35)$$

ὅπου $h_{i.}$ εἶναι ἡ i γραμμή τῆς μήτρας H καί $e_{i.}$ ἡ i γραμμή τῆς ταυτοτικῆς μήτρας I_n.

Ἔστω ὅτι ἡ ἐξίσωση i τοῦ ὑποδείγματος (3.5) ἐξειδικεύεται μέ r_i γραμμικούς καί μηδενικούς περιορισμούς στίς διαρθρωτικές παραμέτρους της, στούς ὁποίους περιλαμβάνεται καί ὁ κανόνας τυποποίησης.

Συμβολίζουμε τούς περιορισμούς μέ τήν ἐξίσωση:

$$\Phi_i \alpha_{i.}' = \varphi_i \qquad (3.36)$$

ὅπου

Φ_i μιά $r_i x(n + m)$ μήτρα μέ πρώτη γραμμή τό διάνυσμα $e_{i.}$

$\alpha_{i.}$ ἡ i γραμμή τῆς μήτρας A

καί

φ_i ἕνα r_ix1 διάνυσμα μέ πρῶτο στοιχεῖο τή μονάδα.

Ἄν σάν παράδειγμα πάρουμε τήν πρώτη ἐξίσωση τοῦ ὑποδείγματος στό ὁποῖο ἀναφερθήκαμε στό τέλος τοῦ προηγούμενου τμήματος αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, γιά τήν ὁποία ἰσχύουν οἱ περιορισμοί:

$\beta_{11} = 1$ (ὁ κανόνας τυποποίησης), καί

$\gamma_{12} = 0$

θά ἔχουμε, ὅπως εὔκολα μπορεῖ νά ἐλέγξει ὁ ἀναγνώστης:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{καί} \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πρόταση 2. Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ταυτοποιημένη ἡ ἐξίσωση i τοῦ ὑποδείγματος (3.5) μέ τούς περιορισμούς (3.36) εἶναι:

$$r(\Phi_i A') = n \tag{3.37}$$

Ἀπόδειξη: Οἱ περιορισμοί (3.36) μποροῦν νά γραφτοῦν καί ὡς ἑξῆς:

$$\Phi_i \alpha'_{i.} = \Phi_i A' e_{i.} = \varphi_i \tag{3.38}$$

Οἱ ἴδιοι περιορισμοί γιά τήν ἐξίσωση i τοῦ ὑποδείγματος (3.8) εἶναι:

$$\Phi_i \alpha^{*\prime}_{i.} = \Phi_i A^{*\prime} e_{i.} = \Phi_i A' H' e_{i.} = \Phi_i A' h'_{i.} \tag{3.39}$$

Ἀφαιρώντας τήν (3.38) ἀπό τήν (3.39) ἔχουμε:

$$\Phi_i A'(h'_{i.} - e'_{i.}) = o \tag{3.40}$$

Ἡ (3.40) εἶναι ἕνα ὁμογενές σύστημα μέ n ἀγνώστους καί ἄν

(Βλέπε Γραμμική Ἄλγεβρα, σελ. 85):

$$r(\Phi_i A') = n$$

τότε ἔχει μόνο τετριμμένες λύσεις. Στήν περίπτωση αὐτή:

$$h'_{i.} - e'_{i.} = o \text{ ἤ } h_{i.} = e_{i.}$$

δηλαδή ἡ ἐξίσωση εἶναι ταυτοποιημένη.

Πόρισμα. Ἀναγκαία συνθήκη γιά νά εἶναι μιά ἐξίσωση ταυτοποιημένη μέ περιορισμούς τῆς μορφῆς (3.36) εἶναι

$$r_i \geqslant n$$

δηλαδή ὁ ἀριθμός τῶν περιορισμῶν νά εἶναι τουλάχιστον ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν ἐνδογενῶν μεταβλητῶν τοῦ συστήματος.

Οἱ γραμμικοί περιορισμοί στίς διαρθρωτικές παραμέτρους ἑνός συστήματος δέν εἶναι ἀπαραίτητο νά ἔχουν τή μορφή (3.36), ἀλλά μπορεῖ νά περιλαμβάνουν παραμέτρους ἀπό περισσότερες ἀπό μιά ἐξισώσεις.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι τό ὑπόδειγμα (3.5) στό σύνολό του ἐξειδικεύεται μέ r μηδενικούς καί γραμμικούς περιορισμούς - στούς ὁποίους περιλαμβάνονται καί οἱ κανόνες τυποποίησης - τότε συμβολίζουμε τούς περιορισμούς αὐτούς μέ

$$\Phi \text{ vec } A = \varphi \tag{3.41}$$

ὅπου

Φ εἶναι μιά $rx[n(n + m)]$ μήτρα καί

φ ἕνα rx1 διάνυσμα.

Μέ τό συμβολισμό αὐτό καί κατά τρόπο ἀνάλογο μέ ἐκεῖνο τῆς Πρότασης 2 μποροῦμε νά ἀποδείξουμε καί τήν παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 3. Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ταυτοποιημένο ὁλόκληρο τό σύστημα (3.5) μέ τούς περιορισμούς (3.41) εἶναι:

$$r\left[\Phi\left(I_n \otimes A'\right)\right] = n^2 \tag{3.42}$$

Ἄν σέ ἕνα σύστημα ὑπάρχουν ταυτότητες (ὅπως, π.χ. ἡ (3.3) στό σύστημα τοῦ τμήματος I αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου), καί ἐφόσον οἱ τιμές τῶν παραμέτρων τῶν ταυτοτήτων εἶναι γνωστές,δέν ἔχουμε προβλήματα ἐκτίμησης ἤ ταυτοποίησης γιά τίς ταυτότητες.

Πρόβλημα παρουσιάζεται στήν περίπτωση πού θέλουμε νά ἐξετάσουμε ἄν μιά ἐξίσωση ἑνός συστήματος, στό ὁποῖο περιλαμβάνεται π.χ. καί μιά ταυτότητα, εἶναι ταυτοποιημένη. Ἡ ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ μπορεῖ νά γίνει μέ τρεῖς τρόπους:

(i) Λύνουμε τήν ταυτότητα ὡς μιά ἐνδογενῆ μεταβλητή καί ἀντικαθιστοῦμε στίς ἄλλες ἐξισώσεις, μειώνοντας μ'αὐτό τόν τρόπο τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος κατά μία. Ἄν μιά ἐξίσωση τοῦ νέου συστήματος εἶναι ταυτοποιημένη, τότε καί ἡ ἀντίστοιχη ἐξίσωση τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος εἶναι ταυτοποιημένη.

(ii) Ἄν οἱ περιορισμοί τοῦ συστήματος μποροῦν νά γραφτοῦν στή μορφή (3.36), τότε ἐκφράζουμε τίς τιμές τῶν παραμέτρων τῆς ταυτότητας σάν περιορισμό, ὅπως κάνουμε στήν περίπτωση τῶν περιορισμῶν (3.7) καί ἐφαρμόζουμε τήν Πρόταση 2 αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου. Τέλος,

(iii) Ἄν οἱ μόνοι περιορισμοί στίς μή ταυτοτικές ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ἡ ἐξαίρεση ὁρισμένων μεταβλητῶν ἀπό κάθε ἐξίσωση, τότε γράφουμε τή μήτρα A ἀντικαθιστώντας τίςπαραμέτρους τῆς ταυτότητας μέ τίς ἀριθμητικές τους τιμές καί ἐφαρμόζουμε τήν Πρόταση 1 αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου.

Μέ ἀνάλογους τρόπους μπορεῖ νά ἀντιμετωπιστεῖ ἡ περίπτωση ὕπαρξης περισσότερων ἀπό μιᾶς ταυτοτήτων στό σύστημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Εἰσαγωγή

Στό Κεφάλαιο αὐτό γίνεται ἡ ἀνάπτυξη τῶν κλασσικῶν μεθόδων ἐκτίμησης τῶν παραμέτρων μιᾶς ταυτοποιημένης ἐξίσωσης ἑνός συστήματος ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς πού ἀναλύσαμε στά προηγούμενα Κεφάλαια.

Οἱ μέθοδοι πού ἀναπτύσσονται στά τέσσερα πρῶτα τμήματα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ εἶναι:

ILS 'Η ἔμμεση μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων,

2SLS ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια, καί

ἡ μέθοδος τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν.

Στό πέμπτο τμῆμα τοῦ Κεφαλαίου γίνεται μιά σύγκριση τῶν τριῶν αὐτῶν μεθόδων μεταξύ τους, καθώς καί μέ τήν ἁπλή μέθοδο τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων πού ἔχει ἀναπτυχθεῖ ἀναλυτικά στή Θεωρητική Οἰκονομετρία - Ι.

Στό τελευταῖο τμῆμα τοῦ Κεφαλαίου γίνεται μιά σύντομη ἐπισκόπηση ἄλλων μεθόδων ἐκτίμησης μιᾶς ἐξίσωσης ἑνός συστήματος. 'Ανάμεσα στίς ἐπισκοπούμενες μεθόδους δέν περιλαμβάνεται ἡ μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες. Μέ τή μέθοδο αὐτή θά ἀσχοληθοῦμε στό ἕκτο Κεφάλαιο τοῦ Τόμου αὐτοῦ.

1.Η έμμεση μέθοδος τών ελάχιστων τετραγώνων

Τό παράδειγμα πού δώσαμε στήν άρχή τοῦ Κεφαλαίου 2 γιά νά δείξουμε τήν άκαταλληλότητα τῆς άπλῆς μεθόδου τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων (ΑΜΕΤ) (Ordinary Least Squares), μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ σέ μιά πρώτη εἰσαγωγή στήν ἔμμεση μέθοδο τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων (ΕΜΕΤ) (Indirect Least Squares)

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τήν ταυτότητα (2.2) στήν ἐξίσωση (2.1) καί λύσουμε ὡς πρός y_{t1} ἔχουμε:

$$y_{t1} = \frac{\gamma_{11}}{1 - \beta_{12}} + \frac{\beta_{12}}{1 - \beta_{12}} z_{t2} + u_{t1} \tag{4.1}$$

Ἄν θέσουμε:

$$\pi_{11} = \frac{\gamma_{11}}{1 - \beta_{12}} \quad , \quad \pi_{12} = \frac{\beta_{12}}{1 - \beta_{12}} \tag{4.2}$$

Ἀντικαθιστώντας τίς (4.2) στήν (4.1) ἔχουμε:

$$y_{t1} = \pi_{11} + \pi_{12} z_{t2} + u_{t1} \tag{4.3}$$

Ἀφοῦ, ὅπως ἀναφέραμε στό Κεφάλαιο 2, ἡ z_{t2} θεωρεῖται ἐξωγενής, δηλαδή εἶναι ἀσυσχέτιση μέ τόν διαταρακτικό ὅρο, μπορουμε νά βροῦμε ἕνα Ἄριστο Γραμμικό Ἀμερόληπτο Ἐκτιμητή (ΑΓΑΕ) τῶν π_{11} καί π_{12} ἐφαρμόζοντας τήν ΑΜΕΤ, πού δίνει:

$$p_{12} = \frac{\Sigma(z_{t2} - \bar{z}_2)(y_{t1} - \bar{y}_1)}{\Sigma(z_{t2} - \bar{z}_2)^2} \quad , \quad p_{11} = \bar{y}_1 - p_{12}\bar{z}_2 \tag{4.4}$$

Ὅπου p_{12} καί p_{11} οἱ ἐκτιμητές τῶν παραμέτρων π_{12} καί π_{22} μέ τήν ΑΜΕΤ.

Ἂν ἀντικαταστήσουμε τήν (4.4) στήν (4.2) βρίσκουμε:

$$b_{12} = \frac{p_{12}}{1 + p_{12}} \quad , \quad c_{11} = \frac{p_{11}p_{12}}{1 + p_{12}} \tag{4.5}$$

ὅπου b_{12} καί c_{11} εἶναι οἱ ἐκτιμητές τῶν β_{12} καί γ_{11} μέ τήν ΕΜΕΤ.

Ἂν καί τό θεώρημα τῶν Gauss-Markov (βλέπε Θεωρητική Οἰκονομετρία - Ι,σελ. 47) μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι οἱ (4.4) εἶναι ΑΓΑΕ τῶν (4.2), δέν μποροῦμε νά ποῦμε τό ἴδιο γιά τούς (4.5) σέ σχέση μέ τίς παραμέτρους β_{12} καί γ_{11}, ἀφοῦ τόσο ὁ ἀριθμητής ὅσο καί ὁ παρανομαστής στίς (4.5) εἶναι τυχαῖες μεταβλητές, καί, κατά συνέπεια, δέν μποροῦμε νά βροῦμε τήν ἀναμενόμενη τιμή τῶν b_{12} καί c_{11}.

Ἂν πάρουμε τόν b_{12} ἀπό τήν (4.5) καί κάνουμε τίς ἀναγκαῖες ἀντικαταστάσεις ἀπό τήν (4.4) βρίσκουμε:

$$b_{12} = \frac{\Sigma(y_{t1} - \bar{y}_1)(z_{t2} - \bar{z}_2)}{\Sigma(z_{t2} - \bar{z}_2)^2 + \Sigma(y_{t1} - \bar{y}_1)(z_{t2} - \bar{z}_2)} \tag{4.6}$$

Παίρνοντας τό μέσο τῆς (4.1) καί ἀφαιρώντας τήν ἐξίσωση πού προκύπτει ἀπό τήν (4.1) ἔχουμε:

$$(y_{t1} - \bar{y}_1) = \frac{\beta_{12}}{1 - \beta_{12}}(z_{t2} - \bar{z}_2) + (u_{t1} - \bar{u}_1) \tag{4.7}$$

Ἀντικαθιστώντας τήν (4.7) στήν (4.6) ἔχουμε:

$$b_{12} = \frac{\beta_{12}\Sigma(z_{t2} - \bar{z}_2)^2 + (1 - \beta_{12})\Sigma(u_{t1} - \bar{u}_1)(z_{t2} - z_2)}{\Sigma(z_{t2} - \bar{z}_2)^2 + (1 - \beta_{12})\Sigma(u_{t1} - \bar{u}_1)(z_{t2} - \bar{z}_2)} \tag{4.8}$$

Ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ τμήματος Ι τοῦ Κεφαλαίου 2 τά ἀθροίσματα στίς (4,4), (4.6), (4.7) καί (4.8) εἶναι ἀπό t=1 μέχρι t=T.

Διαιροῦμε ἀριθμητή καί παρανομαστή τῆς (4.8) διά T καί παίρνουμε τά ὅρια πιθανότητας. 'Από τό Θεώρημα τοῦ Slutsky (βλ. Κεφάλαιο 1) καί τίς (2.15) καί (2.16) βρίσκουμε ὅτι:

$$\text{plim } b_{12} = \frac{\beta_{12}\sigma_z^2 + (1-\beta_{12}).0}{\sigma_z^2 + (1-\beta_{12}).0} = \beta_{12} \tag{4.9}$$

δηλαδή ὁ ἐκτιμητής τῆς β_{12} μέ τήν ΕΜΕΤ εἶναι συνεπής.

Στή γενική περίπτωση παίρνουμε τήν ἀνηγμένη μορφή (2.34) τοῦ συστήματος καί ὑπολογίζουμε τόν ἐκτιμητή τῆς μήτρας Π΄μέ τήν ΑΜΕΤ, πού εἶναι (βλ. Θεωρητική Οἰκονομετρία - Ι, σελ.45):

$$P' = (Z'Z)^{-1}Z'Y \tag{4.10}$$

Ὅπως εἴδαμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο ἡ ἐξειδίκευση τοῦ ὑποδείγματος (2.33) σημαίνει τήν ἐπιβολή ὁρισμένων περιορισμῶν καί στίς μῆτρες Β καί Γ. Κατά συνέπεια καί ἡ μήτρα $\Pi = -B^{-1}\Gamma$ ὑπόκειται σέ περιορισμούς, ἐκτός ἄν ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένες(βλέπε Rowley (1973), σελ. 140). Ἄν καί ὁ ἐκτιμητής (4.10) δέν παίρνει ὑπόψη του τούς περιορισμούς αὐτούς, ἐν τούτοις ἔχει ὁρισμένες στατιστικά ἐπιθυμητές ἰδιότητες, ὅπως ἀποδείχνουμε στήν Πρόταση 1.

Πρόταση 1. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Α), (Β), (Γ) καί (Δ_1, Δ_2) (βλέπε τμῆμα ΙΙΙ τοῦ Κεφαλαίου 2), ὁ ἐκτιμητής (4.10) εἶναι συνεπής. Ἄν ἀντί γιά τίς (Δ_1, Δ_2) ἰσχύει ἡ (Δ), τότε ὁ (4.10) εἶναι καί ἀμερόληπτος ἐκτιμητής τῆς μήτρας Π΄.

'Απόδειξη: Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς (2.34) καί (2.35) στήν (4.10) ἔχουμε

$$P' = \Pi' + (Z'Z)^{-1}(Z'U)(B^{-1})' \tag{4.11}$$

῎Αν ἰσχύει ἡ συνθήκη (Δ) τότε τά στοιχεῖα τῆς μήτρας Z δέν εἶναι στοχαστικά. Κατά συνέπεια

$$E(P') = \Pi' + (Z'Z)^{-1}Z'E(U)(B^{-1}) \;=\; \Pi' \qquad (4.12)$$

δηλαδή ὁ ἐκτιμητής P΄εἶναι ἀμερόληπτος.

῎Αν ἰσχύουν οἱ (Δ_1), (Δ_2), τότε γράφουμε τήν (4.11) ὡς ἑξῆς:

$$P' = \Pi' + (\tfrac{1}{T}\, Z'Z)^{-1}(\tfrac{1}{T}\, Z'U)(B^{-1})'$$

ὁπότε

$$\text{plim}\; P' = \;\Pi' + \;M^{-1}0(B^{-1})' = \;\Pi' \qquad (4.13)$$

δηλαδή ὁ ἐκτιμητής P΄εἶναι συνεπής.

Πρίν προχωρήσουμε, ὁρίζουμε ὁρισμένες ὑπομῆτρες τῶν μητρῶν Π καί P , πού θά μᾶς χρειαστοῦν στή συνέχεια. ῞Οπως καί στό προηγούμενο Κεφάλαιο, γιά νά διευκολύνουμε τήν παρουσίαση, παίρνουμε i = 1 , δηλαδή τήν πρώτη ἐξίσωση ἑνός συστήματος, καί ὑποθέτουμε ὅτι,μέ τό συμβολισμό (2.44),γράφεται στή μορφή (2.45). Μέ τόν ἴδιο συμβολισμό ἡ (2.34) γράφεται: $Y = \Pi Z + U$

$$\begin{array}{l} 1\times 1 \\ (n_1-1)\times 1 \\ n_1^*\times 1 \end{array} \begin{bmatrix} y_1' \\ Y_1' \\ Y_1^{*\prime} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{1m_1} & \pi_{1m_1^*} \\ \Pi_{(n_1-1)m_1} & \Pi_{(n_1-1)m_1^*} \\ \Pi_{n_1^*m_1} & \Pi_{n_1 m_1^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_1^{*\prime} \end{bmatrix} + \;V' \qquad (4.14)$$

Στήν (4.14) ἡ μήτρα Π ἔχει ὑποδιαιρεθεῖ σέ ὑπομῆτρες στίς ὁποῖες ὁ πρῶτος δείχτης εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν γραμμῶν καί ὁ δεύτερος ὁ ἀριθμός τῶν στηλῶν. ᾿Από τήν (4.14) φαίνεται ὅτι ἡ πρώτη γραμμή τῆς μήτρας Π ἀποτελεῖται ἀπό δύο ὑποδιανύσματα.

᾿Από μιά σύγκριση τῆς (4.14) μέ τήν (3.21) φαίνεται ὅτι ὑπάρχουν οἱ παρακάτω σχέσεις:

$$\Pi_{n_1m_1} = \begin{bmatrix} \pi_{1m_1} \\ \Pi_{(n-1)m_1} \end{bmatrix} \quad , \quad \Pi_{n_1m_1^*} = \begin{bmatrix} \pi_{1m_1^*} \\ \Pi_{(n_1-1)m_1^*} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Ἐπίσης ὁρίζουμε:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= [\pi_{1m_1} \ , \ \pi_{1m_1^*}] \\ \Pi_1 &= [\Pi_{(n_1-1)m_1} \ \vdots \ \Pi_{(n_1-1)m_1^*}] \\ \Pi_1^* &= [\Pi_{n_1^*m_1} \ \vdots \ \Pi_{n_1^*m_1^*}] \end{aligned} \tag{4.16}$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο ἡ μήτρα P χωρίζεται σέ ὑπομῆτρες ὡς ἑξῆς:

$$P = \begin{bmatrix} P_{n_1m_1} & P_{n_1m_1^*} \\ P_{n_1^*m_1} & P_{n_1^*m_1^*} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} p_{1m_1} & p_{1m_1^*} \\ P_{(n_1-1)m_1} & P_{(n_1-1)m_1^*} \\ P_{n_1^*m_1} & P_{n_1^*m_1^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ P_1 \\ P_1^* \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Ἀπό τήν Πρόταση 1 τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ εἶναι φανερό ὅτι οἱ ὑπομῆτρες τῆς P στή (4.17) εἶναι συνεπεῖς ἐκτιμητές τῶν ἀντίστοιχων ὑπομητρῶν τῆς Π .

Μέ τό συμβολισμό πού χρησιμοποιήσαμε πιό πάνω ἡ (4.10) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$[p_1' \ \vdots \ P_1' \ \vdots \ P_1^{*\prime}] = (Z'Z)^{-1}Z'[y_1 \ \vdots \ Y_1 \ \vdots \ Y_1^*] \tag{4.18}$$

Ὅπως δείξαμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο (βλέπε (3.23) καί (3.24)), οἱ μή μηδενικές διαρθρωτικές παράμετροι τῆς πρώτης ἐξίσωσης, πού περιέχονται στά διανύσματα-γραμμές β_{n_1} καί γ_{n_1}, συνδέονται μέ τίς παραμέτρους τῆς ἀνηγμένης μορφῆς μέ τίς σχέσεις:

$$\beta_{n_1}\Pi_{n_1m_1} + \gamma_{m_1} = o_{m_1} \qquad (4.19)$$

$$\beta_{n_1}\Pi_{n_1m_1^*} = o_{m_1^*} \qquad (4.20)$$

Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ (4.19) καί (4.20) ἰσχύουν ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς παραμέτρους μέ τούς ἀντίστοιχους ἐκτιμητές, δηλαδή:

$$b_{n_1}P_{n_1m_1} + c_{m_1} = o_{m_1} \qquad (4.21)$$

$$b_{n_1}P_{n_1m_1^*} = o_{m_1^*} \qquad (4.22)$$

Ἀπό τίς (4.21) καί (4.22) ὑπολογίζουμε τούς ἐκτιμητές τῶν διαρθρωτικῶν παραμέτρων μέ τήν Ε.Μ.Ε.Τ., στήν περίπτωση πού ἔχουμε μόνο μηδενικούς περιορισμούς στίς παραμέτρους αὐτές.

Ἡ μέθοδος μπορεῖ νά γενικευτεῖ καί στήν περίπτωση πού ἔχουμε γραμμικούς περιορισμούς (βλ. Rowley (1973), σελ.138).

Πρόταση 2. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Α) μέχρι καί (Δ) (ἤ ἀντί τῆς (Δ) οἱ (Δ_1), (Δ_2)), τότε ὁ ἐκτιμητής τῶν διαρθρωτικῶν παραμέτρων μιᾶς ἐξίσωσης (στήν περίπτωση πού ἐξετάζουμε, τῆς πρώτης) μέ τήν ΕΜΕΤ εἶναι συνεπής ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ ἐξίσωση εἶναι ταυτοποιημένη (βλέπε καί Goldberger (1964),σελ.327 Dhrymes (1970),σελ.288).

Ἀπόδειξη: Ἐπιβάλοντας τόν κανόνα τυποποίησης καί σύμφωνα μέ τό συμβολισμό τῆς (2.46) ἔχουμε:

$$\beta_{n_1} = (1, -\beta_1') \quad , \quad \gamma_{m_1} = -\gamma_1' \qquad (4.23)$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο συμβολίζουμε καί τούς ἐκτιμητές, δηλαδή:

$$b_{n_1} = (1, -b_1') \quad , \quad c_{m_1} = -c_1 \tag{4.24}$$

'Αντικαθιστώντας τίς (4.23) καί (4.24) στίς (4.20) καί (4.22), ἀντίστοιχα, ἔχουμε:

$$\Pi'_{(n_1-1)m_1^*}\beta_1 = \pi'_{1m_1^*} \tag{4.25}$$

$$P'_{(n_1-1)m_1^*}b_1 = p'_{1m_1^*} \tag{4.26}$$

Εἴδαμε πιό πάνω ὅτι οἱ ὑπομῆτρες τῆς μήτρας P εἶναι συνεπεῖς ἐκτιμητές τῶν ἀντίστοιχων ὑπομητρῶν τῆς μήτρας Π. Κατά συνέπεια, ἄν πάρουμε τά ὅρια πιθανότητας τῆς (4.26) καί τήν ἀφαιρέσουμε ἀπό τήν (4.25) θά ἔχουμε:

$$\Pi'_{(n_1-1)m_1^*}(\beta_1 - \text{plim } b_1) = o_{m_1^*} \tag{4.27}$$

'Η (4.27) εἶναι ἕνα ὁμογενές σύστημα μέ (n_1-1) ἀγνώστους καί ἔχει μόνο τετριμμένες λύσεις ὅταν καί μόνο ὅταν:

$$r(\Pi'_{(n_1-1)m_1^*}) = n_1 - 1 \tag{4.28}$$

'Από τήν (4.25) βλέπουμε ὅτι τό διάνυσμα π_{1m_1} εἶναι γραμμικός συνδυασμός τῶν γραμμῶν τῆς μήτρας $\Pi_{(n_1-1)m_1^*}$ καί κατά συνέπεια:

$$r(\Pi_{n_1m_1^*}) = r(\Pi_{(n_1-1)m_1^*}) = n_1-1 \tag{4.29}$$

'Η (4.29), ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τό προηγούμενο Κεφάλαιο, εἶναι ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἡ πρώτη ἐξίσωση ταυτοποιημένη. Ἄν ἰσχύει ἡ (4.29), τότε

$$\text{plim } b_1 = \beta_1 \tag{4.30}$$

Κατά παρόμοιο τρόπο ἄν πάρουμε τά ὅρια πιθανότητας τῆς

(4.21), τήν άφαιρέσουμε άπό τήν (4.19) καί προχωρήσουμε ὅπως στήν προηγούμενη περίπτωση, βρίσκουμε τελικά:

$$\text{plim } c_1 = \gamma_1 \qquad (4.31)$$

Στήν περίπτωση πού ή έξίσωση εἶναι άκριβῶς ταυτοποιημένη ὑπολογίζουμε τόν έκτιμητή τοῦ β_1 κατά μοναδικό τρόπο άπό τήν (4.26) ὡς ἑξῆς:

$$b_1 = (P_{(n_1-1)m_1^*})^{-1} p_{1m_1^*} \qquad (4.32)$$

Στή συνέχεια άντικαθιστοῦμε τήν (4.32) στήν (4.24) καί τή σχέση πού προκύπτει άπό τήν άντικατάστασή αὐτή τήν χρησιμοποιοῦμε στή (4.21) γιά νά λύσουμε ὡς πρός c_{m_1} $(=-c_1)$. Μέ τόν τρόπο αὐτό βρίσκουμε:

$$c_1 = p_{1m_1} - b_1' P_{(n_1-1)m_1} \qquad (4.33)$$

Οἱ (4.32) καί (4.33) εἶναι οἱ έκτιμητές τῶν β_1 καί γ_1 μέ τήν ΕΜΕΤ στήν περίπτωση μιᾶς άκριβῶς ταυτοποιημένης έξίσωσης.

Ὅταν ή έξίσωση εἶναι ὑποταυτοποιημένη, τότε τό σύστημα (4.26) ἔχει περισσότερους άγνώστους άπό έξισώσεις καί κατά συνεπεια εἶναι άδύνατο νά ὑπολογιστεῖ τό διάνυσμα b_1.

Ὅταν ή έξίσωση εἶναι ὑπερταυτοποιημένη, τότε τό σύστημα ἔχει περισσότερες έξισώσεις άπό άγνώστους, καί κατά συνέπεια δέν ὑπάρχει μοναδική λύση στό σύστημα (4.26). Κάθε μιά άπό τίς λύσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ εἶναι καί ἕνας έκτιμητής πού, ἄν καί συνεπής, δέν εἶναι άποτελεσματικός διότι παραλείπουμε τίς πληροφορίες πού ὑπάρχουν στούς ἄλλους έκτιμητές. Ἕνας τρόπος άντιμετώπισης τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖ τή γενικευμένη άντίστροφη μήτρα τῶν Moore-Penrose (βλέπε σχετικά Rao and Mitra (1971),σελ.50-55) ὑποδείχνεται άπό τόν

Khazzoom (1976).

(Γενικά γιά τίς λύσεις συστημάτων έξισώσεων βλέπε Γραμμική Άλγεβρα, Κεφάλαιο 3.)

Ἡ ΕΜΕΤ ἔχει τό πλεονέκτημα ὅτι κάνει διάκριση ἀνάμεσα στίς πληροφορίες πού προέρχονται ἀπό τό δεῖγμα (πού τίς χρησιμοποιεῖ γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς ἀνηγμένης μορφῆς) καί στίς πληροφορίες πού προέρχονται ἀπό τούς **ἐκ τῶν προτέρων περιορισμούς** (a priori restrictions) (πού τίς χρησιμοποιεῖ γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς).

II. Ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια

Ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια (2ΣΜΕΤ) (Two-stage least squares) προτάθηκε ἀπό τόν Theil (1953,a,b) καί ἀναπτύχθηκε ἀπό τόν ἴδιο (1961,1971) καθώς καί, ἀνεξάρτητα, ἀπό τόν Basmann (1957).

Ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος πού θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε μέ τή 2ΣΜΕΤ γράφεται, γιά $i = 1$, (βλ. (2.45)) ὡς ἑξῆς:

$$y_1 = X_1\alpha_1 + u_1 = Y_1\beta_1 + Z_1\gamma_1 + u_1 \qquad Y_1 \sim \hat{Y}_1 = Y_1 - \hat{V}_1$$

(Παίρνουμε τήν πρώτη ἐξίσωση γιά νά ὑπάρχει συνέχεια καί ἑνότητα μέ τό προηγούμενο τμῆμα αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου καθώς καί μέ τό Κεφάλαιο 3. Ἐννοεῖται ὅτι ἡ ἁπλοποίηση αὐτή δέν ἀφαιρεῖ τίποτε ἀπό τή γενικότητα τῆς παρουσίασης τῶν διάφορων μεθόδων ἐκτίμησης μιᾶς ἐξίσωσης ἑνός συστήματος στοχαστικῶν ἐξισώσεων, διότι στή θέση τοῦ δείχτη 1 μποροῦμε νά τοποθετήσουμε τό δείχτη i).

Σύμφωνα μέ τίς ὑποθέσεις τοῦ δεύτερου Κεφαλαίου, οἱ ἐνδογενεῖς μεταβλητές Y_1 συσχετίζονται μέ τούς διαταρακτικούς ὅρους

u_1 καί, κατά συνέπεια, δέν μπορούμε νά βρούμε ΑΓΑΕ τῶν β_1 καί γ_1 ἐφαρμόζοντας τήν ΑΜΕΤ. Ἐπιπλέον, ὅπως εἴδαμε στό τμῆμα Ι τοῦ Κεφαλαίου 2 οἱ ἐκτιμητές πού δίνει ἡ ΑΜΕΤ δέν εἶναι συνεπεῖς.

Ἕνας τρόπος γιά νά ξεπεραστεῖ ἡ δυσκολία αὐτή εἶναι ἡ ἀντικατάσταση τῆς μήτρας Y_1 μέ τή $E(Y_1)$, δηλαδή ἡ "ἀπαλλαγή" τῆς Y_1 ἀπό τό στοχαστικό της μέρος.

Ἀπό τίς (4.14) καί (4.16) βλέπουμε ὅτι

$$\boxed{Y_1' = \Pi_1 Z_1' + V_1'} \tag{4.34}$$

ὅπου V_1 εἶναι μιά $Tx(n_1-1)$ ὑπομήτρα τῆς V.

Στή σχέση (4.34) ἡ μήτρα Π_1 εἶναι ἄγνωστη. Ὁ ἐκτιμητής της (ὅπως φαίνεται ἀπό τήν (4.18)) εἶναι

$$P_1' = (Z'Z)^{-1}Z'Y_1 \tag{4.35}$$

πού ὅπως ξέρουμε (βλέπε Πρόταση 1) εἶναι ἕνας συνεπής ἐκτιμητής. Ἐπιπλέον ὁ ἐκτιμητής αὐτός εἶναι ἀμερόληπτος στήν περίπτωση πού ἡ μήτρα Z περιλαμβάνει μόνο ἐξωγενεῖς μεταβλητές. Στήν τελευταία αὐτή περίπτωση μποροῦμε νά ἐκτιμήσουμε τή $E(Y_1)$ μέ τή μήτρα

$$\boxed{\hat{Y}_1 = ZP_1' = Y_1 - \hat{V}_1} \tag{4.36}$$

ὅπου $\hat{V}_1$ εἶναι ἡ μήτρα τῶν καταλοίπων πού προκύπτουν ὅταν ἐκτιμήσουμε τή (4.34) μέ τήν ΑΜΕΤ, δηλαδή

$$\hat{V}_1 = Y_1 - ZP_1' = Y_1 - Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 \tag{4.37}$$

Πρίν προχωρήσουμε παρατηροῦμε ὅτι:

$$Z'\hat{V}_1 = Z'Y_1 - Z'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 = 0 \tag{4.38}$$

καί ὅτι

$$Z_1'\hat{V}_1 = Z_1'Y_1 - Z_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 =$$

$$Z_1'Y_1 - (I \vdots 0)\begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_1^* \end{bmatrix} Y_1 = 0 \qquad (4.39)$$

Τέλος παρατηροῦμε ὅτι:

$$\hat{Y}_1'\hat{V}_1 = P_1'Z_1'\hat{V}_1 = 0 \qquad (4.40)$$

Κατά συνέπεια:

$$\hat{Y}_1'\hat{Y}_1 = \hat{Y}_1'(Y_1 - \hat{V}_1) = \hat{Y}_1'Y_1 = (Y_1 - \hat{V}_1)'Y_1 =$$

$$Y_1'Y_1 - \hat{Y}_1'(\hat{Y}_1 + \hat{V}_1) = Y_1'Y_1 - \hat{V}_1'\hat{V}_1 \qquad (4.41)$$

Τά παραπάνω ἀποτελέσματα θά χρησιμοποιηθοῦν στή συνέχεια. Ἡ ἐξίσωση πού θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε, ἄν προσθέσουμε καί ἀφαιρέσουμε τό $\hat{V}_1\beta_1$, γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$y_1 = \underline{(Y_1 - \hat{V}_1)\beta_1} + Z_1\gamma_1 + u_1 + \hat{V}_1\beta_1 =$$

$$\hat{Y}_1\beta_1 + Z_1\gamma_1 + u_1 + \hat{V}_1\beta_1 \qquad (4.42)$$

Ἄν θέσουμε

$$\hat{X}_1 = (\hat{Y}_1 \vdots Z_1), \quad w_1 = u_1 + \hat{V}_1\beta_1 \qquad (4.43)$$

ἡ (4.42) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$y_1 = \hat{X}_1\alpha_1 + w_1 \qquad (4.44)$$

Ὅπως παρατηρεῖ ὁ Dhrymes (1970), σελ. 178 ὁ ἐκτιμητής τοῦ α_1 μέ τή 2ΣΜΕΤ, εἶναι ὁ ἐκτιμητής τοῦ α_1 μέ τήν ΑΜΕΤ πού ἐφαρμόζεται στήν (4.44). Ἀπό τή διαδικασία αὐτή προέρχεται καί ὁ ὅρος 2ΣΜΕΤ. Τό πρῶτο στάδιο συνίσταται στήν "ἀπαλλαγή" τῆς μήτρας Y_1 ἀπό τή μήτρα τῶν καταλοίπων $\hat{V}_1$, καί τό δεύτερο στάδιο στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς ἤ **διαρθρωτικῶν παραμέτρων** (structural parameters) μέ τήν ἐφαρμογή τῆς ΑΜΕΤ στή (4.44). Ἡ ἀνάπτυξη τῆς μεθόδου γίνεται μέ τήν ὑπόθεση ὅτι (βλέπε Dhrymes(1970), σελ.190) οἱ προκαθορισμένες μεταβλητές τοῦ συστήματος εἶναι ἐξ' ὁλοκλήρου ἐξωγενεῖς καί μποροῦν , κατά συνέπεια, νά ἐκληφθοῦν εἴτε ὅτι εἶναι **μή στοχαστικές** (nonstochastic), εἴτε, τουλάχιστον, ἀνεξάρτητες ἀπό τούς διαταρακτικούς ὅρους τοῦ συστήματος.

Οἱ κανονικές ἐξισώσεις (βλέπε Θεωρητική Οἰκονομετρία - Ι, σελ.44) στήν περίπτωση τῆς ἐξίσωσης (4.44) εἶναι :

$$(\hat{X}_1'\hat{X}_1)a_1 = \hat{X}_1'y_1 \tag{4.45}$$

Ἡ (4.45) γράφεται ἀναλυτικά ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1'\hat{Y}_1 & \hat{Y}_1'Z_1 \\ Z_1'\hat{Y}_1 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1'y_1 \\ Z_1'y_1 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

Παίρνοντας ὑπόψη τίς (4.39) καί (4.40) ἡ (4.46) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} Y_1'Y_1 - \hat{V}_1'\hat{V}_1 & Y_1'Z_1 \\ Z_1'Y_1 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1'y_1 \\ Z_1'y_1 \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

Ἄν πάρουμε τήν ἐξίσωση:

$$y_1 = Z\pi_1' + v_1 \tag{4.48}$$

καί ἐφαρμόσουμε τήν ΑΜΕΤ γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων π_1

ἔχουμε

$$p_1' = (Z'Z)^{-1}Z'y_1 \tag{4.49}$$

καί

$$y_1 = Zp_1' + \hat{v}_1 = \hat{y}_1 + \hat{v}_1 \tag{4.50}$$

'Αλλά

$$\hat{Y}_1'y_1 = (Y_1 - \hat{V}_1)'y_1 = Y_1'y_1 - \hat{V}_1'(Zp_1' + \hat{v}_1) = Y_1'y_1 - \hat{V}_1'\hat{v}_1 \tag{4.51}$$

'Αντικαθιστώντας την (4.51) στό πρῶτο διάνυσμα τοῦ δεξιοῦ σκέλους τῆς (4.47) ἔχουμε, τελικά:

$$\begin{bmatrix} Y_1'Y_1 - \hat{V}_1'\hat{V}_1 & Y_1'Z_1 \\ Z_1'Y_1 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1'y_1 - \hat{V}_1'\hat{v}_1 \\ Z_1'y_1 \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

'Ο παραπάνω τρόπος ὑπολογισμοῦ τῶν b_1 καί c_1 εἶναι ἀναλυτικά καί πρακτικά ἐξαιρετικά δύσκολος. 'Εναλλακτικά μποροῦμε νά βροῦμε τόν ἐκτιμητή (4.52) ἐφαρμόζοντας τή **γενικευμένη μέθοδο ἐλάχιστων τετράγωνων (ΓΜΕΤ)** (Generalised least squares)(βλέπε καί Dhrymes(1970), σελ. 183).

Ἄν πολλαπλασιάσουμε τήν ἐξίσωση πού θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε (δηλ. τή ἐξίσωση πού δίνεται στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ τμήματος) ἀπό τά ἀριστερά μέ τή μήτρα Z΄ ἔχουμε:

$$Z'y_1 = Z'X_1\alpha_1 + Z'u_1 \tag{4.53}$$

Μπορεῖ νά δειχτεῖ ὅτι ἡ μήτρα

$$\frac{1}{T}Z'X_1$$

συγκλίνει κατά πιθανότητα σέ μιά μή στοχαστική μήτρα. 'Επιπλέον ἄν ἡ μήτρα Z περιλαμβάνει μόνο ἐξωγενεῖς μεταβλητές, τότε

$$\mathrm{Var}(Z'u_1) = E(Z'u_1u_1'Z) = \sigma_{11}Z'Z \tag{4.54}$$

Γιά μεγάλα δείγματα τό ἴδιο συμβαίνει καί ἄν στή μήτρα Z περιλαμβάνονται ἐνδογενεῖς μεταβλητές μέ χρονικές ὑστερήσεις.

Ὅπως γνωρίζουμε (βλέπε Θεωρητική Οἰκονομετρία-Ι, Κεφ.5) στήν περίπτωση πού γιά τό ὑπόδειγμα $y = X\beta + u$, ὅπου ἡ μήτρα εἶναι μή στοχαστική , ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις:

$$E(u) = o\ ,\ \mathrm{Var}(u) = \sigma^2\Omega \tag{4.55}$$

ὁ ἐκτιμητής τοῦ β μέ τή ΓΜΕΤ δίνεται ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$X'\Omega^{-1}X\hat{\beta} = X'\Omega^{-1}y \tag{4.56}$$

Ἐφόσον ἡ ἐξίσωση(4.53),γιά μεγάλα δείγματα, ἱκανοποιεῖ τίς ὑποθέσεις τοῦ γενικευμένου γραμμικοῦ ὑποδείγματος (σύγκρινε π. χ. τήν (4.54) μέ τήν (4.55)) οἱ ἐξισώσεις (οἱ ἀντίστοιχες στίς (4.56)) μέ τίς ὁποῖες δίνεται ὁ ἐκτιμητής τοῦ Aitken (Aitken estimator) τοῦ α_1 τῆς (4.53) εἶναι:

$$X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_1a_1 = X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_1 \qquad (Z'Z)^{-1} \tag{4.57}$$

Οἱ (4.57) εἶναι οἱ ἴδιες μέ τίς (4.52) διότι:

$$Y_1'Z(Z'Z)^{-1}Z' = P_1Z' = \hat{Y}_1' \tag{4.58}$$

καί

$$Z_1'Z(Z'Z)^{-1}Z' = (I \;\vdots\; 0)\begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_1^{*\prime} \end{bmatrix} = Z_1 \tag{4.59}$$

Κατά συνέπεια, ἄν στίς (4.57) ἀντικαταστήσουμε τή μήτρα X_1 μέ $(Y_1 \;\vdots\; Z_1)$ καί κάνουμε τούς πολλαπλασιασμούς, παίρνοντας ὑπόψη τίς (4.58) καί (4.59), βρίσκουμε:

$$\begin{bmatrix} \hat{Y}_1'\hat{Y}_1 & \hat{Y}_1'Z_1 \\ Z_1'\hat{Y}_1 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_1'y_1 \\ Z_1'y_1 \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

Ἡ (4.60) εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια μέ τήν (4.46), πού, μέ τή σειρά της, εἶναι ἡ ἴδια μέ τή (4.52). Σέ σχέση μέ τή (4.52) ἡ (4.57) εἶναι, ἀπό ὑπολογιστική ἄποψη, πολύ πιό ἁπλή (βλέπε σχετικά καί Drettakis (1973), σελ. 146-147).

Εἶναι φανερό ὅτι ἐφαρμόζοντας τή ΓΜΕΤ στή (4.53), οὐσιαστικά ἐλαχιστοποιοῦμε τήν τετραγωνική μορφή:

$$\varphi = a_{1.}(X'Z)(Z'Z)^{-1}(Z'X)a'_{1.} \tag{4.61}$$

ὅπου $a_{1.}$ εἶναι ἡ γραμμή 1 τῆς μήτρας Α.

Ἄν ἔχουμε μόνο μηδενικούς περιορισμούς, τότε, ἐπιβάλοντας τούς περιορισμούς αὐτούς στήν (4.61) καθώς καί τόν κανόνα τυποποίησης, ἔχουμε:

$$\varphi = (y_1 - X_1a_1)'Z(Z'Z)^{-1}Z'(y_1 - X_1a_1) \tag{4.62}$$

Παραγωγίζοντας τή (4.62) ὡς πρός a_1 βρίσκουμε τίς κανονικές ἐξισώσεις (4.57) τῆς 2ΣΜΕΤ.

Ἄν ἔχουμε γραμμικούς περιορισμούς τῆς μορφῆς (3.36), τότε παραγωγίζουμε τήν Lagrangian:

$$\psi = a_{1.}(X'Z)(Z'Z)^{-1}(Z'X)a'_{1.} + \lambda'(\Phi_1a'_{1.} - \varphi_1) \tag{4.63}$$

ὅπου λ τό διάνυσμα τῶν r_1 πολλαπλασιαστῶν τοῦ Lagrange.

Ὅταν ἔχουμε μηδενικούς περιορισμούς πού ταυτοποιοῦν τήν ἐξίσωση καί ἐπιπλέον ὑπερταυτοποιητικούς γραμμικούς περιορισμούς (overidentifying linear restrictions) τῆς μορφῆς:

$$Ra_1 = r_1 \tag{4.64}$$

τότε (βλέπε καί Θεωρητική Οἰκονομετρία-Ι, σελ.54-55) παραγωγίζουμε τήν Lagrangian:

$$\psi^* = (y_1 - X_1a_1^c)'Z(Z'Z)^{-1}Z'(y_1 - X_1a_1^c) + \lambda'(Ra_1^c - r_1) \tag{4.65}$$

ὅπου a_1^c εἶναι ὁ ἐκτιμητής μέ τή 2ΣΜΕΤ μέ γραμμικούς δεσμούς.

III. Ἀσυμπτωτικές ἰδιότητες τῶν ἐκτιμητῶν τῆς 2ΣΜΕΤ

Ἀπό τήν Πρόταση 1 τοῦ Κεφαλαίου 2 ἔχουμε

$$\text{plim}\,\frac{1}{T}\,Z'U = 0 \tag{4.66}$$

κατά συνέπεια

$$\text{plim}\,\frac{1}{T}\,Z'u_{.1} = \text{plim}\,\frac{1}{T}\,Z'u_1 = 0 \tag{4.67}$$

Ἀπό τήν ἴδια Πρόταση ἔχουμε:

$$\text{plim}\,\frac{1}{T}\,X'Z = \text{plim}\,\frac{1}{T}\begin{bmatrix} Y'Z \\ Z'Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-1}\Gamma M \\ M \end{bmatrix} = K \tag{4.68}$$

κατά συνέπεια

$$\text{plim}\,\frac{1}{T}\,X_1'Z = K_1 \tag{4.69}$$

ὅπου K_1 εἶναι μιά $N_1 x m$ ὑπομήτρα τῆς μήτρας K.

Ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς ΕΜΕΤ μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τήν παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 3. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες(Α) μέχρι καί (Δ) (ἤ οἱ (Δ_1) καί (Δ_2)) τοῦ Κεφαλαίου 2 τότε ὁ ἐκτιμητής τῆς 2ΣΜΕΤ εἶναι συνεπής ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ ἐξίσωση τήν ὁποία ἀφορᾶ εἶναι ταυτοποιημένη.

Ἀπό τήν Πρόταση 3 συνάγεται τό παρακάτω Πόρισμα:

Πόρισμα. Ἄν μιά ἐξίσωση ἔχει μόνο μηδενικούς περιορισμούς τότε ἀναγκαία συνθήκη γιά νά ὑπάρχει ὁ ἐκτιμητής 2ΣΜΕΤ εἶναι ἡ ἐξίσωση νά εἶναι ἀκριβῶς ἤ ὑπερ-ταυτοποιημένη.

Πρόταση 4. Ἂν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Α) μέχρι καί (Δ) (ἤ, ἀντί τῆς (Δ) οἱ (Δ_1), (Δ_2)) καί ἡ ἐξίσωση (2.45) εἶναι ταυτοποιημένη τότε ὁ ἐκτιμητής a_1 τῆς 2ΣΜΕΤ, πού ὁρίζεται στίς (4.57) εἶναι ἀσυμπτωτικά κανονικός:

$$\sqrt{T}(a_1 - \alpha_1) \xrightarrow{d} N(o, \sigma_{11}(K_1 M^{-1} K_1')^{-1}) \tag{4.70}$$

Ἀπόδειξη: βλ. Dhrymes (1970), σελ. 191.

Πόρισμα. Ἂν ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις τῆς προηγούμενης Πρότασης καί a_{1s} , α_{1s} εἶναι sx1 ὑποδιανύσματα τῶν a_1 , α_1 καί V_{1s} ἡ ἀντίστοιχη ὑπομήτρα τῆς μήτρας:

$$V_1 = [X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_1]^{-1} \tag{4.71}$$

τότε

$$r = \frac{(a_{1s} - \alpha_{1s})' V_s^{-1}(a_{1s} - \alpha_{1s})}{s_{11}} \xrightarrow{d} \chi_s^2 \tag{4.72}$$

ὅπου

$$s_{11} = \frac{1}{T}(y_1 - X_1 a_1)'(y_1 - X_1 a_1) \tag{4.73}$$

Ἀπόδειξη: Βλ. Hatanaka (1977).

Ἀπό τά παραπάνω εἶναι φανερό ὅτι μέ τή (4.72) μποροῦμε νά ἐλέγξουμε τήν

$$H_o : \alpha_{1s} = o$$

σέ ἀντιπαράθεση μέ τή διαζευκτική ὑπόθεση:

$$H_1 : \alpha_{1s} \neq o$$

στό ἐπίπεδο στατιστικῆς σημαντικότητας α.

Ὅταν θέλουμε νά ἐλέγξουμε τή στατιστική σημαντικότητα ὁλόκληρου τοῦ διανύσματος a_1 ἡ (4.72) κατανέμεται ἀσυμπτωτικά σάν $\chi^2_{N_1}$.

Τέλος ἄν θέλουμε νά ἐλέγξουμε ἕνα στοιχεῖο τοῦ διανύσματος a_1 , ἔστω τό a_{1k} καί v_{kk} εἶναι τό k διαγώνιο στοιχεῖο τῆς μήτρας V_1 ὁ ἔλεγχος γίνεται μέ τή στατιστική

$$\frac{a_{k1}}{\sqrt{s_{11}v_{kk}}} \xrightarrow{d} N\ (0,\ 1) \tag{4.74}$$

Γιά ἐναλλακτικούς ἐλέγχους βλέπε Dhrymes (1970),σελ. 272-275.

IV. Ἡ μέθοδος τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν

Ἡ μέθοδος τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν (ΜΒΜ) (the method of instrumental variables) χρησιμοποιήθηκε ἀρχικά σέ ὑποδείγματα μιᾶς ἐξίσωσης σέ περιπτώσεις, κατά κύριο λόγο, πού ὑπάρχουν σφάλματα μέτρησης (measurement errors) (βλέπε Reiersøl (1941,1945), Durbin (1954), Geary (1959)).

Ὁ πρῶτος πού χρησιμοποίησε τή μέθοδο αὐτή γιά συστήματα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων ἦταν ὁ Sargan(1958), ὁ ὁποῖος ἔδειξε ὅτι ἡ 2ΣΜΕΤ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν ειδική περίπτωση τῆς ΜΒΜ. Ἐπιπλέον ἡ ΜΒΜ μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ σέ περιπτώσεις ὅπου δέν εἶναι δυνατή ἡ ἐφαρμογή τῆς 2ΣΜΕΤ, ὅπως, π.χ. στήν περίπτωση πού ὑπάρχουν σφάλματα μέτρησης κ.λ.π.

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε τήν ἐξίσωση (2.45) μέ $i = 1$, δηλαδή τήν ἐξίσωση πού ἐξετάσαμε καί στά προηγούμενα τμήματα αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, μέ τή ΜΒΜ.

Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα σύνολο G βοηθητικῶν μεταβλητῶν:

$$z_{t1},\ z_{t2},\ \dots\dots\dots\dots,z_{tG}$$

τέτοιων ὥστε νά ἰσχύουν οἱ παρακάτω συνθῆκες:

(i) $G \geqslant N_1 = n_1 + m_1 - 1$ (4.75)

δηλαδή ὁ ἀριθμός τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν πρέπει νά εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος μέ τόν ἀριθμό τῶν"ἑρμηνευτικῶν"μεταβλητῶν τῆς ἐξίσωσης πού θέλουμε νά ἐκτιμήσουμε.

(ii) $\text{plim}\,\frac{1}{T}\, X_1'Z = \bar{K}_1$ (4.76)

ὅπου

$Z = (z_{tj}),\ j = 1,2,\ldots\ldots,G\ ,\ t = 1,2,\ldots\ldots,T$

ἡ μήτρα πού περιλαμβάνει τίς T παρατηρήσεις τῶν G βοηθητικῶν μεταβλητῶν, καί

$\bar{K}_1$

μιά σταθερή μήτρα μέ $r(\bar{K}_1) = N_1$

Ἡ συνθήκη αὐτή σημαίνει (βλέπε καί Πρόταση 12 στό Κεφάλαιο 1) ὅτι οἱ βοηθητικές μεταβλητές πρέπει νά συσχετίζονται, καί μάλιστα σημαντικά, μέ τίς "ἑρμηνευτικές" μεταβλητές τῆς ἐξίσωσης

(iii) $E(Z'u_1) = 0,\ \text{plim}\,\frac{1}{T}\, Z'u_1 = 0$ (4.77)

δηλαδή οἱ βοηθητικές μεταβλητές εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπο τούς διαταρακτικούς ὅρους $u_{t1}, u_{(t+1)1}, \ldots\ldots$

(iv) $\text{plim}\,\frac{1}{T}\, Z'Z = \bar{M}$ (4.78)

ὅπου $\bar{M}$ μιά σταθερή, θετικά ὁρισμένη μήτρα.

Ἄν ἰσχύει ἡ συνθήκη (Γ) τοῦ Κεφαλαίου 2, τότε μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ συνθῆκες (iii) καί (iv) συνεπάγονται ὅτι:

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\, Z'u_1 \xrightarrow{d} N(0,\ \sigma_{11}\bar{M}) \quad (4.79)$$

Ἄν $G = N_1$, τότε πολλαπλασιάζοντας τήν (2.48) (γιά i=1) ἀπό τά ἀριστερά μέ Z', ἔχουμε

$$Z'y_1 = Z'X_1\alpha_1 + Z'u_1 \qquad (4.80)$$

Μέ τόν πολλαπλασιασμό αὐτό, καί ἐφόσον ἰσχύει ἡ ὑπόθεση (ii), πετυχαίνουμε νά"ἀπαλλάξουμε" τή μήτρα X_1 ἀπό τό στοχαστικό της μέρος καί, κατά συνέπεια, μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ΑΜΕΤ στήν (4.80) γιά τήν ἐκτίμηση τοῦ α_1 . Ἄν ἡ μήτρα $Z'X_1$ εἶναι μή ἰδιάζουσα,τότε ὁ ἐκτιμητής πού παίρνουμε μέ τήν ΑΜΕΤ εἶναι:

$$a_1 = (Z'X_1)^{-1}Z'y_1 \qquad (4.81)$$

Ἄν ἔχουμε περισσότερες βοηθητικές ἀπ'ὅ,τι "ἑρμηνευτικές" μεταβλητές, ἄν,δηλαδή,

$$G > N_1$$

πολλαπλασιάζουμε τή μήτρα τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν ἀπό τά δεξιά μέ μιά αὐθαίρετη GxN_1 μήτρα Lκαί παίρνουμε τή μετασχηματισμένη μήτρα:

$$Z^* = ZL \qquad (4.82)$$

ὅπου , στήν περίπτωση πού ἡ μήτρα L εἶναι στοχαστική, θά πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη:

$$\text{(v) } \operatorname{plim} L = \bar{L} \qquad (4.83)$$

ὅπου $\bar{L}$ εἶναι μιά σταθερή GxN_1 μήτρα, τέτοια ὥστε

$$r(\bar{L}) = r(\bar{K}_1\bar{L}) = N_1$$

Ἄν στήν (4.80) ἀντικαταστήσουμε τή μήτρα Z μέ τή μήτρα Z^* καί ἄν ἡ μήτρα $Z_1^{*\prime}X_1$ εἶναι μή ἰδιάζουσα, τότε ὁ ἐκτιμητής πού παίρνουμε μέ τήν ΑΜΕΤ γιά τό διάνυσμα α_1 εἶναι:

$$a_1^* = (Z^{*\prime}X_1)^{-1}Z^{*\prime}y_1 = (L'Z'X_1)^{-1}L'Z'y_1 \qquad (4.84)$$

Ἡ (4.84) μᾶς δίνει τή γενική μορφή τοῦ ἐκτιμητῆ μέ τή

MBM, καί αὐτό γιατί στήν περίπτωση πού $G = N_1$, τότε $L = I_{N_1}$ καί ἡ (4.84) συμπίπτει μέ τή (4.81).

Πρόταση 5. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (i) μέχρι (v) , τότε ὁ ἐκτιμητής (4.84) εἶναι συνεπής καί

$$\sqrt{T}(a_1^* - \alpha_1) \xrightarrow{d} N(\,o,\ \sigma_{11}(\bar{L}'\bar{K}_1')^{-1}\bar{L}'\bar{M}\bar{L}(\bar{K}_1\bar{L})^{-1}\,) \qquad (4.85)$$

Ἀπόδειξη: Ἀντικαθιστώντας τή (4.80) στή (4.84) καί πολλαπλασιάζοντας μέ $\sqrt{T}$ ἔχουμε:

$$\sqrt{T}(a_1^* - \alpha_1) = (L'\frac{Z'X_1}{T})^{-1}L'\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}} \qquad (4.86)$$

Ἐφαρμόζοντας τό θέωρημα τοῦ Cramer καί παίρνοντας ὑπόψη τή (4.79), βρίσκουμε τή (4.85).

Ἄν μετασχηματίσουμε τό σύνολο τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν πού ὁρίζεται μέ τήν (4.82) μέ μιά μή ἰδιάζουσα $N_1 x N_1$ μήτρα H θά ἔχουμε

$$Z^{**} = Z^*H = ZLH \qquad (4.87)$$

Ἀντικαθιστώντας τή μήτρα Z^* στή (4.84) μέ τή μήτρα Z^{**} ὁ ἐκτιμητής γράφεται:

$$a^{**} = (Z^{**\prime}X_1)^{-1}Z^{**\prime}y_1 = (L'Z'X_1)^{-1}H^{-1}HL'Z'y_1 =$$

$$(L'Z'X_1)^{-1}L'Z'y_1 \qquad (4.88)$$

ὅπου ἡ (4.88) εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια μέ τή (4.84). Κατά συνέπεια ὁ ἐκτιμητής (4.84) δέν ἀλλάζει γιά ἕνα ἄπειρο πλῆθος μητρῶν L πού συνδέονται μεταξύ τους μέ μή ἰδιάζοντες γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Μποροῦμε νά ἐξασφαλίσουμε μοναδικότητα τῆς μήτρας L ἄν ἐπιβάλουμε τό δεσμό:

$$\bar{K}_1\bar{L} = I_{N_1} \qquad (4.89)$$

'Επιλέγουμε τό δεσμό (4.89) τόσο διότι ἔχει μιά ἁπλή μορφή, ὅσο καί διότι μᾶς ἐξασφαλίζει τή συνθήκη βαθμοῦ πού περιλαμβάνεται στήν ὑπόθεση (v).

Τό πρόβλημα, τώρα, εἶναι νά βροῦμε ἕνα **ἄριστο γραμμικό μετασχηματισμό** (best linear transformation) L_o ὅλων τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν, δηλαδή ἕνα γραμμικό μετασχηματισμό πού νά ἐλαχιστοποιεῖ τή μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης τοῦ ἐκτιμητῆ (4.84).

Πρόταση 6. Στό σύνολο τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν(ὅλων τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν) πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη (v), ὁ ἄριστος (μέ τήν ἔννοια πού δόθηκε πιό πάνω) εἶναι ἐκεῖνος πού δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\bar{L}_o = \bar{M}^{-1}\bar{K}_1'(\bar{K}_1\bar{M}^{-1}\bar{K}_1')^{-1} \tag{4.90}$$

'Απόδειξη: Ἔστω ἕνας ἄλλος μετασχηματισμός L_1 τέτοιος ὥστε

$$\text{plim}\, L_1 = \bar{L}_1 \tag{4.91}$$

'Υποθέτοντας ὅτι τόσο ὁ γραμμικός μετασχηματισμός L_o ὅσο καί ὁ L_1 ἱκανοποιοῦν τό δεσμό (4.89) καί παίρνοντας ὅρια πιθανότητας, ἔχουμε:

$$\bar{K}_1\bar{L}_o = \bar{K}_1\bar{L}_1 = I \tag{4.92}$$

'Ορίζοντας τή μήτρα:

$$D = \bar{L}_1 - \bar{L}_o \tag{4.93}$$

ἔχουμε

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_o + D \tag{4.94}$$

Κατά συνέπεια:

$$\bar{K}_1\bar{L}_1 = \bar{K}_1(\bar{L}_o + D) = \bar{K}_1\bar{L}_o + \bar{K}_1 D = I + \bar{K}_1 D = I \tag{4.95}$$

'Εφόσον ἰσχύει ἡ (4.92), γιά νά ἰσχύει ἡ (4.95) θά πρέπει νά ἔχουμε:

$$\bar{K}_1 D = 0 \qquad (4.96)$$

'Επιπλέον

$$\bar{L}_o'\bar{M}D = (\bar{K}_1\bar{M}^{-1}\bar{K}_1')^{-1}\bar{K}_1\bar{M}^{-1}\bar{M}D = 0 \qquad (4.97)$$

"Αν

$$\frac{1}{T}\sigma_{11}V_o \qquad (4.98)$$

εἶναι ἡ ἀσυμπτωτική μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης τοῦ ἐκτιμητῆ (4.84) γιά τό μετασχηματισμό L_o , καί

$$\frac{1}{T}\sigma_{11}V_1 \qquad (4.99)$$

ἡ ἀντίστοιχη μήτρα γιά τό μετασχηματισμό L_1 , ἀπό τήν Πρόταση 5 καί τή (4.92), ἔχουμε

$$V_o = \bar{L}_o'\bar{M}\bar{L}_o \qquad (4.100)$$

καί

$$V_1 = \bar{L}_1'\bar{M}\bar{L}_1 \qquad (4.101)$$

'Αντικαθιστώντας τήν (4.93) στή (4.101) καί χρησιμοποιώντας τή (4.97) βρίσκουμε :

$$V_1 = \bar{L}_o'\bar{M}\bar{L}_o + D'\bar{M}D \qquad (4.102)$$

Κατά συνέπεια:

$$V_1 - V_o = D'\bar{M}D \qquad (4.103)$$

'Εφόσον, σύμφωνα μέ τή συνθήκη (iv), ἡ μήτρα $\bar{M}$ εἶναι θετικά ὁρισμένη, ἡ μήτρα $D'\bar{M}D$ (βλέπε Γραμμική "Αλγεβρα, σελ.132) εἶναι θετικά ἡμιορισμένη. Κατά συνέπεια ὁ μετασχηματισμός L_o

εἶναι ἄριστος.

Μέ βάση τίς Προτάσεις 4 καί 6 μποροῦμε εὔκολα νά ἀποδείξουμε τό παρακάτω Πόρισμα:

Πόρισμα. Γιά ἕνα σύνολο βοηθητικῶν μεταβλητῶν πού ἱκανοποιοῦν τίς συνθῆκες (i) μέχρι καί(iv) ὁ ἐκτιμητής:

$$\hat{\alpha}_1 = (X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_1)^{-1}X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_1 \tag{4.104}$$

εἶναι ἄριστος ἀσυμπτωτικά κανονικός στό σύνολο ὅλων τῶν ἐκτιμητῶν τῆς μορφῆς (4.84) μέ μῆτρες μετασχηματισμῶν πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη (v).

Στή συνέχεια τοῦ Τόμου αὐτοῦ, ὅταν ἀναφερόμαστε στόν ἐκτιμητή μέ τή ΜΒΜ θά ἐννοοῦμε τόν (4.104), ἀντί ἐκεῖνο πού δίνεται στή γενική μορφή τῆς (4.84). Φυσικά, στήν περίπτωση πού $G = N_1$ καί ἡ μήτρα $Z'X_1$ εἶναι μή ἰδιάζουσα, ὁ ἐκτιμητής (4.104) ταυτίζεται μέ τόν (4.81).

Μιά σύγκριση ἀνάμεσα στόν ἐκτιμητή 2ΣΜΕΤ, πού δίνεται στή (4.57), καί στόν ἐκτιμητή μέ τή ΜΒΜ πού δίνεται στή (4.104), δείχνει ὅτι ὁ δεύτερος προκύπτει ἀπό τόν πρῶτο ἀν ἡ μήτρα τῶν προκαθορισμένων μεταβλητῶν ἀντικατασταθεῖ μέ τή μήτρα τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν.

Προτάσεις ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες πού περιλαμβάνονται στό προηγούμενο τμῆμα γιά τούς ἐκτιμητές μέ τή 2ΣΜΕΤ ἰσχύουν καί γιά τούς ἐκτιμητές μέ τή ΜΒΜ. Οἱ προτάσεις αὐτές μᾶς ἐπιτρέπουν νά κάνουμε ἐλέγχους γιά τούς (4.104), ἀνάλογους μέ ἐκείνους πού ἀναφέρθηκαν γιά τήν περίπτωση τῆς 2ΣΜΕΤ.

Εἶναι εὔκολο νά δείξουμε ὅτι παίρνουμε τόν ἐκτιμητή (4.104) ἐλαχιστοποιώντας μιά τετραγωνική μορφή τοῦ τύπου τῆς (4.61), ὅπου ἡ μήτρα Z ἔχει ἀντικατασταθεῖ μέ τή μήτρα Ƶ .

Τέλος ἡ εἰσαγωγή μηδενικῶν καί γραμμικῶν περιορισμῶν μπορεῖ νά γίνει γιά τή ΜΒΜ κατά τρόπο ἀνάλογο μέ τή 2ΣΜΕΤ.

V. Συγκρίσεις τῶν ἐκτιμητῶν μέ τίς διάφορες μεθόδους

Στά προηγούμενα τμήματα τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ ἀναπτύξαμε τρεῖς μεθόδους ἐκτίμησης τῶν παραμέτρων μιᾶς ἐξίσωσης πού ἀνήκει σέ ἕνα σύστημα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων, τίς ΕΜΕΤ, 2ΣΜΕΤ καί ΜΒΜ. Καθεμιά ἀπό τίς μεθόδους αὐτές δίνει ἐκτιμητές πού ἔχουν ἐπιθυμητές στατιστικές ἰδιότητες.

Τό πρόβλημα τῆς ἐπιλογῆς ἀνάμεσα στίς τρεῖς αὐτές μεθόδους εἶναι εὔλογο νά ἀπασχολήσει τόν ἀναγνώστη. Ἡ ἀπάντηση, στήν περίπτωση πού καί οἱ τρεῖς μέθοδοι δίνουν τούς ἴδιους ἤ ἰσοδύναμους ἐκτιμητές, εἶναι νά προτιμηθεῖ ἐκείνη πού εἶναι ὑπολογιστικά εὐκολότερη. Ὅπως ἀναφέραμε στό σχετικό τμῆμα ἡ μέθοδος αὐτή εἶναι ἡ 2ΣΜΕΤ.

Ἡ πρακτική ἐφαρμογή τῶν ἄλλων μεθόδων περιορίζεται στίς περιπτώσεις πού δέν εἶναι δυνατή ἡ ἐφαρμογή τῆς 2ΣΜΕΤ.

Στό τμῆμα αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ τίς σχέσεις πού ὑπάρχουν ἀνάμεσα στούς ἐκτιμητές τῶν τριῶν μεθόδων.

Πρῶτα δείχνουμε τήν ἰσοδυναμία τῆς ΜΒΜ μέ τή 2ΣΜΕΤ.

Ἄν, στήν ἐξίσωση μέ τήν ὁποία ἀσχοληθήκαμε στά προηγούμενα τμήματα πάρουμε τή μήτρα Z τοῦ συνόλου τῶν προκαθορισμένων μεταβλητῶν τοῦ συστήματος καί ἄν ἰσχύει ἡ συνθήκη (Δ) (ἤ οἱ Δ_1, Δ_2) τοῦ Κεφαλαίου 2 καί ἄν, τέλος, ἡ ἐξίσωση εἶναι ταυτοποιημένη, εἶναι εὔκολο νά ἐλέγξουμε ὅτι ἡ μήτρα Z ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες (i) μέχρι καί (iv) τοῦ προηγούμενου τμήματος. Κατά συνέπεια μποροῦμε νά θέσουμε $\tilde{Z} = Z$, ὁπότε ὁ ἐκτιμητής (4.104) τῆς ΜΒΜ ταυτίζεται μέ τόν ἐκτιμητή (4.57) τῆς 2ΣΜΕΤ.

Ὅπως δείχνει ὁ Dhrymes (1970), σελ. 302, ὁ ἐκτιμητής τῆς 2ΣΜΕΤ εἶναι ἄριστος ἀσυμπτωτικά κανονικός στό σύνολο τῶν ἐκτιμητῶν τῆς ΜΒΜ.

Πρόταση 7. Ένας τουλάχιστον από τούς έκτιμητές τῆς ΕΜΕΤ ταυτίζεται μέ αὐτόν τῆς 2ΣΜΕΤ. Ἄν ἡ ἐξίσωση εἶναι ταυτοποιημένη, ὅλοι οἱ ἐκτιμητές τῆς ΕΜΕΤ εἶναι ἀσυμπτωτικά ἰσοδύναμοι μέ τόν ἐκτιμητή τῆς 2ΣΜΕΤ.

Ἀπόδειξη: Οἱ ἐξισώσεις (4.21) καί (4.22) ἀπό τίς ὁποῖες ὑπολογίζουμε τούς ἐκτιμητές τῆς ΕΜΕΤ γράφονται:

$$b_{n_1}(P_{n_1 m_1} \vdots P_{n_1 m_1^*}) = (-c_{m_1},\ o_{m_1^*}) \qquad (4.105)$$

ἤ μέ τό συμβολισμό τῶν (4.17), (4.24)

$$(1,\ -b_1')\begin{bmatrix}P_1\\ P_1\end{bmatrix} = (c_1',\ o') \qquad (4.106)$$

Ἀναστρέφοντας τή (4.106) καί ἀντικαθιστώντας ἀπό τή (4.18) ἔχουμε

$$(Z'Z)^{-1}Z'y_1 - (Z'Z)^{-1}Z'Y_1 b_1 = \begin{pmatrix}c_1\\ o\end{pmatrix} \qquad (4.107)$$

Πολλαπλασιάζουμε διαδοχικά ἀπό τά ἀριστερά τή (4.107) μέ τίς μῆτρες $Y_1'Z$, $Z_1'Z$ καί βρίσκουμε

$$Y_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_1 - Y_1Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 b_1 = Y_1'(Z_1 \vdots Z_1^*)\begin{pmatrix}c_1\\ o\end{pmatrix} \qquad (4.108)$$

$$Z_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_1 - Z_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 b_1 = Z_1'(Z_1 \vdots Z_1^*)\begin{pmatrix}c_1\\ o\end{pmatrix} \qquad (4.109)$$

Ἀνακατατάσσοντας τούς ὅρους τῶν (4.108) καί (4.109) καί παίρνοντας ὑπόψη τή (4.59) καταλήγουμε στό σύστημα

$$\begin{bmatrix}Y_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 & Y_1'Z_1\\ Z_1'Y_1 & Z_1'Z_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ c_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Y_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_1\\ Z_1'y_1\end{bmatrix} \qquad (4.110)$$

Όπως δείξαμε στό τμῆμα III αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου οἱ (4.110) εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῶν ἐκτιμητῶν τῆς 2ΣΜΕΤ. Τό διάνυσμα b_1 πού δίνεται ἀπό τίς ἐξισώσεις αὐτές εἶναι, φυσικά, μιά λύση τοῦ συστήματος (4.26). Αὐτό ἀποδείχνει τό πρῶτο μέρος τῆς Πρότασης 7.

Έστω b_1^* μιά ἄλλη λύση τοῦ συστήματος (4.26). Ἀντικαθιστώντας στή (4.26) τίς λύσεις b_1 καί b_1^* καί ἀφαιρώντας τήν πρώτη ἀπό τή δεύτερη, βρίσκουμε

$$P'_{(n_1-1)m_1^*}\left[\sqrt{T}(b_1^* - b_1)\right] = \sqrt{T}p'_{1m_1^*} - \sqrt{T}p'_{1m_1^*} = 0 \qquad (4.111)$$

Παίρνοντας τά ὅρια πιθανότητας τῆς (4.111) ἔχουμε

$$\Pi'_{(n_1-1)m_1^*}\left[\operatorname{plim} \sqrt{T}(b_1^* - b_1)\right] = 0 \qquad (4.112)$$

Ἄν ἡ ἐξίσωση εἶναι ταυτοποιημένη γνωρίζουμε (βλέπε τή (4.29)) ὅτι

$$r(\Pi'_{(n_1-1)m_1^*}) = n_1 - 1 \qquad (4.113)$$

καί, κατά συνέπεια

$$\operatorname{plim} \sqrt{T}(b_1^* - b_1) = 0 \qquad (4.114)$$

Ἄρα ὁ ἐκτιμητής b_1^* εἶναι ἀσυμπτωτικά ἰσοδύναμος μέ τόν ἐκτιμητή τῆς 2ΣΜΕΤ b_1.

Πόρισμα. Ἄν μιά ἐξίσωση εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένη, ὁ ἐκτιμητής τῆς ΕΜΕΤ ταυτίζεται μέ τόν ἐκτιμητή τῆς 2ΣΜΕΤ καθώς καί μέ τόν ἐκτιμητή τῆς ΜΒΜ γιά $\tilde{Z} = Z$ ἄν ἡ μήτρα $X_1'Z$ εἶναι μή ἰδιάζουσα.

Ἀπόδειξη: Ὅταν μιά ἐξίσωση εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένη ὁ ἐκτιμητής τῆς ΕΜΕΤ εἶναι μοναδικός. Ἑπομένως, σύμφωνα μέ τήν

Πρόταση 7, ταυτίζεται μέ τόν έκτιμητή τῆς 2ΣΜΕΤ, ὁ ὁποῖος γράφεται:

$$X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_1a_1 = X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_1 \qquad (4.115)$$

Όταν ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένη ἡ N_1xm μήτρα $X_1'Z$ εἶναι τετραγωνική καί ἄν εἶναι καί μή ἰδιάζουσα,τότε πολλαπλασιάζοντας τή (4.115) ἀπό τά ἀριστερά μέ τή μήτρα $(Z'Z)(X_1'Z)^{-1}$ ἔχουμε:

$$Z'X_1a_1 = Z'y_1 \qquad (4.116)$$

πού εἶναι ἡ (4.81) γιά Ƶ = Z.

Πρόταση 8. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες βαθμοῦ καί τάξης καί ἄν ἡ μήτρα $Y_1Z_1^{*\prime}$εἶναι μή ἰδιάζουσα, τότε ὁ ἐκτιμητής τῆς ΑΜΕΤ ταυτίζεται μέ τούς ἐκτιμητές τῆς ΕΜΕΤ, 2ΣΜΕΤ καί ΜΒΜ (γιά Ƶ = Z).

Ἀπόδειξη: Ἄν ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένη τότε ἡ μήτρα Z_1^* θά εἶναι $Tx(n_1-1)$ καί ἡ μήτρα $Y_1Z_1^{*\prime}$ὁρίζεται καί εἶναι TxT. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι καί μή ἰδιάζουσα, τότε:

$$(Y_1Z_1^{*\prime})^{-1}(Y_1Z_1^{*\prime}) = I_T \qquad (4.117)$$

Κατά συνέπεια:

$$Y_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 = Y'(Y_1Z_1^{*\prime})^{-1}(Y_1Z_1^{*\prime})Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 =$$

$$Y_1'(Y_1Z_1^{*\prime})^{-1}Y_1(0 \vdots I)\begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_1^{*\prime} \end{bmatrix}Y_1 = Y_1'(Y_1Z_1^{*\prime})^{-1}(Y_1Z_1^{*\prime})Y_1 =$$

$$Y_1'Y_1 \qquad (4.118)$$

Κατά παρόμοιο τρόπο ἀποδείχνουμε ὅτι

$$Y_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_1 = Y_1'y_1 \qquad (4.119)$$

'Αντικαθιστώντας τίς (4.118) καί (4.119) στή (4.110) βρίσκουμε

$$\begin{bmatrix} Y_1'Y_1 & Y_1'Z_1 \\ Z_1'Y_1 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1' \\ Z_1' \end{bmatrix} y_1 \tag{4.120}$$

ἤ μέ τό συμβολισμό τῆς (2.47)

$$X_1'X_1a_1 = X_1'y_1 \tag{4.121}$$

πού εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῆς ΑΜΕΤ.

VI. Οἱ ἐκτιμητές τάξης διπλοῦ k , τάξης k καί τάξης h

Ἕνας ἐκτιμητής ἀνάλογος, στή μορφή, μέ τόν ἐκτιμητή 2ΣΜΕΤ, εἶναι ὁ ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} Y_1'Y_1 - k_1\hat{V}_1'\hat{V}_1 & Y_1'Z_1 \\ Z_1'Y_1 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1(k_1, k_2) \\ c_1(k_1, k_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1'y_1 - k_2\hat{V}_1'\hat{v}_1 \\ Z_1'y_1 \end{bmatrix} \tag{4.122}$$

ὅπου k_1, k_2 εἶναι (στοχαστικές ἤ μή) μεταβλητές πού συνήθως θεωροῦνται συνάρτηση τοῦ μεγέθους τοῦ δείγματος.

Οἱ (4.122) ὀνομάζονται **ἐκτιμητές τάξης διπλοῦ** k (double k-class estimators).

Ἄν στή (4.122) θέσουμε

$$k_1 = k_2 = k \tag{4.123}$$

τότε ἔχουμε τούς **ἐκτιμητές τάξης** k (k-class estimators).

Τέλος ἄν θέσουμε:

$$k_1 = h(2 - h) \ , \quad k_2 = h \tag{4.124}$$

ἔχουμε τούς **ἐκτιμητές τάξης** h (h-class estimators).

Ὅλοι οἱ παραπάνω ἐκτιμητές ἔχουν χρησιμοποιηθεῖ, κατά κύριο λόγο, σέ θεωρητικές ἐργασίες (βλ., π.χ. Nagar (1959, 1962), Theil (1971),σελ.353).

Ἀπό τά τρία εἴδη ἐκτιμητῶν, περισσότερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ ἐκτιμητές τάξης k. Πραγματικά ἄν θέσουμε

$$k = 0 \tag{4.125}$$

ὁ ἐκτιμητής τάξης 0 ταυτίζεται μέ τόν ἐκτιμητή τῆς ΑΜΕΤ. Ἐνῶ ἄν θέσουμε:

$$k = 1 \tag{4.126}$$

ὁ ἐκτιμητής τάξης 1 ταυτίζεται μέ τόν ἐκτιμητή τῆς 2ΣΜΕΤ.

Ἕνας χρήσιμος μετασχηματισμός στούς ἐκτιμητές τάξης k εἶναι ὁ παρακάτω:

Ἔστω:

$$k = \frac{1}{1 - v} \quad \text{ἤ} \quad v = 1 - \frac{1}{k} \tag{4.127}$$

Ἀντικαθιστώντας τήν (4.127) στή (4.122) καί πολλαπλασιάζοντας τήν ἐξίσωση πού προκύπτει μέ (1 - v) βρίσκουμε:

$$\left(\begin{bmatrix} Y_1'Y_1 - \hat{V}_1'\hat{V}_1 & Y_1'Z_1 \\ Z_1'Y_1 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix} - v\begin{bmatrix} Y_1'Y_1 & Y_1'Z_1 \\ Z_1Y_1 & Z_1'Z_1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} b_1(k) \\ c_1(k) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} Y_1'y_1 - \hat{V}_1'\hat{v}_1 \\ Z_1'y_1 \end{bmatrix} - v\begin{bmatrix} Y_1'y_1 \\ Z_1y_1 \end{bmatrix} \tag{4.128}$$

Ἡ πρώτη μήτρα στό ἀριστερό σκέλος τῆς (4.128) καί τό πρῶτο διάνυσμα στό δεξιό σκέλος τῆς ἴδιας σχέσης εἶναι τά ἴδια μέ ἐκεῖνα τοῦ ἐκτιμητῆ τῆς 2ΣΜΕΤ. Κατά συνέπεια, χρησιμοποιώντας τά ἀποτελέσματα πού βρήκαμε στό τμῆμα II τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ μποροῦμε νά γράψουμε τήν (4.128) ὡς ἑξῆς:

$$[X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_1 - v(X_1'X_1)]a_1(k) =$$

$$X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_1 - v(X_1'y_1) \qquad (4.129)$$

Οἱ ἐκτιμητές τάξης k χρησιμοποιοῦνται γιά τή μελέτη τῶν ροπῶν καί κατανομῶν τῶν ἐκτιμητῶν γιά μικρά δείγματα (βλ.π.χ. Nagar(1959, 1961), Quandt (1965), Sargan (1974, 1975) κ.λ.π.) Μιά σύντομη ἀνάλυση καί κριτική τῶν μεθόδων αὐτῶν ὑπάρχει στόν Dhrymes (1970),σελ.203-205.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Εἰσαγωγή

Στό Κεφάλαιο αὐτό, ἀντί νά πάρουμε μιά μόνο ἐξίσωση (ὅπως κάναμε στό προηγούμενο Κεφάλαιο), παίρνουμε ὅλες τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων πού ἐξετάσαμε στά Κεφάλαια 2 καί 3 καί χρησιμοποιοῦμε ὅλες τίς πληροφορίες πού περιέχονται στό σύστημα γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῶν ἐξισώσεών του.

Ἡ διάταξη τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ εἶναι παρόμοια μέ ἐκείνη τοῦ προηγούμενου. Ἀφοῦ δώσουμε τόν ἀναγκαῖο συμβολισμό, ἀναπτύσσουμε τίς μεθόδους ἐκτίμησης τῶν παραμέτρων ὅλων τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος. Οἱ μέθοδοι αὐτές εἶναι:

Ἡ μέθοδος ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια,
ἡ μέθοδος ἐλάχιστων τετραγώνων σέ τρία στάδια, καί
ἡ μέθοδος τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν.

Μετά τήν ἀνάπτυξη τῶν μεθόδων αὐτῶν, κάνουμε ὁρισμένες συγκρίσεις σχετικά μέ τήν ἀποτελεσματικότητά τους, τόσο γενικά ὅσο καί γιά ειδικές περιπτώσεις.

Ἐκτός ἀπό τίς μεθόδους πού ἀναλύονται στό Κεφάλαιο αὐτό, γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων ἑνός συστήματος, ὑπάρχει καί ἡ μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ ὅλες τίς πληροφορίες. Μέ αὐτήν θά ἀσχοληθοῦμε στό τελευταῖο Κεφάλαιο αὐτοῦ τοῦ Τόμου.

I. Συμβολισμός ἑνός συστήματος μέ τή μορφή μιᾶς ἐξίσωσης

Τό ὑπόδειγμα τῆς 'Επιτροπῆς Cowles, ὅπως εἴδαμε στό Κεφάλαιο 2, περιλαμβάνει n ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$y_i = Y_i\beta_i + Z_i\gamma_i + u_i = X_i\alpha_i + u_i \ , \ i = 1,2,\ldots,n \qquad (5.1)$$

Ἄν θέσουμε:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad (5.2)$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & & & & \\ & X_2 & & 0 & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & & \cdot & \\ & & & & & X_n \end{bmatrix} \qquad (5.3)$$

μποροῦμε νά γράψουμε ὁλόκληρο τό σύστημα σάν μιά ἐξίσωση:

$$y = X\alpha + u \qquad (5.4)$$

ὅπου y καί u εἶναι (nT)x1 διανύσματα.

Ἄν θέσουμε:

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i = \sum_{i=1}^{n}(n_i + m_i - 1) \qquad (5.5)$$

τότε α εἶναι Nx1 διάνυσμα καί X μιά (nT)xN διαγώνια μήτρα μέ στοιχεῖα μῆτρες (block diagonal matrix) στήν ὁποία τά μηδενικά δεξιά καί ἀριστερά ἀπό τή διαγώνιο σημαίνουν ὅτι ὅλα τά σχετικά στοιχεῖα εἶναι ἴσα μέ τό μηδέν.

Τούς παραπάνω ὁρισμούς θά πρέπει νά τούς ἔχουμε συνεχῶς ὑπόψη γιά νά ἀποφεύγεται ὁποιαδήποτε σύγχυση μέ τό ὑπόδειγμα μιᾶς ἐξίσωσης. Τό διάνυσμα α κάνει ξεκάθαρη τή διάκριση αὐτή.

Σύμφωνα μέ τή (2.50)

$$E(u_i u_j') = \sigma_{ij} I_T \qquad (5.6)$$

κατά συνέπεια ἡ μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης τῶν διαταρακτικῶν ὅρων τῆς (5.4) εἶναι

$$E(uu') = \begin{bmatrix} E(u_1u_1') & E(u_1u_2') & \cdots\cdots & E(u_1u_n') \\ E(u_2u_1') & E(u_2u_2') & \cdots\cdots & E(u_2u_n') \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ E(u_nu_1') & E(u_nu_2') & \cdots\cdots & E(u_nu_n') \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}I_T & \sigma_{12}I_T & \cdots\cdots & \sigma_{1n}I_T \\ \sigma_{21}I_T & \sigma_{22}I_T & \cdots\cdots & \sigma_{2n}I_T \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ . & . & \cdots\cdots & . \\ \sigma_{n1}I_T & \sigma_{n2}I_T & \cdots\cdots & \sigma_{nn}I_T \end{bmatrix} = \Sigma \otimes I_T \qquad (5.7)$$

II. Ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια

Μιά μέθοδος μέ τήν ὁποία μποροῦν νά ἐκτιμηθοῦν οἱ παράμετροι τοῦ συστήματος (5.4) εἶναι ἡ 2ΣΜΕΤ. Ἐφαρμόζουμε, δηλαδή, τή 2ΣΜΕΤ γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς καθεμιᾶς ἐξίσωσης τοῦ συστήματος αὐτοῦ.

Ἀπό τό προηγούμενο Κεφάλαιο γνωρίζουμε ὅτι οἱ ἐκτιμητές τῆς 2ΣΜΕΤ ἔχουν ὁρισμένες ἐπιθυμητές στατιστικές ἰδιότητες. Συγκεκριμένα:

(α) Ἄν ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ταυτοποιημένες, οἱ ἐκτιμητές θά εἶναι συνεπεῖς, καί

(β) γιά κάθε ἐξίσωση χωριστά οἱ ἐκτιμητές εἶναι ἄριστοι, ἀσυμπτωτικά κανονικοί στό σύνολο ὅλων τῶν ἐκτιμητῶν τῆς ΜΒΜ.

Ἔστω Z ἡ μήτρα ὅλων τῶν προκαθορισμένων μεταβλητῶν τοῦ συστήματος. Πολλαπλασιάζοντας τή (5.4) ἀπό τά ἀριστερά μέ τή μήτρα:

$$(I_n \otimes Z') \tag{5.8}$$

ἔχουμε

$$(I \otimes Z')y = (I \otimes Z')X\alpha + (I \otimes Z')u \tag{5.9}$$

Ἐφόσον, σύμφωνα μέ τήν Πρόταση 1 τοῦ Κεφαλαίου 2 ἡ μήτρα

$$\frac{1}{T}(I \otimes Z')X \tag{5.10}$$

συγκλίνει κατά πιθανότητα σέ μιά μή στοχαστική μήτρα, μποροῦμε νά προχωρήσουμε στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων καθεμιᾶς ἐξίσωσης τοῦ συστήματος (5.4) μέ τή 2ΣΜΕΤ.

Πρόταση 1. Ἡ ἐκτίμηση τῶν διαρθρωτικῶν παραμέτρων τοῦ συστήματος (5.4) μέ τήν ἐφαρμογή τῆς 2ΣΜΕΤ σέ καθεμιά ἐξίσωση χωριστά ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἐφαρμογή τῆς ΓΜΕΤ στή (5.9) κάτω ἀπό τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ μήτρα

$$\Sigma = \sigma^2 I \tag{5.11}$$

Ἀπόδειξη: Γιά νά ἁπλουστεύσουμε τήν ἀπόδειξη ὑποθέτουμε ὅτι ἡ μήτρα Z εἶναι μή στοχαστική. Κάτω ἀπό τήν ὑπόθεση αὐτή ἡ μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης τοῦ διαταρακτικοῦ ὅρου τῆς (5.9) εἶναι:

$$\mathrm{Var}((I \otimes Z')u) = E[(I \otimes Z')uu'(I \otimes Z)]$$

$$(I \otimes Z')E(uu')(I \otimes Z) = (I \otimes Z')(\Sigma \otimes I)(I \otimes Z) \tag{5.12}$$

Ἀντικαθιστώντας τή (5.11) στή (5.12) ἔχουμε:

$$\mathrm{Var}((I \otimes Z')u) = \sigma^2(I \otimes Z'Z) \tag{5.13}$$

Ἡ (5.13) σέ συνδυασμό μέ τήν Πρόταση 1 τοῦ Κεφαλαίου 2 γιά τή μήτρα (5.10) μᾶς ἐπιτρέπει τήν ἐφαρμογή τῆς ΓΜΕΤ στή (5.9). Οἱ κανονικές ἐξισώσεις πού προκύπτουν ἀπό τήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου αὐτῆς στή (5.9) εἶναι:

$$[X'(I \otimes Z)(I \otimes Z'Z)^{-1}(I \otimes Z')X]a =$$

$$X'(I \otimes Z)(I \otimes Z'Z)^{-1}(I \otimes Z')y \tag{5.14}$$

ἤ

$$[X'(I \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')X]a = X'(I \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')y \tag{5.15}$$

ὅπου

$$a' = (a_1' \,,\, a_2' \,,\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\, a_n') \tag{5.16}$$

εἶναι ὁ ἐκτιμητής τοῦ διανύσματος **α**.

Ἄν στή (5.15) κάνουμε τίς ἀναγκαῖες ἀντικαταστάσεις ἀπό τίς (5.2) καί (5.3) καί ἐκτελέσουμε τίς πράξεις, βρίσκουμε τίς έξισώσεις:

$$X_i'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_i a_i = X_i Z(Z'Z)^{-1}Z'y_i \quad , \; i \quad 1,2,\ldots,n \qquad (5.17)$$

πού εἶναι οἱ κανονικές ἐξισώσεις τῆς 2ΣΜΕΤ γιά καθεμιά ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (5.4).

Σέ ἀναλογία μέ τό προηγούμενο Κεφάλαιο μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἡ παρακάτω Πρόταση γιά τούς ἐκτιμητές 2ΣΜΕΤ πού ἐξετάζουμε στό τμῆμα αὐτό:

Πρόταση 2. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Α) μέχρι (Δ) (ἤ, ἀντί τῆς (Δ) οἱ (Δ_1, Δ_2)) τοῦ Κεφαλαίου 2 καί ἄν ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ταυτοποιημένες, τότε ὁ ἐκτιμητής (5.15) εἶναι ἀσυμπτωτικά κανονικός:

$$\sqrt{T}(a - \alpha) \xrightarrow{d} \qquad (5.18)$$
$$N(o, \; [K(I \otimes M^{-1})K']^{-1} \; [K(\Sigma \otimes M^{-1})K'][K(I \otimes M^{-1})K']^{-1})$$

ὅπου

$$K \; = \; \text{plim} \; \frac{1}{T}X'(I \otimes Z) \qquad (5.19)$$

Ἐπίσης ἕνας συνεπής ἐκτιμητής τῶν

σ_{ij} , $i,j = 1,2,\ldots\ldots,n$

εἰναι ὁ

$$s_{ij} = \frac{1}{T}(y_i - X_i a_i)'(y_j - X_j a_j) \; , \; i,j = 1,2,\ldots,n \qquad (5.20)$$

ὅπου

a_i, a_j

εἶναι στοιχεῖα τοῦ διανύσματος (5.16).

III. Ἡ μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ τρία στάδια

Μιά ἄλλη μέθοδος πού μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων ἑνός συστήματος εἶναι ἡ **μέθοδος ἐλάχιστων τετραγώνων σέ τρία στάδια** (3ΣΜΕΤ) (Three-stage least squares). Ἡ μέθοδος αὐτή παρουσιάστηκε γιά πρώτη φορά ἀπό τούς Zellner and Theil (1962), ἀλλά ἡ παρουσίασή της στό τμῆμα αὐτό θά εἶναι παρόμοια μέ ἐκείνη τῆς 2ΣΜΕΤ τόσο στό Κεφάλαιο 4 ὅσο καί στό προηγούμενο τμῆμα (σχετικά βλέπε καί Dhrymes (1970), σελ. 209-219), Theil (1971),σελ.508-511, Drettakis (1973) κ.ἄ.)

Ὅπως εἴδαμε στό προηγούμενοτμῆμα ἡ 2ΣΜΕΤ ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἐφαρμογή τῆς ΓΜΕΤ στή (5.9) στήν περίπτωση πού ἡ μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης τοῦ διαταρακτικοῦ ὅρου τῆς ἐξίσωσης (5.4) ἔχει τή μορφή:

$$\sigma^2(I_n \otimes I_T) \tag{5.21}$$

Ἄν, ὅμως, ἰσχύει ἡ (5.7) καί ὑποθέσουμε ὅτιἡ μήτρα Z εἶναι μή στοχαστική, ἡ μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης τοῦ διαταρακτικοῦ ὅρου τῆς (5.9) εἶναι:

$$E\left[(I \otimes Z')uu'(I \otimes Z)\right]= (I \otimes Z')E(uu')(I \otimes Z) =$$

$$(I \otimes Z')(\Sigma \otimes I)(I \otimes Z) = \Sigma \otimes Z'Z \tag{5.22}$$

Ἄν ἡ μήτρα Z περιλαμβάνει καί ἐνδογενεῖς μεταβλητές μέ χρονικές ὑστερήσεις μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι ἡ (5.22) ἰσχύει γιά μεγάλα δείγματα(βλέπε καί προηγούμενο Κεφάλαιο).

Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ (5.19) καί (5.22) ἐφαρμόζουμε τή ΓΜΕΤ γιά τήν ἐκτίμηση τῆς (5.9). Οἱ κανονικές ἐξισώσεις στήν περίπτωση αὐτή εἶναι:

$$[X'(I \otimes Z)(\Sigma \otimes Z'Z)^{-1}(I \otimes Z')X]a = X'(I \otimes Z)(\Sigma \otimes Z'Z)^{-1}(I \otimes Z')y \tag{5.23}$$

ἤ

$$[X'(\Sigma^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')X]a = X'(\Sigma^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')y \tag{5.24}$$

Ἄν ἡ μήτρα Σ εἶναι γνωστή, γιά νά ὑπάρξουν οἱ ἐξισώσεις (5.24) θά πρέπει νά ὑπάρχει ἡ Σ^{-1}. Ἡ τελευταία αὐτή μήτρα δέν ὑπάρχει, δηλαδή ἡ μήτρα Σ εἶναι ἰδιάζουσα, ἄν στό σύστημα (5.9) ὑπάρχουν ταυτότητες.Στήν περίπτωση αὐτή (βλέπε καί παρατηρήσεις στό τέλος τοῦ Κεφαλαίου 3) παίρνουμε τή μή ἰδιάζουσα κύρια ὑπομήτρα τῆς Σ πού ἀντιστοιχεῖ στίς στοχαστικές ἐξισώσεις.

Ἄν (ὅπως συμβαίνει στήν πράξη) ἡ μήτρα Σ εἶναι ἄγνωστη, χρησιμοποιοῦμε τόν ἐκτιμητή της

$$S = (s_{ij}) \tag{5.25}$$

ὅπου τά στοιχεῖα τῆς μήτρας (5.25) ὁρίζονται μέ τή (5.20). Στήν περίπτωση αὐτή ὁ ἐκτιμητής τῆς 3ΣΜΕΤ εἶναι

$$\boxed{[X'(S^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')X]a = X'(S^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')y} \tag{5.26}$$

Ὁ ἐκτιμητής (5.26) ὀνομάστηκε ἐκτιμητής 3ΣΜΕΤ γιατί ὑπάρχουν τρία στάδια στόν ὑπολογισμό του. Τά στάδια αὐτά εἶναι:

(i) Ἐκτίμηση τῶν ἐξισώσεων (5.1) μέ τή 2ΣΜΕΤ,

(ii) ὑπολογισμός τῶν s_{ij} μέ τίς (5.20), καί

(iii) σχηματισμός τῆς μήτρας S καί ὑπολογισμός τοῦ ἐκτιμητῆ τῆς 3ΣΜΕΤ μέ τή (5.26).

Σέ ἀναλογία μέ τή 2ΣΜΕΤ ἔχουμε καί γιά τούς ἐκτιμητές τῆς 3ΣΜΕΤ τίς παρακάτω Προτάσεις (βλ. καί Dhrymes(1970), σελ. 211-219) καί Hatanaka (1977))

Πρόταση 3. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Α) μέχρι καί (Δ) (ἤ ἀντί τῆς (Δ) οἱ (Δ_1, Δ_2))τοῦ Κεφαλαίου 2, ὁ ἐκτιμητής τῆς 3ΣΜΕΤ εἶναι συνεπής ὅταν καί μόνο ὅταν τό σύστημα εἶναι ταυτοποιημένο.

Πρόταση 4. Ἄν ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Α) μέχρι καί (Δ) (ἤ ἀντί τῆς (Δ) οἱ (Δ_1,Δ_2)) τοῦ Κεφαλαίου 2 καί ἄν τό σύστημα εἶναι ταυτοποιημένο, ὁ ἐκτιμητής τῆς 3ΣΜΕΤ εἶναι ἀσυμπτωτικά κανονικός:

$$\sqrt{T}(a - \alpha) \xrightarrow{d} N\left(o, \ \left[K(\Sigma^{-1} \otimes M^{-1})K'\right]^{-1}\right) \tag{5.27}$$

Πόρισμα. Ἄν ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις τῆς προηγούμενης Πρότασης καί ἄν a_s, α_s εἶναι sx1 ὑποδιανύσματα τῶν a ,α καί V_s εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ὑπομήτρα τῆς μήτρας

$$V = [X'(S^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')X]^{-1} \tag{5.28}$$

τότε

$$(a_s - \alpha_s)' V_s^{-1}(a_s - \alpha_s) \xrightarrow{d} \chi_s^2 \tag{5.29}$$

Οἱ ἔλεγχοι τοῦ ἐκτιμητῆ τῆς 3ΣΜΕΤ a ἤ ἑνός ὑποδιανύσματος a_s ἤ ἑνός μόνο στοιχείου τοῦ διανύσματος γίνονται ἀκριβῶς ὅπως καί στήν περίπτωση τῶν ἐκτιμητῶν τῆς 2ΣΜΕΤ.

Οἱ ἔλεγχοι στή 3ΣΜΕΤ εἶναι ἀσυμπτωτικά ἰσοδύναμοι μέ αὐτούς τῆς 2ΣΜΕΤ, ἄν καί, ἐξαιτίας τῆς μεγαλύτερης ἀποτελεσματικότητας τῶν ἐκτιμητῶν τῆς 3ΣΜΕΤ,περιμένουμε νά ἔχουμε πιό ἀκριβῆ ἀποτελέσματα ἀπό ἐκεῖνα τῆς 2ΣΜΕΤ γιά μικρά δείγματα.

IV. Ἡ μέθοδος τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν

Μιά τρίτη μέθοδος γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων ἑνός συστήματος εἶναι ἡ ἐκείνη τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν (MBM).

Γιά τήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου αὐτῆς ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα σύνολο βοηθητικῶν μεταβλητῶν πού περιέχονται στή TxG μήτρα Z , τέτοιο ὥστε οἱ συνθῆκες (i) μέχρι καί (iv) τοῦ τμήματος IV τοῦ Κεφαλαίου 4 νά ἰσχύουν γιά ὅλες τίς n ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Ἡ μήτρα:

$$I_n \otimes Z \tag{5.30}$$

ἀποτελεῖ ἕνα σύνολο βοηθητικῶν μεταβλητῶν γιά τό σύστημα (5.4) μέ τήν ἔννοια ὅτι ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες (i) μέχρι καί (iv). Πραγματικά:

$$\operatorname{plim} \frac{1}{T} X'(I \otimes Z) = \operatorname{plim} \frac{1}{T} \begin{bmatrix} X_1'Z & & & \\ & X_2'Z & & 0 \\ & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot \\ & & & X_n'Z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{K}_1 & & & 0 \\ & \bar{K}_2 & & \\ & & \cdot & \\ & 0 & & \cdot \\ & & & \bar{K}_n \end{bmatrix} = \bar{K} \tag{5.31}$$

καί

$$r(\bar{K}) = \sum_{i=1}^{n} r(\bar{K}_i) = \sum_{i=1}^{n} N_i = N \tag{5.32}$$

$$\text{plim}\ \frac{1}{T}\ (I \otimes Z')u = \text{plim}\ \frac{1}{T} \begin{bmatrix} Z'u_1 \\ Z'u_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ Z'u_n \end{bmatrix} = o \qquad (5.33)$$

καί

$$\text{plim}\ \frac{1}{T}(I \otimes Z')(I \otimes Z) = \text{plim}(I \otimes \frac{1}{T}\ Z'Z) = (I \otimes \bar{M}) \qquad (5.34)$$

Οἱ βοηθητικές μεταβλητές εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπό τούς διαταρακτικούς ὅρους τῆς ἴδιας χρονικῆς περιόδου (contemporaneous disturbances). Κατά συνέπεια (βλέπε καί Πρόταση 3 τοῦ Κεφαλαίου 2) ἔχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\ (I \otimes Z')u \ = \frac{1}{\sqrt{T}}\ \text{vec}\ U'Z \xrightarrow{d} N(o,\ \Sigma \otimes \bar{M}\ ) \qquad (5.35)$$

Ὁ ἀριθμός τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν στή μήτρα $(I \otimes Z)$ εἶναι :

$$nG > N \qquad (5.36)$$

Παίρνοντας μιά nGxN μήτρα L τέτοια ὥστε

$$\text{plim}\ L \ = \ \bar{L} \qquad (5.37)$$

ὅπου

$\bar{L}$

εἶναι μιά σταθερή μήτρα τέτοια ὥστε:

$$r(\bar{L}) = r(\bar{K}\bar{L}) = N \tag{5.38}$$

πολλαπλασιάζουμε τή μήτρα (5.30) ἀπό τά δεξιά μέ τή μήτρα L καί ἔχουμε

$$(I \otimes Z)L \tag{5.39}$$

Στή συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τή (5.4) μέ τή ἀνάστροφη τῆς μήτρας (5.39) ἀπό τά ἀριστερά καί βρίσκουμε:

$$L'(I \otimes Z')y = L'(I \otimes Z')X\alpha + L'(I \otimes Z')u \tag{5.40}$$

Ἄν ἡ μήτρα $L'(I \otimes Z')X$ εἶναι μή ἰδιάζουσα, ὁ ἐκτιμητής τῶν παραμέτρων τῆς (5.4) μέ τή ΜΒΜ εἶναι:

$$a^* = (L'(I \otimes Z')X)^{-1}L'(I \otimes Z')y \tag{5.41}$$

Μιά σύγκριση ἀνάμεσα στή (5.41) καί στή (4.84) δείχνει ὅτι ὁ (5.41) εἶναι ἡ γενική μορφή τοῦ ἐκτιμητῆ τοῦ συστήματος (5.4) μέ τή ΜΒΜ, γι'αὐτό καί τό συμβολίζουμε μέ ἕνα *, ὅπως καί τόν (4.84).

Κατά τρόπο ἀνάλογο μέ τήν περίπτωση τῆς μιᾶς ἐξίσωσης (βλέπε τμῆμα IV τοῦ Κεφαλαίου 4), γιά τό γενικό ἐκτιμητή (5.41) τῆς (5.4) μέ τή ΜΒΜ ἰσχύουν οἱ παρακάτω Προτάσεις:

Πρόταση 5. Ἐφόσον ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις πού ἀναφέρθηκαν πιό πάνω ὁ ἐκτιμητής (5.41) εἶναι συνεπής καί

$$\sqrt{}(a^* - \alpha) \xrightarrow{d} N(o, (\bar{L}'\bar{K}')^{-1}\bar{L}'(\Sigma \otimes \bar{M})\bar{L}(\bar{K}\bar{L})^{-1}) \tag{5.42}$$

Πρόταση 6. Στό σύνολο ὅλων τῶν γραμμικῶν μετασχηματισμῶν τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν (5.30) πού ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη (5.38) ἄριστος εἶναι ὁ μετασχηματισμός πού δίνεται στή μήτρα:

$$\bar{L}_o = (\Sigma^{-1} \otimes \bar{M}^{-1})\bar{K}'[\bar{K}(\Sigma^{-1} \otimes \bar{M}^{-1})\bar{K}']^{-1} \tag{5.43}$$

Μέ βάση τήν Πρόταση 6 εὔκολα μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ τό παρακάτω Πόρισμα:

Πόρισμα. Γιά ἕνα σύνολο βοηθητικῶν μεταβλητῶν Ζ πού ἱκανοποιοῦν τίς συνθῆκες πού προαναφέρθηκαν ὁ ἐκτιμητής:

$$\hat{\alpha} = [X'(S^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')X]^{-1} X'(S^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')y \quad (5.44)$$

ὅπου ἡ μήτρα

$$S$$

εἶναι ἕνας συνεπής ἐκτιμητής τῆς μήτρας Σ , εἶναι ἄριστος ἀσυμπτωτικά κανονικός στό σύνολο ὅλων τῶν ἐκτιμητῶν τῆς ΜΒΜ

Γιά νά ὑπάρχει ἀναλογία μέ τή 3ΣΜΕΤ ἡ μήτρα S στή (5.44) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ἐκείνη πού ὑπολογίζεται ἀπό τά κατάλοιπα πού προκύπτουν ἀπό τήν ἐφαρμογή τῆς ΜΒΜ σέ καθεμιά ἐξίσωση τοῦ συστήματος (5.4) χωριστά.

Ἄν καί δέν ἀσχοληθήκαμε στό Κεφάλαιο αὐτό μέ τήν ἐφαρμογή τῆς ΕΜΕΤ γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τοῦ συστήματος (5.4), ἐν τούτοις εἶναι αὐτονόητο ὅτι,ἄν ἡ καθεμιά ἀπό τίς ἐξισώσεις (5.1) πού συναπαρτίζουν τό σύστημα αὐτό ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες πού ἀναφέρθηκαν στό τμῆμα Ι τοῦ Κεφαλαίου 4, ἡ ΕΜΕΤ μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ καί γιά ὁλόκληρο τό σύστημα.

V. Συγκρίσεις τῶν ἐκτιμητῶν μέ τίς διάφορες μεθόδους

Στό τμῆμα αὐτό θά ἐξετάσουμε τή σχετική ἀποτελεσματικότητα τῶν ἐκτιμητῶν πού δόθηκαν στό Κεφάλαιο αὐτό , τόσο μεταξύ τους ὅσο καί σέ σχέση μέ τούς ἐκτιμητές πού δόθηκαν στό Κεφάλαιο 4.

Τό πρῶτο πού θά πρέπει νά ἀναφερθεῖ εἶναι ὅτι ὁ ἐκτιμητής τῆς 3ΣΜΕΤ εἶναι ἄριστος ἀσυμπτωτικά κανονικός στό σύνολο ὅλων τῶν ἐκτιμητῶν τῆς ΜΒΜ (βλέπε καί τμῆμα V τοῦ Κεφαλαίου 4 γιά ἀνάλογη ἰδιότητα τοῦ ἐκτιμητῆ τῆς 2ΣΜΕΤ σέ σύγκριση μέ τόν ἐκτιμητή τῆς ΜΒΜ στήν περίπτωση τῆς μιᾶς ἐξίσωσης)

'Η παραπάνω ἰδιότητα τοῦ ἐκτιμητῆ τῆς 3ΣΜΕΤ σημαίνει ὅτι στήν πράξη ἡ ΜΒΜ δέν χρησιμοποιεῖται γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων ἑνός συστήματος παρά μόνο σέ εἰδικές περιπτώσεις στίς ὁποῖες ἡ 3ΣΜΕΤ δέν δίνει συνεπεῖς ἐκτιμητές. Π.χ. στήν περίπτωση πού ὁρισμένες προκαθορισμένες μεταβλητές ἔχουν λάθη μέτρησης πού συσχετίζονται μέ τούς διαταρακτικούς ὅρους τοῦ ὑποδείγματος.

Πρόταση 7. 'Ο ἐκτιμητής τῆς 3ΣΜΕΤ εἶναι τουλάχιστον τόσο ἀποτελεσματικός ὅσο καί ὁ ἐκτιμητής τῆς 2ΣΜΕΤ.

'Απόδειξη: Βλέπε Dhrymes (1970), σελ. 216-217.

Μέ τρόπο ἀνάλογο μέ ἐκεῖνο τῆς παραπάνω Πρότασης μπορεῖ νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἐκτιμητής τῆς ΜΒΜ γιά ὁλόκληρο τό σύστημα εἶναι, γενικά, πιό ἀποτελεσματικός ἀπό τόν ἐκτιμητή τῆς ΜΒΜ, ὅταν ἡ μέθοδος αὐτή ἐφαρμόζεται χωριστά σέ καθεμιά ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (5.4).

Πρόταση 8. 'Ο ἐκτιμητής τῆς 3ΣΜΕΤ ταυτίζεται μέ τόν ἐκτιμητή τῆς 2ΣΜΕΤ ὅταν

(α) ἡ μήτρα Σ εἶναι διαγώνια, ἤ ὅταν

(β) ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένες.

'Απόδειξη: Ὅταν ἡ μήτρα Σ εἶναι διαγώνια, καί ἡ ἀντίστροφή της εἶναι ἐπίσης διαγώνια μήτρα μέ στοιχεῖα τά ἀντίστροφα τῶν στοιχείων τῆς ἀρχικῆς μήτρας. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ (5.24) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_1 & & & & 0 \\ & \sigma_{22}^{-1} X_2'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & \\ & & & & \sigma_{nn}^{-1} X_n'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^{-1} X_1'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_1 \\ \sigma_{22}^{-1} X_2'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{nn}^{-1} X_n'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_n \end{bmatrix} \tag{5.45}$$

Ἀπό τή (5.45) βρίσκουμε τούς ἐκτιμητές τῆς 3ΣΜΕΤ:

$$a_i = [X_i'Z(Z'Z)^{-1}Z'X_i]^{-1}X_i'Z(Z'Z)^{-1}Z'y_i, i = 1,2,\ldots,n \tag{5.46}$$

πού εἶναι οἱ ἐκτιμητές τῆς 2ΣΜΕΤ.

Ἄν ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένες τότε ἡ μήτρα:

$$G = X'(I \otimes Z) \tag{5.47}$$

εἶναι μή ἰδιάζουσα. Ἀντικαθιστώντας τή (5.47) στή (5.23) καί λύνοντας ὡς πρός a παίρνουμε:

$$a = \left[G'(\Sigma^{-1}\otimes(Z'Z)^{-1})G\right]^{-1}G\,(\Sigma^{-1}\otimes(Z'Z)^{-1})(I\otimes Z')y =$$

$$= G^{-1}(\Sigma^{-1}\otimes(Z'Z)^{-1})^{-1}G'^{-1}\,G'(\Sigma^{-1}\otimes(Z'Z)^{-1})(I\otimes Z')y =$$

$$= G^{-1}(\Sigma\otimes Z'Z)(\Sigma^{-1}\otimes(Z'Z)^{-1})(I\otimes Z')y =$$

$$= G^{-1}(I\otimes Z')y \qquad (5.48)$$

Ἡ (5.48),ἀναλυτικότερα,γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'X_1 & & & & \\ & Z'X_2 & & 0 & \\ & & \cdot & & \\ & 0 & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & & Z'X_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z'y_1 \\ Z'y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z'y_n \end{bmatrix} \qquad (5.49)$$

Ἡ (5.49) δίνει τίς παρακάτω ἐξισώσεις:

$$a_i = (Z'X_i)^{-1}Z'y_i \ , \ i = 1,2,\ldots\ldots,n \qquad (5.50)$$

πού εἶναι οἱ ἐκτιμητές τῆς 2ΣΜΕΤ στήν περίπτωση πού ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (5.4) εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένες (βλέπε καί (4.116)).

Ἐκτός ἀπό τήν περίπτωση τῆς Πρότασης 8, ἔχουμε καί τήν περίπτωση ὅπου ἡ μήτρα Σ εἶναι διαγώνια μέ στοιχεῖα τετραγωνικές καί μή ιδιάζουσες. Στήν περίπτωση αυτή, καθώς καί στήν περίπτωση πού μερικές εξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένες ἔχουμε σημαντική οἰκονομία στούς ὑπολογισμούς. Σχετικές μέ τίς παραπάνω περιπτώσεις εἶναι καί οἱ παρακάτω Προτάσεις:

Πρόταση 9. Ἄν ἡ μήτρα Σ εἶναι διαγώνια μέ στοιχεῖα τετραγωνικές καί μή ιδιάζουσες μῆτρες, ἡ ἐφαρμογή τῆς 3ΣΜΕΤ σ'ὁλόκληρο τό σύστημα ἰσοδυναμεῖ μέ τήν ἐφαρμογή τῆς ἴδιας μεθόδου σέ κάθε ὑποσύστημα χωριστά.

Ἀπόδειξη: Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ διαταρακτικοί τῶν πρώτων n_1 εξισώσεων εἶναι ἀσυσχέτιστοι μέ τούς διαταρακτικούς ὅρους τῶν ὑπόλοιπων $n_2 = n - n_1$ ἐξισώσεων. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{n_1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{n_2} \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

Ἔστω:

$$a = \begin{bmatrix} a_{n_1} \\ a_{n_2} \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} X_{n_1} & 0 \\ 0 & X_{n_2} \end{bmatrix}, \; y = \begin{bmatrix} y_{n_1} \\ y_{n_2} \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

Ἀντικαθιστώντας τίς (5.51) καί (5.52) στή (5.26) βρίσκουμε:

$$\begin{bmatrix} X'_{n_1}(S_{n_1}^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')X_{n_1} & 0 \\ 0 & X'_{n_2}(S_{n_2}^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')X_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n_1} \\ a_{n_2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} X'_{n_1}(S_{n_1}^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')y_{n_1} \\ X'_{n_2}(S_{n_2}^{-1} \otimes Z(Z'Z)^{-1}Z')y_{n_2} \end{bmatrix} \tag{5.53}$$

Όπως δείχνει ἡ (5.53) οἱ ἐκτιμητές τῆς 3ΣΜΕΤ γιά ὁλόκληρο τό σύστημα ταυτίζονται μέ τούς ἐκτιμητές τῆς 3ΣΜΕΤ ὅταν ἡ μέθοδος αὐτή ἐφαρμόζεται στό καθένα ἀπό τά δύο ὑποσυστήματα χωριστά.

Πόρισμα. Ἄν οἱ διαταρακτικοί ὅροι μιᾶς ἐξίσωσης εἶναι ἀσυσχέτιστοι μέ τούς διαταρακτικούς ὅρους τοῦ ὑπόλοιπου συστήματος, ὁ ἐκτιμητής τῆς 3ΣΜΕΤ τῶν παραμέτρων τῆς ἐξίσωσης αὐτῆς ταυτίζεται μέ τόν ἐκτιμητή τῆς 2ΣΜΕΤ γιά τήν ἴδια ἐξίσωση.

Ἀπόδειξη: Στήν περίπτωση αὐτή ἡ μήτρα Σ ἔχει τή μορφή:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & o' \\ o & \Sigma_{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

Όπως φαίνεται ἀπό τίς δύο προηγούμενες Προτάσεις, ἡ ἐφαρμογή τῆς 3ΣΜΕΤ στήν περίπτωση αὐτή θά δώσει ἕνα ἐκτιμητή γιά τήν πρώτη ἐξίσωση πού θά ταυτίζεται μέ ἐκεῖνον τῆς 2ΣΜΕΤ.

Πρόταση 10. Ἄν τό σύστημα (5.4) ἔχει p ὑπερταυτοποιημένες καί n - p ἀκριβῶς ταυτοποιημένες ἐξισώσεις,ὁ ἐκτιμητής τῆς 3ΣΜΕΤ γιά ὁλόκληρο τό σύστημα ἰσοδυναμεῖ μέ τόν ἐκτιμητή τῆς 3ΣΜΕΤ γιά τό ὑποσύστημα τῶν ὑπερταυτοποιημένων ἐξισώσεων χωρίς νά παίρνονται ὑπόψη οἱ ἀκριβῶς ταυτοποιημένες ἐξισώσεις, ἐνῶ ὁ ἐκτιμητής τῆς καθεμιᾶς ἀπό τῆς ἀκριβῶς ταυτοποιημένες ἐξισώσεις διαφέρει ἀπό ἐκεῖνο τῆς 2ΣΜΕΤ κατά ἕνα διάνυσμα πού εἶναι γραμμική συνάρτηση τῶν καταλοίπων μέ τή 3ΣΜΕΤ τοῦ ὑποσυστήματος τῶν ὑπερταυτοποιημένων ἐξισώσεων.

Ἀπόδειξη: Βλέπε καί Theil (1971), σελ.513-514.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

Εισαγωγή

Ἡ μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες εἶναι, ἱστορικά, ἡ πρώτη πού προτάθηκε (ἀπό τούς Anderson and Rubin (1949)) γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων μιᾶς ἐξίσωσης πού ἀνήκει σέ ἕνα σύστημα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων. Ἡ μέθοδος αὐτή-πού,ὑπολογιστικά, εἶναι πιό περίπλοκη ἀπό τή 2ΣΜΕΤ ἤ τή ΜΒΜ-ἔχει ὁρισμένες ἐπιθυμητές ἰδιότητες πού συνδέονται μέ ἐκεῖνες τῆς γενικῆς μεθόδου τῆς μέγιστης πιθανότητας.

Στό Κεφάλαιο αὐτό, ἀφοῦ ἀναφερθοῦμε, σέ γενικές γραμμές, στή μέθοδο μέγιστης πιθανότητας γιά μιά διανυσματική τυχαία μεταβλητή, δίνουμε τή συνάρτηση πιθανότητας ὁλόκληρου τοῦ συστήματος ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων. Στή συνέχεια ἀναλύουμε τή μέθοδο μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες γιά ἕνα ὑποσύνολο ἐξισώσεων καθώς καί γιά μιά ἐξίσωση τοῦ συστήματος. Τέλος δίνουμε μερικές ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν ἐκτιμητῶν τῆς μεθόδου μέγιστης πιθανότητας καί κάνουμε μιά σύντομη ἀναφορά στούς ἐλέγχους ἐξειδίκευσης.

I. Ἡ μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας στήν περίπτωση μιᾶς διανυσματικῆς τυχαίας μεταβλητῆς

Μέ τήν ἀρχή καί τή μέθοδο τῆς μέγιστης πιθανότητας, γιά τήν περίπτωση μιᾶς τ.μ. ἀσχοληθήκαμε, συνοπτικά, στό Κεφάλαιο 3 τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας - I. Στό τμῆμα αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε, πάλι συνοπτικά, μέ τή μέθοδο τῆς μέγιστης πιθανότητας γιά τήν περίπτωση μιᾶς δ.τ.μ.

Παίρνουμε τή δ.τ.μ. x μέ n διαστάσεις πού ἔχει συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x, \vartheta), \qquad \vartheta' = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \vartheta_k) \tag{6.1}$$

ὅπου ϑ εἶναι ἕνα ἄγνωστο διάνυσμα παραμέτρων. Ὁ **ἐκτιμητής μέγιστης πιθανότητας** (maximum likelihood estimator) $\tilde{\vartheta}$ τοῦ ϑ εἶναι ἐκεῖνος πού ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$f(x ; \tilde{\vartheta}) > f(x ; \hat{\vartheta}) \tag{6.2}$$

ὅπου $\hat{\vartheta}$ εἶναι ὁποιοσδήποτε ἄλλος ἐκτιμητής τοῦ ϑ.

Ἄν ἔχουμε ἕνα τυχαῖο δεῖγμα:

$$x_{t.} = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots\ldots, x_{tn}) \ , \ t = 1,2,\ldots\ldots,T \tag{6.3}$$

σχηματίζουμε τή $n x T$ μήτρα:

$$X' = (x'_{1.}, x'_{2.}, \ldots\ldots\ldots\ldots, x'_{T.}) \tag{6.4}$$

Ἄν οἱ (6.3) ἔχουν ὅλες συνάρτηση πυκνότητας τή (6.1), τότε ἡ ἀπό κοινοῦ συνάρτηση πιθανότητας τῆς (6.4) εἶναι:

$$\mathcal{L}(X ; \vartheta) = \prod_{i=1}^{T} f(x_{t.} ; \vartheta) \tag{6.5}$$

Ἐφόσον ὁ λογάριθμος εἶναι μονότονη συνάρτηση, ἀντί γιά τή (6.5) μπορούμε νά μεγιστοποιήσουμε τή **λογαριθμική συνάρτηση πιθανότητας** (log-likelihood function):

$$L(X\ ;\ \vartheta) = \ln \mathcal{L}(X\ ;\ \vartheta) \quad = \sum_{t=1}^{T} \ln f(x_{t.}\ ;\ \vartheta) \qquad (6.6)$$

ὅπου ln εἶναι οἱ φυσικοί λογάριθμοι.

Ἡ χρησιμοποίηση τῆς **μεθόδου μέγιστης πιθανότητας** (ΜΜΠ) (maximum likelihood method) στήν Οἰκονομετρία ὀφείλεται, κατά κύριο λόγο, στίς ἀσυμπτωτικές ἰδιότητες τῶν ἐκτιμητῶν πού παίρνουμε ἐφαρμόζοντάς την. Πιό συγκεκριμένα: Ἄν ἰσχύουν ὁρισμένες **συνθῆκες κανονικότητας** (regularity conditions) (βλέπε,σχετικά, Dhrymes (1970), σελ. 115), τότε:

(i) Ἄν ὁ ἐκτιμητής μέγιστης πιθανότητας $\tilde{\vartheta}$ ὁρίζεται μονοσήμαντα ἀπό τήν (6.2), τότε

$\lim \tilde{\vartheta} = \vartheta$ μέ πιθανότητα 1 (βλέπε Zacks (1971), σελ.233)

(ii) Ὑπάρχει μιά ρίζα τῆς ἐξίσωσης:

$$\frac{\partial L(X;\vartheta)}{\partial \vartheta} = 0 \qquad (6.7)$$

πού εἶναι ἕνας συνεπής ἐκτιμητής τοῦ ϑ. Ἡ ρίζα αὐτή εἶναι μοναδική καί γιά μεγάλο T ἀντιστοιχεῖ σέ ἕνα **τοπικό μεγιστο** (local maximum) μέ πιθανότητα 1 (βλέπε Theil(1971) σελ.393, Dhrymes (1970),σελ.117)

(iii) Ἡ ἀκολουθία

$$z_T = \sqrt{T}(\tilde{\vartheta} - \vartheta) \qquad (6.8)$$

συγκλίνει κατά κατανομή σέ μιά δ.τ.μ. z μέ συνάρτηση κατανομῆς:

$$N(0,\ H(\vartheta)^{-1}) \qquad (6.9)$$

ὅπου

$$H(\vartheta) = - E \left[\frac{1}{T} \frac{\partial^2 L(X\ ;\ \vartheta)}{\partial\vartheta\partial\vartheta'}\right] \qquad (6.10)$$

(βλ. Theil (1971),σελ.395).

(iv) Ἄν $\hat{\vartheta}$ εἶναι ἕνας ἄλλος ἀκτιμητής τοῦ ϑ τέτοιος ὥστε:

$$\sqrt{T}(\hat{\vartheta} - \vartheta) \xrightarrow{d} N(o,\ V)$$

καί ἰσχύουν ὁρισμένες ἐπιπλέον (ἀπό ἐκεῖνες πού ἀναφέραμε πιό πάνω) συνθῆκες κανονικότητας, τότε ἡ μήτρα

$$V - H(\vartheta)^{-1} \qquad (6.11)$$

εἶναι θετικά ἡμιορισμένη (βλ. Walker (1963))

Ἡ ἰδιότητα αὐτή σημαίνει (βλ. καί Κεφάλαιο 1) ὅτι:

(v) Ὁ ἐκτιμητής μέγιστης πιθανότητας εἶναι ἄριστος ἀσυμπτωτικά κανονικός.

(vi) Ἕνας συνεπής ἐκτιμητής τῆς μήτρας (6.10) εἶναι ἡ μήτρα

$$H_T(\tilde{\vartheta}) = -\frac{1}{T} \frac{\partial^2 L(X\ ;\ \tilde{\vartheta})}{\partial\vartheta\partial\vartheta'} \qquad (6.12)$$

(βλέπε Dhrymes (1970), σελ. 134)

(vii) Ἄν ἰσχύουν οἱ περιορισμοί:

$$h_i(\vartheta) = 0,\ i = 1,2,\ldots\ldots,r \qquad (6.13)$$

ἤ

$$h(\vartheta) = o \qquad (6.14)$$

ὅπου

$$h(\vartheta)' = (h_1(\vartheta),\ h_2(\vartheta),\ldots\ldots\ldots,h_r(\vartheta)) \qquad (6.15)$$

καί ἄν

$\tilde{\vartheta}$ εἶναι ὁ ἐκτιμητής μέγιστης πιθανότητας (ΕΜΠ) χωρίς τούς περιορισμούς, ἐνῶ $\tilde{\vartheta}^*$ εἶναι ὁ ΕΜΠ πού ἱκανοποιεῖ τούς περιορισμούς, τότε ἡ στατιστική:

$$\ell = 2[L(X\ ;\ \tilde{\vartheta}) - L(X\ ;\ \tilde{\vartheta}^*)] \xrightarrow{d} \chi_r \tag{6.16}$$

(βλ. Rao (1973), σελ. 418).
Οἱ ἔλεγχοι πού βασίζονται στή (6.16) ὀνομάζονται **ἔλεγχοι τοῦ λόγου πιθανότητας** (likelihood ratio tests).

(viii) Τέλος, ἄν

$$\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

μποροῦμε νά μεγιστοποιήσουμε τή (6.6) κατά στάδια.
Γιά νά μεγιστοποιήσουμε ὡς πρός ϑ_1, λύνουμε τήν ἐξίσωση:

$$\frac{\partial L(X\ ;\ \vartheta)}{\partial \vartheta_1} = 0 \tag{6.18}$$

καί παίρνουμε μιά συνάρτηση τῆς μορφῆς:

$$\vartheta_2 = g(\vartheta_1) \tag{6.19}$$

Ἀντικαθιστώντας στή (6.6) βρίσκουμε τή **συγκεντρωμένη συνάρτηση πιθανότητας** (concentrated likelihood function):

$$L^*(X\ ;\ \vartheta_1) = \sup_{\vartheta_2} L(X\ ;\ \vartheta) = L(X\ ;\ \vartheta_1,\ g(\vartheta_1)) \tag{6.20}$$

Μπορεῖ νά δειχτεῖ (βλ. Koopmans and Hood (1953), σελ.156) ὅτι ὁ ἐκτιμητής $\tilde{\vartheta}_1$ πού παίρνουμε μεγιστοποιώντας τή (6.20) εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν ΕΜΠ τοῦ ϑ_1, ἐνῶ ὁ ΕΜΠ τοῦ ϑ_2 εἶναι:

$$\tilde{\vartheta}_2 = g(\tilde{\vartheta}_1) \tag{6.21}$$

II. Ἡ συνάρτηση πιθανότητας ὁλόκληρου τοῦ συστήματος

Παίρνουμε τό σύστημα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων πού ἐξετάσαμε στό Κεφάλαιο 2 καί ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (Α), (Β) καί (Δ) (ἢ ἀντί γιά τή (Δ) οἱ (Δ_1, Δ_2)). Ἀντί, ὅμως, γιά τή συνθήκη (Γ) ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει ἡ συνθήκη:

$$(\Gamma^*) \quad u'_{t.} \sim N(o, \Sigma), \quad \det\Sigma \neq 0 \ , \ t = 1,2,\ldots\ldots,T$$

δηλαδή τό διάνυσμα τῶν διαταρακτικῶν ὅρων ὅλων τῶν ἐξισώσεων γιά τήν ἴδια χρονική περίοδο κατανέμεται κανονικά μέ μέσο ο καί (μή ἰδιάζουσα) μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης Σ.

Ἡ συνάρτηση πυκνότητας τοῦ nx1 διανύσματος $u_{t.}$ εἶναι:

$$p(u'_{t.}) = (2\pi)^{-(n/2)}(\det\Sigma)^{-(1/2)}e^{-(1/2)u_{t.}\Sigma^{-1}u'_{t.}} \tag{6.22}$$

Ἀπό τό Κεφάλαιο 2 γνωρίζουμε ὅτι :

$$u'_{t.} = By'_{t.} + \Gamma z'_{t.} = Ax_{t.} \tag{6.23}$$

Ἐπιπλέον (βλέπε καί Κεφάλαιο 3):

$$p(y'_{t.}|z'_{t.}) = p(u'_{t.}|z'_{t.})\left|\det\frac{\partial u'_{t.}}{\partial y_{t.}}\right| \tag{6.24}$$

Ἐφόσον

$$\frac{\partial u'_{t.}}{\partial y_{t.}} = B \tag{6.25}$$

καί τά $u_{t.}$ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπό τά $z_{t.}$ ἡ (6.22) γράφεται:

$$p(y'_{t.}|z'_{t.}) = p(u'_{t.})|\det B| \ =$$

$$= (2\pi)^{-(n/2)}|\det B|(\det\Sigma)^{-(1/2)}e^{-(1/2)u_{t.}\Sigma^{-1}u'_{t.}} \qquad (6.26)$$

Ἡ (ἀπό κοινοῦ) συνάρτηση πυκνότητας τῶν T παρατηρήσεων τοῦ δείγματος εἶναι:

$$\mathcal{L} = \prod_{t=1}^{T} p(y'_{t.}|z'_{t.}) =$$

$$(2\pi)^{-(\frac{nT}{2})}|\det B|^{T}(\det\Sigma)^{-\frac{T}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}u_{t.}\Sigma^{-1}u'_{t.}} \qquad (6.27)$$

Ἡ (6.27) περιλαμβάνει ὅλες τίς πληροφορίες πού ὑπάρχουν στό δεῖγμα σχετικά μέ τό ὑπόδειγμα (6.23).

Παίρνοντας τό λογάριθμο τῆς (6.27) βρίσκουμε τή λογαριθμική συνάρτηση πιθανότητας τοῦ δείγματος:

$$L = -\frac{nT}{2}\ln(2\pi) + T\ln|\det B| - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}u_{t.}\Sigma^{-1}u'_{t.} \qquad (6.28)$$

Τό ἄθροισμα στόν τελευταῖο ὅρο τῆς (6.28) γράφεται:

$$\sum_{t=1}^{T}u_{t.}\Sigma^{-1}u'_{t.} = tr(\sum_{t=1}^{T}u_{t.}\Sigma^{-1}u'_{t.}) = tr(\sum_{t=1}^{T}u'_{t.}u_{t.}\Sigma^{-1}) =$$

$$tr(\Sigma^{-1}\sum_{t=1}^{T}u_{t.}u'_{t.}) = tr(\Sigma^{-1}U'U) = tr(\Sigma^{-1}AX'XA') \qquad (6.29)$$

Ἀντικαθιστώντας τή (6.29) στή (6.28) ἔχουμε:

$$L(X;A,\Sigma) = k + T\ln|\det B| - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma) -$$

$$-\frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}AX'XA') \qquad (6.30)$$

ὅπου

$$k = -\frac{nT}{2}\ln(2\pi) \tag{6.31}$$

Ὁ τελευταῖος ὅρος τῆς (6.30) γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$tr(\Sigma^{-1}AX'XA') = tr\left[\Sigma^{-1}(B \vdots \Gamma)\begin{bmatrix}Y'\\Z'\end{bmatrix}(Y \vdots Z)\begin{bmatrix}B'\\\Gamma'\end{bmatrix}\right] =$$

$$tr\left[\Sigma^{-1}(BY'YB' + \Gamma Z'YB' + BY'Z\Gamma' + \Gamma Z'Z\Gamma')\right] =$$

$$tr(\Sigma^{-1}BY'YB') + 2tr(\Sigma^{-1}BY'Z\Gamma') + tr(\Sigma^{-1}\Gamma Z'Z\Gamma') \tag{6.32}$$

Κατά συνέπεια ἡ (6.30) γράφεται:

$$\begin{aligned} L(Y,Z;B,\Gamma,\Sigma) = k + T\ln|\det B| - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma) & - \\ - \frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}BY'YB') - tr(\Sigma^{-1}BY'Z\Gamma') & - \\ - \frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}\Gamma Z'Z\Gamma') & \end{aligned} \tag{6.33}$$

Ἂν πάρουμε τήν ἀνηγμένη μορφή τοῦ ὑποδείγματος (6.23), δηλαδή:

$$y'_{t.} = \Pi z'_{t.} + v'_{t.}\ ,\ t = 1,2,\ldots\ldots,T \tag{6.34}$$

ὅπου

$$\Pi = B^{-1}\Gamma \tag{6.35}$$

$$v_{t.} \sim N(o\ ,\ \Sigma_v) \tag{6.36}$$

$$\Sigma_v = B^{-1}\Sigma B'^{-1} \tag{6.37}$$

καί ἐργαστοῦμε ἀκριβῶς ὅπως στήν περίπτωση τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς ἔχουμε:

$$p(y'_{t.}|z'_{t.}) = p(v'_{t.}) \left|\det \frac{\partial v'_{t.}}{\partial y_{t.}}\right| = p(v_{t.}')|\det I_n| =$$

$$p(v'_{t.}) = (2\pi)^{-(n/2)}(\det\Sigma_v)^{-(1/2)}e^{-(1/2)v_{t.}\Sigma_v^{-1}v'_{t.}} \qquad (6.38)$$

καί, κατά συνέπεια,

$$L = k - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma_v) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma_v^{-1}V'V) =$$

$$k - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma_v) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\Sigma_v^{-1}(Y' - \Pi Z')(Y - Z\Pi') \quad (6.39)$$

Τελικά ἔχουμε:

$$L(Y,Z;\Pi,\Sigma_v) = k - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma_v) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma_v^{-1}Y'Y) +$$

$$+ \operatorname{tr}(\Sigma_v^{-1}Y'Z\Pi') - \operatorname{tr}(\Sigma_v^{-1}\Pi Z'Z\Pi') \qquad (6.40)$$

Εἶναι εὐνόητο ὅτι ἡ (6.40) πρέπει νά ταυτίζεται μέ τή (6.33) ἐφόσον ἀντιστοιχοῦν στό ἴδιο ὑπόδειγμα. Πραγματικά:

$$\ln(\det\Sigma_v) = \ln(\det B^{-1}\Sigma B'^{-1}) = \ln(\det\Sigma) -$$

$$- 2\ln|\det B| \qquad (6.41)$$

$$\operatorname{tr}(\Sigma_v^{-1}Y'Y) = \operatorname{tr}(B'\Sigma^{-1}BY'Y) = \operatorname{tr}(\Sigma^{-1}BY'YB') \qquad (6.42)$$

$$\operatorname{tr}(\Sigma_v^{-1}Y'Z\Pi') = -\operatorname{tr}(B'\Sigma^{-1}BY'Z\Gamma'B'^{-1}) = -\operatorname{tr}(\Sigma_v^{-1}BY'Z\Gamma')(6.43)$$

$$\operatorname{tr}(\Sigma_v^{-1}\Pi Z'Z\Pi') = \operatorname{tr}(B'\Sigma^{-1}BB^{-1}\Gamma Z'Z\Gamma'B'^{-1}) =$$

$$\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\Gamma Z'Z\Gamma') \qquad (6.44)$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς (6.41), (6.42), (6.43) καί (6.44) στή (6.40), βρίσκουμε τή (6.33).

III.Η μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες στήν περίπτωση ἑνός ὑποσυνόλου ἐξισώσεων

Στό Κεφάλαιο 3 εἴδαμε ὅτι γιά νά μπορέσουμε νά ἐκτιμήσουμε τίς παραμέτρους ἑνός συστήματος θά πρέπει νά τό ἐξειδικεύσουμε ἐπιβάλοντας τόν ἀναγκαῖο ἀριθμό περιορισμῶν. Οἱ περιορισμοί αὐτοί εἶναι οἱ ἐκ τῶν προτέρων πληροφορίες πού ἔχουμε γιά τό σύστημα.

Ἄν, γιά διάφορους λόγους (π.χ. ἐπειδή δέν μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τούς περιορισμούς γιά ὁρισμένες ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος) ἐνδιαφερόμαστε γιά τήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων ἑνός ὑποσυνόλου $n_1(<n)$ ἐξισώσεων μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τή **μέθοδο μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες (ΜΜΠΠΠ)** (limited information maximum likelihood method) στήν ὁποία γίνεται χρήση τῶν πληροφοριῶν πού ἔχουμε γιά τό ὑποσύνολο αὐτό τῶν ἐξισώσεων καί ὄχι γιά τό σύνολο τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (βλέπε σχετικά Koopmans and Hood (1953), σελ. 190-195). Στό τμῆμα αὐτό θά ἀσχοληθοῦμε μέ τήν περίπτωση πού τό ὑποσύνολο τῶν ἐξισώσεων γιά τίς ὁποῖες ἐνδιαφερόμαστε περιλαμβάνει περισσότερες ἀπό μιά ἐξισώσεις, ἐνῶ τό ἑπόμενο τμῆμα θά ἀφιερωθεῖ στήν περίπτωση τῆς μιᾶς ἐξίσωσης, στήν ὁποία, κατά κύριο λόγο, ἀναφέρονται τά διάφορα ἐγχειρίδια (βλέπε, π.χ. Rowley (1973)).

Μέ τή ΜΜΠΠΠ μεγιστοποιοῦμε τή συνάρτηση πιθανότητας τοῦ δείγματος ὡς πρός ὅλες τίς παραμέτρους τοῦ συστήματος, μέ τή διαφορά ὅτι ἡ μεγιστοποίηση ὡς πρός τίς παραμέτρους τῶν $n-n_1$ ἐξισώσεων, γιά τίς ὁποῖες δέν ἐνδιαφερόμαστε, εἶναι χωρίς περιορισμούς, ἐνῶ ἡ μεγιστοποίηση ὡς πρός τίς παραμέτρους τῶν

τῶν n_1 ἐξισώσεων πού μᾶς ἐνδιαφέρουν γίνεται μέ τέτοιο τρόπο ὥστε νά ἰσχύουν οἱ περιορισμοί πού ἐπιβλήθηκαν μέ τή χρησιμοποίηση τῶν πληροφοριῶν πού ἔχουμε γιά τό ὑποσύνολο αὐτό τῶν ἐξισώσεων.

Ἡ ΜΜΠΠΠ χρησιμοποιήθηκε γιά πρώτη φορά ἀπό τούς Anderson and Rubin (1949) πού ἐφάρμοσαν τή μέθοδο τοῦ Lagrange. Πιό εὔχρηστη εἶναι ἡ μέθοδος πού ἐφαρμόστηκε ἀπό τούς Koopmans and Hood (1953). Οἱ συγγραφεῖς αὐτοί χρησιμοποίησαν τή συγκεντρωμένη (στό χῶρο τῶν παραμέτρων τῶν ἐξισώσεων πού μᾶς ἐνδιαφέρουν) συνάρτηση πιθανότητας τοῦ δείγματος. Τή μέθοδο αὐτή θά χρησιμοποιήσουμε καί ἐμεῖς τόσο στό τμῆμα αὐτό ὅσο καί στό ἑπόμενο (βλέπε καί (viii) στό τμῆμα I τοῦ Κεφαλαίου αὐτοῦ).

Παίρνουμε τό ὑπόδειγμα (6.23) καί χωρίζουμε τίς ἐξισώσεις του σέ δύο ὑποσύνολα πού ἀποτελοῦνται ἀπό n_1 καί $n_2 = n - n_1$ ἐξισώσεις. Ἡ μήτρα A γράφεται:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \tag{6.45}$$

ἐνῶ ἡ μήτρα Σ , ἀντίστοιχα, γράφεται:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \tag{6.46}$$

Τό πρῶτο βῆμα στήν ἐφαρμογή τῆς ΜΜΠΠΠ εἶναι ὁ μετασχηματισμός τοῦ ὑποδείγματος (6.23) - μέ τίς μῆτρες A καί Σ γραμμένες μέ στή μορφή τῶν (6.45) καί (6.46) - σέ ἕνα νέο ὑπόδειγμα, κατά τέτοιο τρόπο ὥστε νά χάνονται ὅσο γίνεται λιγότερες πληροφορίες ἀπό τήν παράλειψη τῶν πληροφοριῶν (ἄν ὑπάρχουν) γιά τούς περιορισμούς πού ἰσχύουν γιά τίς n_2 ἐξισώσεις γιά τίς ὁποῖες δέν ἐνδιαφερόμαστε. Γιά τό μετασχηματισμό αὐτό χρησιμοποιοῦμε μιά μή ἰδιάζουσα nxn μήτρα H. Τό μετασχηματισμένο ὑπόδειγμα εἶναι:

$$A^{*}x'_{t.} = u^{*\prime}_{t.} \qquad (6.47)$$

ὅπου

$$A^{*} = HA$$

καί (6.48)

$$u^{*\prime}_{t.} = Hu'_{t.}$$

ὁπότε

$$\Sigma^{*} = E(u^{*\prime}_{t.}u^{*}_{t.}) = H\Sigma H' \qquad (6.49)$$

Εἶναι εὐνόητο ὅτι οἱ παράμετροι τῶν πρώτων n_1 ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (6.23) δέν θά πρέπει νά μετασχηματιστοῦν, γιά νά μπορέσουμε νά τίς ἐκτιμήσουμε. Κατά συνέπεια θά πρέπει:

$$A^{*}_{1} = A_1$$

καί (6.50)

$$\Sigma^{*}_{11} = \Sigma_{11}$$

Ἄν,ἐπιπλέον, ἐπιλέξουμε τή μήτρα H ἔτσι ὥστε:

$$\Sigma^{*}_{12} = \Sigma^{*}_{21} = 0 \qquad (6.51)$$

τά δύο ὑποσυστήματα ἐξισώσεων γίνονται στοχαστικά ἀνεξάρτητα, ἀλλά δέν χάνουμε πληροφορίες σχετικά μέ τούς περιορισμούς στό ὑποσύνολο τῶν n_1 ἐξισώσεων γιά τίς ὁποῖες ἐνδιαφερόμαστε.

Τέλος μποροῦμε νά ἐπιλέξουμε τή μήτρα H ἔτσι ὥστε :

$$\Sigma^{*}_{22} = I \qquad (6.52)$$

Ἄν, τώρα, ἡ μήτρα H ἔχει τή μορφή:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \tag{6.53}$$

γιά νά ἰσχύει ἡ πρώτη ἀπό τίς (6.50) θά πρέπει

$$H_{11} = I \quad \text{καί} \quad H_{12} = 0 \tag{6.54}$$

'Αντικαθιστώντας τή δεύτερη ἀπό τίς (6.50), τήν (6.51),τήν (6.52) καί τήν (6.53) στή (6.49) ἔχουμε:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & H'_{21} \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

'Εκτελώντας τούς πολλαπλασιασμούς στή (6.55) βρίσκουμε:

$$H_{21} = - H_{22}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \tag{6.56}$$

καί

$$H_{22}(\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})H'_{22} = I \tag{6.57}$$

'Η μήτρα πού εἶναι μέσα σέ παρένθεση στή (6.57) εἶναι θετικά ὁρισμένη καί, κατά συνέπεια (βλ. Γραμμική Ἄλγεβρα, σελ.134) ὑπάρχει μιά μή ἰδιάζουσα μήτρα H_{22} τέτοια ὥστε νά ἱκανοποιεῖ τή (6.57) καί τή σχέση:

$$\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} = H'_{22}H_{22} \tag{6.58}$$

'Από τίς (6.54) καί (6.56) φαίνεται ὅτι ἡ μήτρα μέ τήν ὁποία γίνεται ὁ μετασχηματισμός τοῦ ὑποδείγματος πού ἐπιδιώκουμε εἶναι ἡ:

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -H_{22}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} & H_{22} \end{bmatrix} \tag{6.59}$$

ὅπου ἡ μήτρα H_{22} ἱκανοποιεῖ τή (6.58) καί τή (6.59).

Μέ βάση τά παραπάνω ἡ λογαριθμική συνάρτηση πιθανότητας τοῦ μετασχηματισμένου ὑποδείγματος (γιά λόγους ἁπλούστευσης παραλείπουμε τό σταθερό ὅρο καί ἀριθμοῦμε τίς συναρτήσεις πού προκύπτουν ἀπό τίς διαδοχικές ἀντικαταστάσεις) εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$L_1 = T \ln |\det B^*| - \frac{T}{2} \ln (\det \Sigma^*) - \\ - \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\Sigma^{*-1} A^* X'XA^{*\prime}) \qquad (6.60)$$

Συμβολίζοντας τίς μετασχηματισμένες παραμέτρους μέ ἕνα ἀστερίσκο καί τίς παραμέτρους τοῦ ἀρχικοῦ ὑποδείγματος χωρίς ἀστερίσκο, εἶναι φανερό ὅτι:

$$A^* = HA = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2^* \end{bmatrix} = (B^* \quad \Gamma^*) = \begin{bmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2^* & \Gamma_2^* \end{bmatrix} \qquad (6.61)$$

καί

$$\det \Sigma^* = \det \Sigma_{11} \qquad (6.62)$$

Τέλος

$$\operatorname{tr}(\Sigma^{*-1} A^* X'XA^{*\prime}) = \operatorname{tr}(\Sigma_{11}^{-1} A_1 X'XA_1') + \operatorname{tr}(A_2^* X'XA_2^{*\prime}) \qquad (6.63)$$

'Αντικαθιστώντας τίς (6.62) καί (6.63) στή (6.60) ἔχουμε:

$$L_1 = T \ln |\det B^*| - \frac{T}{2} \ln (\det \Sigma_{11}) - \\ -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Sigma_{11}^{-1} A_1 X'XA_1') - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A_2^* X'XA_2^{*\prime}) \qquad (6.64)$$

Θέλουμε νά συγκεντρώσουμε τή συνάρτηση πιθανότητας στίς παραμέτρους A_1 καί Σ_{11}. Γι'αὐτό μεγιστοποιοῦμε τή(6.64), χωρίς περιορισμούς, ὡς πρός τά στοιχεῖα τῆς μήτρας A_2^*. 'Η μεγιστοποίηση θά γίνει σέ δυο στάδια: Πρῶτα ὡς πρός Γ_2^* καί στή συνέχεια, μετά τίς ἀντικαταστάσεις πού ἀπορρέουν ἀπό τό πρῶτο στάδιο, ὡς πρός B_2^* .

'Αντικαθιστώντας ἀπό τή (6.61) στόν τελευταῖο ὅρο τῆς (6.64) ἔχουμε:

$$L_1 = T \ln |\det B^*| - \frac{T}{2} \ln (\det \Sigma_{11}) - \frac{1}{2} tr(\Sigma_{11}^{-1} A_1 X'XA_1') - \frac{1}{2}(B_2^* Y'YB_2^{*\prime}) - tr(B_2^* Y'Z\Gamma_2^{*\prime}) - \frac{1}{2} tr(\Gamma_2^* Z'Z\Gamma_2^{*\prime}) \qquad (6.65)$$

Παραγωγίζοντας τή (6.65) ὡς πρός Γ_2^* βρίσκουμε:

$$\frac{\partial L_1}{\partial \Gamma^*_2} = - B_2^* Y'Z - \Gamma_2^* Z'Z = 0 \qquad (6.66)$$

πού εἶναι οἱ συνθῆκες πρώτης τάξηςγιά τή μεγιστοποίηση τῆς (6.65) ὡς πρός Γ_2^* (βλ. Γραμμική Ἄλγεβρα, σελ. 168-170).

'Επιλύοντας τή (6.66) ὡς πρός Γ_2^* βρίσκουμε:

$$\Gamma_2^* = -B_2^* Y'Z(Z'Z)^{-1} \qquad (6.67)$$

Οἱ συνθῆκες δεύτερης τάξης γιά τή μεγιστοποίηση τῆς (6.65) ὡς πρός Γ_2^* δίνουν:

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial \Gamma_2^* \partial \Gamma_2^{*\prime}} = -Z'Z \qquad (6.68)$$

καί ἐφόσον ἡ μήτρα (6.68) εἶναι ἀρνητικά ὁρισμένη, ἡ (6.67) μᾶς δίνει ἕνα μοναδικό μέγιστο.

'Αντικαθιστώντας τήν (6.67) στή (6.65) βρίσκουμε τή συγκεντρωμένη συνάρτηση πιθανότητας:

$$L_2 = T\ \ln\ |\det B^*| - \frac{1}{2}\ \ln\ (\det\Sigma_{11}) -$$

$$- \frac{1}{2}tr(\Sigma_{11}^{-1}A_1X'XA_1') - \frac{T}{2}tr(B_2^*WB_2^{*\prime}) \qquad (6.69)$$

Όπου

$$W = \frac{1}{T}(Y'Y - Y'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y) = \frac{1}{T}(Y - ZP)'(Y - ZP) =$$

$$= \frac{1}{T}\hat{V}'\hat{V} \qquad (6.70)$$

δηλαδή ἡ μήτρα W εἶναι ἕνας ἐκτιμητής τῆς μήτρας διακύμανσης-συνδιακύμανσης τῶν διαταρακτικῶν ὅρων τῆς ἀνηγμένης μορφῆς τοῦ ὑποδείγματος τῆς ἐπιτροπῆς Cowles.

Γιά νά βροῦμε τήν παράγωγο τῆς (6.69) ὡς πρός B_2^* βρίσκουμε πρῶτα τίς παραγώγους τοῦ καθενός ἀπό τούς ὅρους στούς ὁποίους ὑπάρχει ἡ μήτρα αὐτή τῶν παραμέτρων, δηλαδή:

$$\frac{\partial(\ln\ |\det B^*|)}{\partial B^*} = (B^{*\prime})^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \qquad (6.71)$$

Κατά συνέπεια:

$$\frac{\partial\ \ln\ |\det B^*|}{\partial B_2^*} = S_2 = (0\ \vdots\ I_{n_2})(B^{*\prime})^{-1} \qquad (6.72)$$

Ἐπιπλέον (βλέπε Γραμμική Ἄλγεβρα, σελ. 170 - 171)

$$\frac{\partial tr(B_2^*WB_2^{*\prime})}{\partial B_2^*} = 2B_2^*W \qquad (6.73)$$

Ἑπομένως ἡ συνθήκη πρώτης τάξης γιά τή μεγιστοποίηση τῆς (6.69) ὡς πρός B_2^* εἶναι:

$$\frac{\partial L_2}{\partial B_2^*} = TS_2 - TB_2^*W = 0 \qquad (6.74)$$

δηλαδή στό σημεΐο τοῦ μέγιστου, τό ὁποῖο ὑπάρχει καί στό ὁποῖο ἡ συνάρτηση L_2 εἶναι διαφορίσιμη (βλέπε Koopmans, Rubin and Leipnik (1950), σελ. 235-6) ἔχουμε:

$$S_2 = B_2^* W \tag{6.75}$$

Ἀπό τίς (6.72) καί (6.75) ἔχουμε:

$$B^* W B^{*\prime} = S_2 B^{*\prime} = (0 \vdots I_{n_2})(B^{*\prime})^{-1} B^{*\prime} = (0 \vdots I_{n_2}) \tag{6.76}$$

Κατά συνέπεια:

$$B_2^* W B_1^{*\prime} = 0 \tag{6.77}$$

$$B_2^* W B_2^{*\prime} = I \tag{6.78}$$

καί ἐπομένως:

$$\det(B^* W B^{*\prime}) = \det \begin{bmatrix} B_1 W B_1^{\prime} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} = \det(B_1 W B_1^{\prime}) \tag{6.79}$$

καί ἐφόσον:

$$\ln\left(\det(B^* W B^{*\prime})\right) = 2 \ln |\det B^*| + \ln(\det W) \tag{6.80}$$

ἔχουμε (συνδυάζοντας τίς (6.79) καί (6.80)):

$$\ln |\det B^*| = \frac{1}{2}\ln(\det(B_1 W B_1)) - \frac{1}{2}\ln(\det W) \tag{6.81}$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς (6.78) καί (6.81) στή (6.69) παρατηροῦμε ὅτι ἀπό τή (6.78) προκύπτει μιά σταθερή καί ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος τίς (6.81) εἶναι ἐπίσης μιά σταθερή. Καί οἱ δύο αὐτές σταθερές ἐνσωματώνονται στό σταθερό ὅρο τῆς συγκεντρωμένης συνάρτησης πιθανότητας πού περιέχει μόνο τίς παραμέτρους τῶν πρώτων n_1 ἐξισώσεων (καί ὁ ὁποῖος σταθερός ὅρος, γιά λόγους ἀπλούστευσης, παραλείπεται). Ἡ συγκεντρωμένη αὐτή συνάρτηση εἶναι:

$$L_3 = \frac{T}{2}\ln\det(B_1WB_1') - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma_{11}) - \frac{1}{2}tr(\Sigma_{11}^{-1}A_1X'XA_1') \quad (6.82)$$

Ἡ συνάρτηση (6.82) εἶναι μή γραμμική στίς παραμέτρους τῶν n_1 ἐξισώσεων A_1 καί Σ_{11} . Ἡ μεγιστοποίησή της μπορεῖ νά γίνει εἴτε μέ:

(α) τρόπο ἀνάλογο μέ ἐκεῖνο πού θά ἀναπτύξουμε στό ἑπόμενο Κεφάλαιο γιά τήν περίπτωση τῆς ἐκτίμησης τῶν παραμέτρων ὁλόκληρου τοῦ συστήματος, εἴτε μέ

(β) μέθοδο ἀνάλογη μέ ἐκείνη τῆς ΜΜΠΠΠ στήν ὁποία θά ἀναφερθοῦμε στό ἑπόμενο τμῆμα αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου (βλέπε καί Hannan (1967) καί Chow and Chaudhuri (1967))

Οἱ ἐκτιμητές πού παίρνουμε μέ τίς δύο αὐτές μεθόδους ταυτίζονται καί εἶναι:

(i) συνεπεῖς,

(ii) ἀσυμπτωτικά κανονικοί, καί

(iii) ἀσυμπτωτικά ἀποτελεσματικοί σέ σχέση μέ κάθε ἄλλο ἐκτιμητή πού χρησιμοποιεῖ τίς ἴδιες ἐκ τῶν προτέρων πληροφορίες.

Ὁ ἐκτιμητής τῶν παραμέτρων τῆς καθεμιᾶς ἐξίσωσης πού παίρνουμε μέ τήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου πού ἀναλύθηκε στό τμῆμα αὐτό εἶναι λιγότερο ἀποτελεσματικός ἀπό ἐκεῖνο πού παίρνουμε ἐφαρμόζοντας τή μέθοδο τοῦ ἑπόμενου Κεφαλαίου, ἀλλά περισσότερο ἀποτελεσματικός ἀπό τόν ἐκτιμητή τῆς ΜΜΠΠΠ γιά μιά ἐξίσωση (γιά τόν ὁποῖο βλέπε τό ἑπόμενο τμῆμα).

Δέν θά ἐπεκταθοῦμε περισσότερο στή μέθοδο αὐτή γιατί στήν πράξη χρησιμοποιεῖται μόνο στήν περίπτωση πού δέν εἴμαστε βέβαιοι γιά τήν ἐξειδίκευση τῶν n_2 ἐξισώσεων ἤ στήν περίπτωση πού ὁ ἀριθμός τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εἶναι πολύ μεγάλος καί εἶναι δύσκολη ἡ ἐφαρμογή τῆς ΜΜΠΟΠ.

IV. Ἡ μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες γιά μιά ἐξίσωση

Ὅπως καί στό Κεφάλαιο 4-καί γιά τούς λόγους πού ἀναφέρθηκαν ἐκεῖ-θά πάρουμε καί στό τμῆμα αὐτό τήν πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος. Γιά τήν περίπτωση τῆς ἐξίσωσης αὐτῆς ἡ (6.82) ἐξειδικεύεται στήν παρακάτω συνάρτηση πιθανότητας:

$$L_4 = \frac{T}{2}\ln\left(\beta_{1.}W\beta_{1.}'\right) - \frac{T}{2}\ln(\sigma_1^2) - \frac{1}{2\sigma_1^2}\,\alpha_{1.}(X'X)\alpha_{1.}' \qquad (6.83)$$

ὅπου

$$\sigma_1^2 \equiv \sigma_{11} \qquad (6.84)$$

Στή συγκεντρωμένη συνάρτηση πιθανότητας (6.83) - ὅπως καί στίς προηγούμενες καί στίς ἑπόμενες - παραλείπουμε τό σταθερό ὅρο. Ὁ ὅρος αὐτός γιά τή (6.83) εἶναι:

$$k_4 = -\frac{T}{2}\left[n(\ln 2\pi - 1) + \ln(\det W)\right] \qquad (6.85)$$

Ὅπως καί στό Κεφάλαιο 4 ὑποθέτουμε ὅτι στήν πρώτη ἐξίσωση δέν περιλαμβάνονται $n_1^* = n - n_1$ ἐνδογενεῖς καί $m_1^* = m - m_1$ προκαθορισμένες μεταβλητές.

Ὁρίζουμε τή μήτρα τῶν μεταβλητῶν πού περιλαμβάνονται στήν πρώτη ἐξίσωση ὡς ἑξῆς:

$$X_1 = (Y_1 \vdots Z_1) \qquad (6.86)$$

ὅπου

$$Y_1 = (y_1 \vdots Y_1) \quad \text{καί} \quad Z_1 \equiv Z_1 \qquad (6.87)$$

Ὅπως φαίνεται ἀπό τίς (6.86) καί (6.87) ὁ δείχτης τῶν μητρῶν πού ὁρίζονται μέ τίς σχέσεις αὐτές εἶναι μέ κεφαλαῖο ἀριθμό ἕνα καί αὐτό γιά νά γίνεται διάκριση ἀνάμεσα στή μήτρα Y_1 τῶν προηγούμενων Κεφαλαίων (στήν ὁποία δέν περιλαμβάνεται τό διάνυσμα y_1)καί στή μήτρα Y_1 αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου στήν ὁποία, ὅπως φαίνεται ἀπό τή (6.87) περιλαμβάνεται καί τό διάνυσμα αὐτό.

Μέ ἀνάλογο τρόπο ὁρίζεται καί τό διάνυσμα τῶν παραμέτρων πού ἀντιστοιχοῦν στή μήτρα (6.86):

$$\alpha_1' = (\beta_1' \ , \ \gamma_1') \ \equiv (\beta_{n_1}' \ , \ \gamma_{m_1}') \tag{6.88}$$

Ἀπό τή (6.88) φαίνεται καί ἡ ἀντιστοιχία τῶν ὁρισμῶν αὐτοῦ του Κεφαλαίου μέ ἐκείνους τοῦ Κεφαλαίου 3 (βλέπε (3.19)).

Γιά λόγους ὁμοιομορφίας ὁρίζουμε τή μήτρα τῶν μεταβλητῶν πού δέν περιλαμβάνονται στήν πρώτη ἐξίσωση ὡς ἑξῆς:

$$X_1^* = (Y_1^* \ \vdots \ Z_1^*) \ \equiv \ (Y_1^* \ \vdots \ Z_1^*) \tag{6.89}$$

Χρησιμοποιώντας τούς παραπάνω ὁρισμούς βλέπουμε ὅτι:

$$\alpha_{1.} = (\beta_1' \ , \ 0_{n_1^*}', \ \ \gamma_1' \ , \ 0_{m_1^*}') \tag{6.90}$$

καί

$$X \ = \ (Y_1 \ \vdots \ Y_1^* \ \vdots \ Z_1 \ \vdots \ Z_1^*) \tag{6.91}$$

καί, κατά συνέπεια,

$$\alpha_{1.}X'X\alpha_{1.}' \ = \ \alpha_1'X_1'X_1\alpha_1 \tag{6.92}$$

Ἄν ὁρίσουμε τή μήτρα:

$$W_1 \ = \frac{1}{T}(Y_1'Y_1 \ - \ Y_1Z(Z'Z)^{-1}Z'Y_1 \ = \ Y_1'QY_1 \tag{6.93}$$

ὅπου

$$Q = \frac{1}{T}(I - Z(Z'Z)^{-1}Z') \tag{6.94}$$

Ἐπιπλέον

$$\beta_{1.}Y' = (\beta_1' \ , \ o'_{n_1^*}) \begin{bmatrix} Y_1' \\ Y_1^{*\prime} \end{bmatrix} = \beta_1'Y_1' \tag{6.95}$$

Κατά συνέπεια:

$$\beta_{1.}W\beta_{1.}' = \beta_{1.}Y'QY\beta_{1.}' = \beta_1'Y_1'QY_1\beta_1 = \beta_1'W_1\beta_1 \tag{6.96}$$

Ἀντικαθιστώντας τίς (6.92) καί (6.96) στή (6.83) ἔχουμε:

$$L_4 = \frac{T}{2}\ln(\beta_1'W_1\beta_1) - T\ln\sigma_1 - \frac{1}{2\sigma_1^2}\alpha_1'(X_1'X_1)\alpha_1 \tag{6.97}$$

Ἡ (6.97) περιέχει μόνο τίς παραμέτρους τῆς πρώτης ἐξίσωσης τίς ὁποῖες καί ἐνδιαφερόμαστε νά ἐκτιμήσουμε. Ἡ μεγιστοποίηση τῆς (6.97) ὡς πρός τίς παραμέτρους αὐτές θά γίνει σέ τρία στάδια: Πρῶτα ὡς πρός σ_1, στή συνέχεια ὡς πρός γ_1 καί τελικά ὡς πρός β_1 .

Ἡ συνθήκη πρώτης τάξης γιά τή μεγιστοποίηση τῆς (6.97) ὡς πρός σ_1 εἶναι:

$$\frac{\partial L_4}{\partial \sigma_1} = -\frac{T}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1^3}\alpha_1'(X_1'X_1)\alpha_1 = 0 \tag{6.98}$$

Ἀπό τή (6.98) βρίσκουμε:

$$\sigma_1^2 = (\alpha_1'(X_1'X_1)\alpha_1)/T \tag{6.99}$$

Οἱ συνθῆκες δεύτερης τάξης εἶναι:

$$\frac{\partial^2 L_4}{\partial \sigma_1^2} = -\frac{2T}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4}(T\sigma^2) = -\frac{T}{\sigma^2} < 0 \qquad (6.100)$$

κατά συνέπεια ἔχουμε ἕνα μοναδικό μέγιστο.

Ἀντικαθιστώντας τή (6.99) στή (6.83) καί παραλείποντας τό (νέο) σταθερό ὅρο, ἔχουμε:

$$L_5 = \frac{T}{2}\ln(\beta_1' W_1 \beta_1) - \frac{T}{2}\ln(\alpha_1'(\frac{X_1'X_1}{T})\alpha_1) = -\frac{T}{2}\ln\lambda(\alpha_1) \qquad (6.101)$$

ὅπου

$$\lambda(\alpha_1) = \frac{\alpha_1'(X_1'X_1)\alpha_1}{T\beta_1' W_1 \beta_1} \qquad (6.102)$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς (6.86) καί (6.88) στή (6.102) ἡ συνθήκη πρώτης τάξης τῆς μεγιστοποίησης τῆς (6.101) ὡς πρός γ_1 δίνει:

$$\gamma_1 = -(Z_1'Z_1)^{-1}(Z_1'Y_1)\beta_1 \qquad (6.103)$$

Ἀντικαθιστώντας τή (6.103) στή (6.101) βρίσκουμε:

$$L_6 = -\frac{T}{2}\ln\frac{\beta_1' W_2 \beta_1}{\beta_1' W_1 \beta_1} \qquad (6.104)$$

ὅπου

$$W_2 = \frac{1}{T}(Y_1'Y_1 - Y_1'Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Y_1) \qquad (6.105)$$

Ἡ μεγιστοποίηση τῆς (6.104) ὡς πρός β_1 εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἐλαχιστοποίηση τῆς

$$\lambda = \frac{\beta_1' W_2 \beta_1}{\beta_1' W_1 \beta_1} \qquad (6.106)$$

Ἡ ἐλαχιστοποίηση τῆς (6.106) δίνει τήν ἐξίσωση:

$$(W_2 - \lambda W_1)\beta_1 = 0 \qquad (6.107)$$

Ἡ ἐλάχιστη τιμή τῆς (6.106) εἶναι ἴση μέ τή μικρότερη ρίζα (τή λ_1) τῆς ἐξίσωσης:

$$\det(W_2 - \lambda W_1) = 0 \qquad (6.108)$$

Στή ρίζα λ_1 ἀντιστοιχεῖ μιά λύση τῆς (6.107) πού εἶναι μοναδική ὅταν ἐπιβάλουμε τόν κανόνα τυποποίησης $\beta_{11} = 1$. Ἡ λύση αὐτή εἶναι ὁ ἐκτιμητής μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες τοῦ διανύσματος β_1 καί συμβολίζεται μέ $\tilde{\beta}_1$.

Ἀντικαθιστώντας τό διάνυσμα $\tilde{\beta}_1$ στή (6.103) βρίσκουμε τόν ἐκτιμητή μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες τοῦ γ_1 πού τόν συμβολίζουμε μέ $\tilde{\gamma}_1$.

Τέλος, ἀντικαθιστώντας τά διανύσματα $\tilde{\beta}_1$ καί $\tilde{\gamma}_1$ στή (6.88) βρίσκουμε τόν ἐκτιμητή ΜΜΠΠΠ τοῦ διανύσματος α_1 πού τόν συμβολίζουμε μέ $\tilde{\alpha}_1$. Τόν ἐκτιμητή αὐτό ἀντικαθιστοῦμε στή (6.99) καί βρίσκουμε τόν ἐκτιμητή ΜΜΠΠΠ τῆς σ_1^2 πού τόν συμβολίζουμε μέ $\tilde{\sigma}_1^2$

V. Ἰδιότητες τῶν ἐκτιμητῶν τῆς ΜΜΠΠΠ

Πρόταση 1. Ἄν ἡ ἐξίσωση πού ἐκτιμοῦμε μέ τή ΜΜΠΠΠ εἶναι ὑπερταυτοποιημένη τότε $\lambda_1 > 1$, ἄν εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένη $\lambda_1 = 1$ καί, τέλος, ἄν εἶναι ὑποταυτοποιημένη ὑπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Ἀπόδειξη: Βλέπε Koopmans and Hood (1953), σελ. 173-175.

Μέ βάση τήν παραπάνω Πρόταση ἔχουμε τά παρακάτω δύο Πορίσματα:

Πόρισμα 1. Ἀναγκαία συνθήκη γιά νά ὑπάρχει ὁ ἐκτιμητής τῆς ΜΜΠΠΠ εἶναι ἡ ἐξίσωση γιά τήν ὁποία ἐνδιαφερόμαστε νά εἶναι ὑπερταυτοποιημένη ἤ ἀκριβῶς ταυτοποιημένη.

Πόρισμα 2. Ὅταν ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένη ὁ ἐκτιμητής τῆς ΜΜΠΠΠ ταυτίζεται μέ τούς ἐκτιμητές τῆς ΕΜΕΤ, 2ΣΜΕΤ καί ΜΒΜ.

Πρόταση 2. Ἡ στατιστική $T\ln\lambda_1$ συγκλίνει κατά κατανομή σέ χ^2 μέ $m_1^* - n_1 + 1$ βαθμούς ἐλευθερίας, ἤ συμβολικά:

$$T\ln\lambda_1 \xrightarrow{d} \chi^2_{m_1^* - n_1 + 1}$$

Ἀπόδειξη: Βλέπε Koopmans and Hood (1953), σελ. 182-3.

Πρόταση 3. Κάτω ἀπό ὁρισμένες συνθῆκες (βλέπε σχετικά Anderson (1950), σελ. 316-317) ὁ ἐκτιμητής ΜΜΠΠΠ εἶναι συνεπής καί ἄριστος ἀσυμπτωτικά κανονικός σέ σχέση μέ κάθε ἄλλο ἐκτιμητή πού χρησιμοποιεῖ τίς ἴδιες ἐκ τῶν προτέρων πληροφορίες.

Ἀπόδειξη: Βλέπε καί Dhrymes (1970), σελ. 348.

Πρόταση 4. Ὁ ἐκτιμητής τῆς ΜΜΠΠΠ μέ τόν κανόνα τυποποίησης $\beta_{11} = 1$ εἶναι ἕνας ἐκτιμητής τάξης k μέ $k = \lambda_1$.

Ἀπόδειξη: Βλέπε Dhrymes (1970), σελ. 349-50.

Πρόταση 5. Ἡ ἀσυμπτωτική κατανομή τοῦ ἐκτιμητῆ τῆς ΜΜΠΠΠ στήν περίπτωση μιᾶς ἀκριβῶς ἤ ὑπέρ-ταυτοποιημένης ἐξίσωσης συμπίπτει μέ ἐκείνη τοῦ ἐκτιμητῆ τῆς 2ΣΜΕΤ.

Ἀπόδειξη: Βλέπε Dhrymes (1970), σελ. 351-2.

Εἶναι εὐνόητο, μέ βάση τήν Πρόταση 5, ὅτι οἱ ἔλεγχοι σημαντικότητας τῶν στοιχείων ἤ ὁλόκληρου τοῦ ἐκτιμητῆ ΜΜΠΠΠ γίνονται ἀκριβῶς ὅπως στήν περίπτωση τῆς 2ΣΜΕΤ (σχετικά βλέπε Κεφάλαιο 4).

Οἱ Chernoff and Rubin (1953) καί οἱ Koopmans and Hood (1953) ἔχουν κάνει δύο (ἰσοδύναμες) γενικεύσεις τῆς ΜΜΠΠΠ. Ἡ γενίκευση τῶν πρώτων εἶναι εὐρύτερη ἀπό ἐκείνη τῶν δευτέρων.

Οἱ Chernoff and Rubin (1953) ἀπόδειξαν ὅτι ὁ ἐκτιμητής τῆς γενικευμένης ΜΜΠΠΠ,πού πρότειναν,συνεχίζει νά εἶναι συνεπής καί ἀσυμπτωτικά κανονικός ἀκόμα καί σέ περιπτώσεις πού ὁ ἐκτιμητής τῆς 2ΣΜΕΤ δέν εἶναι. Ἔτσι ὁ ἐκτιμητής τῆς γενικευμένης ΜΜΠΠΠ ἔχει ἐπιθυμητές ἰδιότητες καί σέ περιπτώσεις παράλειψης μεταβλητῶν, λαθῶν στίς παρατηρήσεις, συσχέτισης τῶν προκαθορισμένων μεταβλητῶν καί τῶν διαταρακτικῶν ὅρων, μή γραμμικότητας ὁρισμένων ἐξισώσεων κ.λ.π.

Γιά περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά μέ τίς ἰδιότητες τῶν ἐκτιμητῶν τῆς ΜΜΠΠΠ παραπέμπουμε τόν ἀναγνώστη στίς πρωτοποριακές ἐργασίες πού ἀναφέρθηκαν πιό πάνω καθώς καί στά γνωστά ἐγχειρίδια τῶν Dhrymes(1970), Rowley (1973) κ.ἄ.

VI. Έλεγχοι έξειδίκευσης μιᾶς έξίσωσης

Οί ἔλεγχοι έξειδίκευσης (specification tests) έξετάζουν ἄν εἶναι σωστή ή έξειδίκευση μιᾶς έξίσωσης, δηλαδή τό σύνολο τῶν ὑποθέσεων πού κάνουμε πρίν νά τήν έκτιμήσουμε. Οί ἔλεγχοι αὐτοί ἔχουν μεγάλη σημασία διότι οί ἰδιότητες τῶν έκτιμητῶν στίς όποῖες άναφερθήκαμε σέ τοῦτο καί στά προηγούμενα Κεφάλαια (συνέπεια, άποτελεσματικότητα κλπ) ἰσχύουν μόνον ὅταν ή έξειδίκευση πού ἔχουμε κάνει εἶναι σωστή.

Οί κύριοι ἔλεγχοι έξειδίκευσης άναπτύχθηκαν άρχικά σάν ἔλεγχοι λόγου πιθανότητας. Γενικεύονται, ὅμως, καί γιά τήν περίπτωση πού οί διαταρακτικοί ὅροι δέν εἶναι κανονικοί.

Μέ τούς έλέγχους έξειδίκευσης, πού βρίσκονται σέ συνεχῆ άνάπτυξη, δέν εἶναι δυνατόν νά άσχοληθοῦμε στόν Τόμο αὐτό. Ὁ ένδιαφερόμενος άναγνώστης μπορεῖ νά συμβουλευτεῖ τίς σχετικές έργασίες τῶν Anderson (1951), Chernoff and Rubin (1953), Sargan (1958), Basmann (1960), Hannan (1967), Wu (1973), Kadane (1974), Morgan and Vandaele (1974), Hatanaka (1977) καί Hausman (1978).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

Εἰσαγωγή

Ἡ μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ ὅλες τίς πληροφορίες (ΜΜΠΟΠ) (Full information maximum likelihood method) προτάθηκε ἀπό τούς Koopmans, Rubin and Leipnik (1950), δηλαδή ἀρκετά νωρίτερα ἀπό τή 3ΣΜΕΤ. Γιά ἕνα πολύ μεγάλο, ὅμως, χρονικό διάστημα ἡ ΜΜΠΟΠ δέν χρησιμοποιήθηκε στήν πράξη γιατί οἱ δυσκολίες τῆς ἐφαρμογῆς της ἦταν πολύ μεγαλύτερες ἀπό ἐκεῖνες τῆς 3ΣΜΕΤ.

Ἡ μεγάλη ἀνάπτυξη τῆς ἐπιστήμης καί τεχνολογίας τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν τήν τελευταία 15ετία ἔφεραν καί πάλι στό προσκήνιο τῆς ΜΜΠΟΠ, ἡ ὁποία παρουσιάζει ἀρκετά πλεονεκτήματα σέ σύγκριση μέ ἄλλες μεθόδους ἐκτίμησης τῶν παραμέτρων ἑνός συστήματος ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων.

Ἡ ΜΜΠΟΠ χρησιμοποιεῖ μέ τόν πιό ἀποτελεσματικό τρόπο ὅλες τίς πληροφορίες πού διαθέτουμε γιά τό σύστημα, τόσο τίς ἐκ τῶν προτέρων ὅσο καί ἐκεῖνες πού περιέχονται στό δεῖγμα. Ὁ Hendry (1976) δείχνει ὅτι τό σύνολο, σχεδόν, τῶν ἐκτιμητῶν πού χρησιμοποιοῦνται στήν Οἰκονομετρία μπορεῖ νά θεωρηθοῦν σάν προσεγγίσεις στόν ἐκτιμητή πού παίρνουμε ἐφαρμόζοντας τή ΜΜΠΟΠ. Τέλος μέ τή χρησιμοποίηση τῆς στατιστικῆς τοῦ λόγου τῶν πιθανοτήτων μποροῦμε νά προχωρήσουμε σέ ἀσυμπτωτικά ἀποτελεσματικούς ἐλέγχους γιά ἕνα μεγάλο σύνολο ὑποθέσεων.

Μέ τή ΜΜΠΟΠ μποροῦν νά ἀντιμετωπιστοῦν καί ειδικά προβλήματα πού παρουσιάζονται σέ συστήματα ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων, ὅπως, π.χ. ἡ παρουσία ταυτοτήτων, ψευδομεταβλητῶν στίς στοχαστικές ἐξισώσεις κ.λ.π. ἤ ἡ ἔλλειψη ὁρισμένων παρατηρήσεων (βλέπε π.χ. Drettakis (1971)).

Σέ ὅλες τίς περιπτώσεις ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ ὅλες τίς πληροφορίες ἀνακύπτει τό πρόβλημα τῆς μεγιστοποίησης ἤ ἐλαχιστοποίησης μή γραμμικῶν συναρτήσεων. Γιά τήν ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἔχουν ἀναπτυχθεῖ πολλές μέθοδοι (στίς περισσότερες περιπτώσεις ὄχι ἀπό Οἰκονομέτρες) ὅπως π.χ. **οἱ μέθοδοι κλίσης** (Gradient methods) ἤ **οἱ μέθοδοι ἄμεσης ἔρευνας** (direct search methods). Ἡ σχετική βιβλιογραφία πάνω στήν τεχνική τῆς μή γραμμικῆς μεγιστοποίησης εἶναι πάρα πολύ μεγάλη (βλέπε π.χ. Fletcher (1969), Box, Davies and Swann (1969), Goldfeld and Quandt (1972) κ.ἄ.

Εἶναι αὐτονόητο ὅτι στόν Τόμο αὐτό δέν εἶναι δυνατόν νά ἀσχοληθοῦμε μέ τά ειδικά προβλήματα πού προαναφέρθηκαν ἤ μέ μιά ἀνάλυση τῶν μεθόδων μή γραμμικῆς μεγιστοποίησης. Ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς ΜΜΠΠΠ, δέν θά ἀσχοληθοῦμε μέ ἐλέγχους ἐξειδίκευσης ὁλόκληρου τοῦ ὑποδείγματος.

Στό τελευταῖο αὐτό Κεφάλαιο τοῦ δεύτερου Τόμου τῆς Θεωρητικῆς Οἰκονομετρίας θά περιοριστοῦμε στό νά ἀναλύσουμε τήν ἐφαρμογή τῆς ΜΜΠΟΠ στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς ἀνηγμένης καί τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς ἑνός συστήματος ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων καί νά δώσουμε μερικές ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν σχετικῶν ἐκτιμητῶν.

Ι. Ἐφαρμογή τῆς ΜΜΠΟΠ στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς ἀνηγμένης μορφῆς

Ἡ συνάρτηση πιθανότητας ἀπό τήν ὁποία ξεκινᾶμε γιά τήν ἐφαρμογή τῆς ΜΜΠΟΠ στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς ἀνηγμένης μορφῆς ἑνός συστήματος ἀλληλεξαρτημένων στοχαστικῶν ἐξισώσεων εἶναι ἡ (6.40) τήν ὁποία ξαναδίνουμε πιό κάτω:

$$L(Y,Z;\Pi,\Sigma_v) = k - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma_v) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_v^{-1}Y'Y) +$$

$$+ \mathrm{tr}(\Sigma_v^{-1}Y'Z\Pi') + \mathrm{tr}(\Sigma_v^{-1}\Pi Z'Z\Pi') \qquad (7.1)$$

Οἱ συνθῆκες πρώτης τάξης γιά τή μεγιστοποίηση τῆς (7.1) ὡς πρός Π (βλέπε καί Γραμμική Ἄλγεβρα, σελ. 174) εἶναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \Pi} = \Sigma_v^{-1}(Y'Z - \Pi Z'Z) = 0 \qquad (7.2)$$

Κατά συνέπεια:

$$\tilde{\Pi} = Y'Z(Z'Z)^{-1} \qquad (7.3)$$

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ (7.3) ταυτίζεται μέ τόν ἐκτιμητή τῆς μήτρας Π μέ τήν ΑΜΕΤ.

Ἀντικαθιστώντας τήν (7.3) στή (7.1) παίρνουμε τή συγκεντρωμένη συνάρτηση πιθανότητας (παραλείποντας, ὅπως στό προηγούμενο Κεφάλαιο τό σταθερό ὅρο) πού δίνεται πιό κάτω:

$$L^*(Y,Z;\Sigma_v) = \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma_v^{-1}) - \frac{T}{2}\mathrm{tr}(\Sigma_v^{-1}W) \qquad (7.4)$$

ὅπου (βλέπε καί προηγούμενο Κεφάλαιο):

$$W = \frac{1}{T}(Y'Y - Y'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y) = \frac{1}{T}(Y - ZP')'(Y - ZP') =$$

$$= \frac{1}{T}\hat{V}'\hat{V} \qquad (7.5)$$

Οἱ συνθῆκες πρώτης τάξης γιά τή μεγιστοποίηση τῆς (7.4) ὡς πρός Σ_v^{-1} εἶναι:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \Sigma_v^{-1}} = \frac{T}{2}(\Sigma_v - W) = 0 \qquad (7.6)$$

Ἀπό τή (7.6) βρίσκουμε:

$$\bar{\Sigma}_v = W \qquad (7.7)$$

Ἐφόσον ὁ ἐκτιμητής (7.3) ταυτίζεται μέ τόν ἐκτιμητή (4.10) καί ἐφόσον ὁ τελευταῖος, ὅπως δείξαμε στήν Πρόταση 1 τοῦ Κεφαλαίου 4, εἶναι συνεπής, ἔπεται ὅτι καί ὁ ἐκτιμητής (7.7) εἶναι , ἐπίσης, συνεπής.

Ὅπως παρατηρεῖ ὁ Dhrymes (1973), ἐνῶ οἱ ἐκτιμητές (7.3) καί (7.7) χρησιμοποιοῦν ὅλες τίς πληροφορίες πού περιέχονται στό δεῖγμα, δέν χρησιμοποιοῦν καμιά ἀπό τίς ἐκ τῶν προτέρων πληροφορίες πού ἔχουμε γιά τό ὑπόδειγμα. Κατά συνέπεια οἱ ἐκτιμητές αὐτοί δέν εἶναι ἀσυμπτωτικά ἀποτελεσματικοί, ἐκτός ἄν ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένες.

Στήν περίπτωση πού ἔστω καί μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ὑπερταυτοποιημένη οἱ ἐκτιμητές (7.3) καί (7.7) εἶναι λιγότερο ἀποτελεσματικοί ἀπό ἐκείνους πού βρίσκουμε ἀντικαθιστώντας στή σχέση:

$$\Pi = -B^{-1}\Gamma \qquad (7.8)$$

τούς ἐκτιμητές τῶν μητρῶν B καί Γ πού βρίσκουμε ἐφαρμόζοντας γιά τήν ἐκτίμησή τους τή 3ΣΜΕΤ ἤ τή ΜΜΠΟΠ.

Στήν περίπτωση πού ὅλες οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ἀκριβῶς ταυτοποιημένες μποροῦμε, ἀντικαθιστώντας τήν (7.3) στήν (7.8) νά βροῦμε τούς ἐκτιμητές τῶν μητρῶν Β καί Γ καί, στή συνέχεια, ἀντικαθιστώντας τόν ἐκτιμητή τῆς μήτρας Β καί τήν (7.7) στήν (6.37) νά βροῦμε τόν ἐκτιμητή τῆς μήτρας Σ. Οἱ ἐκτιμητές πού βρίσκουμε μέ τόν τρόπο αὐτό γιά τίς παραμέτρους τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς εἶναι συνεπεῖς καί ἀσυμπτωτικά ἀποτελεσματικοί.

II. Ἐφαρμογή τῆς ΜΜΠΟΠ στήν ἐκτίμηση τῶν παραμέτρων τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς

Ἡ συνάρτηση πιθανότητας δείγματος πού περιέχει τίς παραμέτρους τῆς διαρθρωτικῆς μορφῆς δίνεται στή (6.33) πού, γιά χάρη εὐκολίας, ἐπαναλαμβάνεται πιό κάτω:

$$L(Y,Z;B,\Gamma,\Sigma) = k + T\ln|\det B| - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma) - \frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}BY'YB')$$

$$-tr(\Sigma^{-1}BY'Z\Gamma') - \frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}\Gamma Z'Z\Gamma') \qquad (7.9)$$

ἤ

$$L(X;A,\Sigma) = k + T\ln|\det B| - \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma) -$$

$$- \frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}AX'XA') \qquad (7.10)$$

Ἡ (7.10), πάλι γιά λόγους εὐκολίας, εἶναι ἐπανάληψη τῆς (6.30)

Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀρκετοί περιορισμοί στίς μῆτρες τῶν παραμέτρων Α καί Σ , ὥστε τό σύστημα νά εἶναι ταυτοποιημένο.

Ἡ μεγιστοποίηση τῆς (7.10) χωρίς νά πάρουμε ὑπόψη τούς περιορισμούς στίς μῆτρες Β καί Γ , ὅπως κάναμε στήν περίπτωση τῆς συνάρτησης τῆς ἀνηγμένης μορφῆς τοῦ ὑποδείγματος,δέν ἔχει νόημα, διότι ἡ διαδικασία αὐτή ἰσοδυναμεῖ μέ τή λύση τοῦ συστήματος (7.8) ὡς πρός τίς μῆτρες Β καί Γ χωρίς κανένα περιορισμό. Εἶναι γνωστό (βλέπε καί Κεφάλαιο 3) ὅτι ἄπειρες τιμές τῶν μητρῶν Β καί Γ ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση (7.8) καί κατά συνέπεια εἶναι ἀδύνατο νά βροῦμε ἕνα μοναδικό ἐκτιμητή τους.

Οἱ παράμετροι πού περιέχονται στίς μῆτρες Α καί Σ χωρίζονται σέ δύο κατηγορίες: τίς **παραμέτρους χωρίς περιορισμούς** (unconstrained parameters) καί τίς **παραμέτρους μέ περιορισμούς** (constrained parameters). Οἱ τελευταῖες μπορεῖ νά εἶναι παράμετροι πού γνωρίζουμε τήν τιμή τους ἐκ τῶν προτέρων (καί τίς ὀνομάζουμε "σταθερές") ἤ μπορεῖ νά εἶναιμιά γνωστή συνάρτηση τῶν παραμέτρων χωρίς περιορισμούς. Ἡ πιό συνηθισμένη περίπτωση στήν Οἰκονομετρία (βλέπε καί Κεφάλαιο 3) εἶναι ὅλοι οἱ περιορισμοί νά εἶναι μηδενικοί ὁπότε οἱ παράμετροι μέ περιορισμούς εἶναι ἴσες μέ τό μηδέν ἐνῶ ὅλες οἱ ἄλλες εἶναι παράμετροι χωρίς περιορισμούς.

Ἄν

$$\alpha, \sigma \tag{7.11}$$

εἶναι τά ὑποδιανύσματα τῶν

$$\mathrm{vec}A', \quad \mathrm{vec}\Sigma \tag{7.12}$$

ἀντίστοιχα, πού περιέχουν τίς παραμέτρους χωρίς δεσμεύσεις τῶν μητρῶν Α καί Σ καί ἄν θέσουμε

$$\vartheta' = (\alpha' , \sigma') \tag{7.13}$$

μποροῦμε νά γράψουμε τή (7.10) στή μορφή:

$$L(X ; \vartheta) \tag{7.14}$$

δηλαδή σάν συνάρτηση τοῦ δείγματος καί τῶν παραμέτρων ϑ.

῾Η συνάρτηση (7.14) μπορεῖ νά μεγιστοποιηθεῖ μέ μιά ἀπό τίς μεθόδους πού ἀναφέρθηκαν στήν Εἰσαγωγή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου ,π.χ. τή μέθοδο Newton-Raphson. Ἄν ἔχουμε ἕνα συνεπῆ ἐκτιμητή τοῦ (7.13), π.χ. ἕνα ἐκτιμητή μέ τή 2ΣΜΕΤ,καί τόν χρησιμοποιήσουμε σάν ἀρχική τιμή στή μέθοδο Newton-Raphson, τότε θά ἔχουμε πολύ γρήγορη σύγκλιση στόν ἐκτιμητή μέγιστης πιθανότητας $\tilde{\vartheta}$.

῾Η παραπάνω μέθοδος παίρνει ὑπόψη ὅλες τίς πληροφορίες τόσο τοῦ δείγματος ὅσο καί τίς ἐκ τῶν προτέρων γιά τό ὑπόδειγμα καί γι'αὐτό ὀνομάστηκε μέθοδος μέγιστης πιθανότητας μέ ὅλες τίς πληροφορίες. ῾Ο ἐκτιμητής $\tilde{\vartheta}$ τῆς ΜΜΠΟΠ ἔχει ὅλες τίς ἰδιότητες τοῦ ἐκτιμητῆ μέγιστης πιθανότητας (βλέπε,σχετικά, καί τό τμῆμα Ι τοῦ προηγούμενου Κεφαλαίου).

Οἱ Rothenberg and Leenders (1964) πρότειναν τόν ἐκτιμητή:

$$\vartheta^L = \vartheta^o - \left[\frac{\partial^2 L(X;\vartheta^o)}{\partial\vartheta\partial\vartheta'}\right]^{-1} \frac{\partial L(X;\vartheta^o)}{\partial\vartheta} \tag{7.15}$$

ὅπου ϑ^o εἶναι ἕνας συνεπής ἐκτιμητής τοῦ ϑ τέτοιος ὥστε

$$\vartheta^o - \vartheta = O(1/\sqrt{T}) \tag{7.16}$$

῾Ο (7.15) ὀνομάζεται ἐκτιμητής τῆς **γραμμικοποιημένης μεθόδου μέγιστης πιθανότητας** (**linearised maximum likelihood method**) καί,ὅπως ἀποδείχνουν οἱ συγγραφεῖς πού τόν πρότειναν,εἶναι ἀσυμπτωτικά ἰσοδύναμος μέ τόν ἐκτιμητή τῆς ΜΜΠΟΠ.

Οἱ ἴδιοι συγγραφεῖς ἀποδείχνουν καί τήν παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 1. ῾Ο ἐκτιμητής τῆς μήτρας **A** πού παίρνουμε μέ τή ΜΜΠΟΠ χρησιμοποιώντας ὅλες τίς ἐκ τῶν προτέρων πληροφορίες τόσο γιά τή μήτρα **A** ὅσο καί γιά τή μήτρα Σ , εἶναι, γενικά, πιό ἀποτελεσματικός ἀπό τόν ἐκτιμητή τῆς μήτρας **A** πού παίρνουμε μέ τή ΜΜΠΟΠ παραλείποντας ορισμένες πληροφορίες γιά τή μήτρα Σ.

III. Εκτίμηση τών παραμέτρων τής διαρθρωτικής μορφής μέ τή ΜΜΠΟΠ χωρίς περιορισμούς στή μήτρα Σ

Ἡ πιό συνηθισμένη περίπτωση στήν Οἰκονομετρία εἶναι νά μήν ἔχουμε ἐκ τῶν προτέρων περιορισμούς στή μήτρα Σ , ἐκτός ἀπό ἐκείνους πού ἐπιβάλονται ἀπό τήν ὕπαρξη ταυτοτήτων στό σύστημα. Ἀντίθετα ἀπό τή 3ΣΜΕΤ, στή ΜΜΠΟΠ δέν μποροῦμε νά ἐκτιμήσουμε τίς παραμέτρους τῶν στοχαστικῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἀγνοώντας τίς ταυτότητες.

Στό τμῆμα αὐτό ὑποθέτουμε ὅτι στό σύστημα δέν ὑπάρχουν ταυτότητες καί στή (μή ἰδιάζουσα καί θετικά ὁρισμένη) μήτρα Σ δέν ὑπάρχουν περιορισμοί.

Ἡ συνάρτηση πιθανότητας (7.10) γράφεται καί ὡς ἐξῆς:

$$L(X;A,\Sigma) = k + T\ \ln|\det B| + \frac{T}{2}\ln(\det\Sigma^{-1}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}AX'XA') \tag{7.17}$$

Οἱ συνθῆκες πρώτης τάξης γιά τή μεγιστοποίηση τῆς (7.17) ὡς πρός Σ^{-1} εἶναι:

$$\frac{\partial L}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{T}{2}\Sigma - \frac{1}{2}AX'XA' = 0 \tag{7.18}$$

Λύνοντας τή (7.18) βρίσκουμε τόν ἐκτιμητή ΜΜΠΟΠ τῆς Σ πού εἶναι:

$$\Sigma = A(\frac{X'X}{T})A' \tag{7.19}$$

ἄν, φυσικά, γνωρίζουμε τόν ἐκτιμητή ΜΜΠΟΠ τῆς μήτρας A .

'Αντικαθιστώντας τή (7.19) στή (7.17) ἔχουμε (παραλείποντας τό νέο σταθερό ὅρο) τή συγκεντρωμένη συνάρτηση πιθανότητας:

$$L^*(X; A) = T\ \ln|\det B| - \frac{T}{2}\ln(\det\left[A(\frac{X'X}{T})A\right]) \tag{7.20}$$

'Η (7.20) εἶναι μή γραμμική συνάρτηση τῶν παραμέτρων τῆς μήτρας A . 'Η μεγιστοποίησή της μπορεῖ νά γίνει μέ μιά ἀπό τίς μεθόδους πού ἀναφέρθηκαν στήν Εἰσαγωγή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου. Τό πρόβλημα,ὅμως, μπορεῖ νά ἀπλοποιηθεῖ μέ διάφορους τρόπους.

'Ο Durbin (1963) προτείνει νά διαφορίσουμε τή συνάρτηση (7.20).'Εφαρμόζοντας τούς κανόνες γιά τό διαφορικό μητρῶν πού δίνονται στό Παράρτημα αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, καί παίρνοντας ὑπόψη τή (7.19) ἔχουμε:

$$\begin{aligned} dL^* &= T d\ln|\det B| - \frac{T}{2}d\ln(\det\Sigma) = \\ &= T\mathrm{tr}(B^{-1}dB) - \frac{T}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}d\Sigma) \end{aligned} \tag{7.21}$$

Παίρνοντας ὑπόψη ὅτι:

$$d\Sigma = d\left[A(\frac{X'X}{T})A'\right] = dA(\frac{X'X}{T})A' + A(\frac{X'X}{T})dA' \tag{7.22}$$

καί κατά συνέπεια:

$$\frac{T}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}d\Sigma) = \frac{T}{2}\mathrm{tr}\left[\Sigma^{-1}2A(\frac{X'X}{T})dA\right] = \mathrm{tr}\ \Sigma^{-1}A(X'X)dA \tag{7.23}$$

'Αντικαθιστώντας τή (7.23) στή (7.21) ἔχουμε:

$$dL^* = T\mathrm{tr}(B'^{-1}dB') - \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}A(X'X)dA') \qquad (7.24)$$

'Εφόσον:

$$dA = (dB \,\vdots\, d\Gamma) \qquad (7.25)$$

καί

$$(B'^{-1}B\ ) = (B'^{-1} \,\vdots\, 0)\begin{bmatrix} dB' \\ d\Gamma' \end{bmatrix} \qquad (7.26)$$

"Αν συμβολίσουμε μέ:

$$R = \Sigma^{-1}A(X'X) - T(B'^{-1} \,\vdots\, 0) \qquad (7.27)$$

'Η (7.24) γράφεται :

$$dL^* = -\mathrm{tr}(RdA') = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+m} r_{ij}\, d\alpha_{ij} \qquad (7.28)$$

Γιά νά έχουμε μέγιστο ή (7.28) θά πρέπει νά είναι ίση μέ τό μηδέν, δηλαδή:

$$dL^* = 0 \qquad (7.29)$$

'Υποθέτουμε ότι δέν έχουμε γραμμικούς περιορισμούς στή μήτρα A . Κατά συνέπεια οί παράμετροι στή μήτρα αύτή θά είναι είτε γνωστές έκ τῶν προτέρων, όπότε:

$$d\alpha_{ij} = 0 \qquad (7.30)$$

είτε θά είναι παράμετροι χωρίς περιορισμούς,όπότε τό διαφορικό $d\alpha_{ij}$ θά είναι αύθαίρετο. Γιά νά ίσχύει, έπομένως, ή (7.29) θά πρέπει τά r_{ij} πού άντιστοιχοῦν στά αύθαίρετα διαφορικά νά είναι ἴσα μέ τό μηδέν, ἐνῶ τά r_{ij} πού ἀντιστοιχοῦν στά (7.30) μποροῦν νά πάρουν αὐθαίρετες τιμές. Τά παραπάνω συνοψίζονται στή συνθήκη:

$$R = \Sigma^{-1}A(X'X) - T(B'^{-1} \vdots \ 0) \overset{c}{=} 0 \qquad (7.31)$$

Ἡ μήτρα (7.31) εἶναι διαστάσεων nx(n+m) ἀκριβῶς ὅπως καί ἡ μήτρα A . Μποροῦμε, κατά συνέπεια, νά ἀντιστοιχήσουμε τά στοιχεῖα r_{ij} τῆς μήτρας R μέ τά στοιχεῖα α_{ij} τῆς μήτρας A γιά $i = 1,2,......,n$ καί $j = 1,2,.........,n+m$. Ὁ συμβολισμός ἐξάλλου:

$$\overset{c}{=}$$

σημαίνει ὅτι ἴσα μέ τό μηδέν εἶναι μόνο τά στοιχεῖα τῆς μήτρας R πού ἀντιστοιχοῦν στά χωρίς περιορισμούς (δηλαδή σέ ἐκεῖνα πού δέν εἶναι ἐκ τῶν προτέρων γνωστά) στοιχεῖα τῆς μήτρας A.

Ἡ συνθήκη (7.31) εἶναι ἡ συνθήκη πρώτης τάξης γιά τή μεγιστοποίηση τῆς (7.20).

Παίρνοντας ὑπόψη ὅτι:

$$\begin{aligned} B'^{-1} &= \Sigma^{-1}\Sigma B'^{-1} = \Sigma^{-1}A\left(\frac{X'X}{T}\right)A'B'^{-1} = \\ &= \frac{1}{T}\,\Sigma^{-1}AX'(Y \vdots Z)\begin{bmatrix} B' \\ \Gamma' \end{bmatrix}B'^{-1} = \\ &= \frac{1}{T}\,\Sigma^{-1}AX'(Y \vdots Z)\begin{bmatrix} I \\ -\Pi' \end{bmatrix} = \frac{1}{T}\,\Sigma^{-1}AX'(Y - Z\Pi') = \\ &= \frac{1}{T}\,\Sigma^{-1}AX'V \end{aligned} \qquad (7.32)$$

Ὅπου V εἶναι ἡ μήτρα τῶν διαταρακτικῶν ὅρων τῆς ἀνηγμένης μορφῆς τοῦ ὑποδείγματος.

Παίρνοντας, ἐπιπλέον, ὑπόψη ὅτι:

$$X = (Y \vdots Z) = (Z\Pi' + V \vdots Z) = ZG' + (V \vdots 0) \qquad (7.33)$$

ὅπου

$$G' = (\Pi' \vdots I) \qquad (7.34)$$

μποροῦμε, ἀντικαθιστώντας τίς (7.32) καί (7.33) στή (7.31), νά γράφουμε τή μήτρα ὡς ἑξῆς:

$$R = \Sigma^{-1}A(X'Z)G' \stackrel{c}{=} 0 \qquad (7.35)$$

Γιά νά λύσουμε τίς ἐξισώσεις (8.35) διαφορίζουμε τή μήτρα R/T καί ἔχουμε

$$d(\frac{R}{T}) = (d\Sigma^{-1})A(\frac{X'Z}{T})G' + \Sigma^{-1}(dA)(\frac{X'Z}{T})G' +$$

$$+ \Sigma^{-1}A(\frac{X'Z}{T})dG' \stackrel{c}{=} 0 \qquad (7.36)$$

Ἄν $\bar{A}$ εἶναι ἡ πραγματική τιμή τοῦ A τότε

$$\bar{A}X' = U' \qquad (7.37)$$

καί κατά συνέπεια:

$$A(\frac{X'Z}{T}) = (A - \bar{A})(\frac{X'Z}{T}) + \frac{U'Z}{T} \xrightarrow[T \to \infty]{p} 0 \qquad (7.38)$$

ἀφοῦ

$$\text{plim}\ \frac{U'Z}{T} = 0 \qquad (7.39)$$

καί ὑποθέτουμε ὅτι

$$\text{plim}\ A = \bar{A} \qquad (7.40)$$

'Από τή (7.38) φαίνεται ὅτι, ἀσυμπτωτικά, μόνο ὁ προτελευταῖος ὅρος τῆς (7.36) εἶναι διαφορετικός ἀπό τό μηδέν.

Ἄν, ἐπομένως, ἔχουμε μεγάλα δείγματα καί ἄν ἑρμηνεύσουμε τό διαφορικό τῆς μήτρας A σάν τή διαφορά ἀνάμεσα σέ δυό διαδοχικές τιμές πού παίρνει ἡ μήτρα αὐτή μέσα σέ μιά **ἐπαναληπτική μέθοδο ἀριστοποίησης** (iterative optimisation method) μποροῦμε νά γράψουμε τή (7.36) ὡς ἑξῆς:

$$\Sigma_r^{-1}(A_{r+1} - A_r)(\frac{X'Z}{T})G_r' \cong 0, \qquad r = 0,1,2,\ldots.. \qquad (7.41)$$

ὅπου

$$\Sigma_r = A_r(\frac{X'X}{T})A_r' \qquad (7.42)$$

καί

$$G_r = (-\Gamma_r B_r'^{-1} \,\vdots\, I) \qquad (7.43)$$

Ἄν οἱ **ἀρχικές τιμές** (starting values) τῶν παραμέτρων τῆς μήτρας A δηλαδή ἡ μήτρα A_0 εἶναι ἐκεῖνες πού δίνει ἡ 2ΣΜΕΤ , πού, ὅπως εἶναι γνωστό, εἶναι συνεπεῖς, τότε ἡ παραπάνω μέθοδος δίνει, τελικά, τόν ἐκτιμητή ΜΜΠΟΠ.

Ἄν,ἀρχίζοντας ἀπό τούς ἐκτιμητές 2ΣΜΕΤ, περιοριστοῦμε στήν πρώτη **ἐπανάληψη** (iteration) τότε ὁ ἐκτιμητής A_1 θά εἶναι, ἀσυμπτωτικά, ἰσοδύναμος μέ ἐκεῖνο τῆς γραμμικοποιημένης μεθόδου μέγιστης πιθανότητας καί, κατά συνέπεια, ἄριστος ἀσυμπτωτικά κανονικός.

'Εκτός ἀπό τόν παραπάνω τρόπο (πού, ὅπως προαναφέρθηκε, προτάθηκε ἀπό τόν Durbin) ἁπλοποίησης τοῦ προβλήματος τῆς μεγιστοποίησης τῆς συνάρτησης (7.20), ὑπάρχουν καί ἄλλοι (ὅπως π.χ. ἐκεῖνος πού προτάθηκε ἀπό τόν Chow (1968)) τούς ὁποίους, ὅμως, δέν ἔχουμε περιθώρια νά παρουσιάσουμε στόν Τόμο αὐτό.

Πρίν κλείσουμε τό τμῆμα καί τό Κεφάλαιο αὐτό δίνουμε μερικές ἰδιότητες τῶν ἐκτιμητῶν ΜΜΠΟΠ (βλ. καί Κεφάλαιο 5).

Πρόταση 2. Ἄν ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις (Α) μέχρι καί (Δ) (ἤ ἀντί γιά τή (Δ), οἱ (Δ_1,Δ_2)) τότε ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι συνεπής ὁ ἐκτιμητής τῆς ΜΜΠΟΠ εἶναι τό σύστημα νά εἶναι ταυτοποιημένο.

Πρόταση 3. Ὅταν δέν ἔχουμε περιορισμούς στή μήτρα Σ, ἡ διαφορά τῶν ἐκτιμητῶν μέ τή 3ΣΜΕΤ καί μέ τή ΜΜΠΟΠ εἶναι $O(T^{-1})$.

Ἀπόδειξη: Βλ. Sargan (1964).

Πρόταση 4. Ἄν ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις τῆς Πρότασης 2 καί τό σύστημα εἶναι ταυτοποιημένο, τότε

$$\sqrt{T}(\tilde{\alpha} - \alpha) \sim N(o\ ,\ V^{-1}) \tag{7.44}$$

ὅπου $\tilde{\alpha}$ εἶναι οἱ ἐκτιμητές ΜΜΠΟΠ τῶν χωρίς περιορισμούς στοιχείων τῆς μήτρας Α πού παίρνουμε μετά τήν ἐπανάληψη στήν ὁποία ἡ συνάρτηση (7.20) ἔχει φτάσει στό μέγιστο, καί ὅπου

$$V = \lim_{T \to \infty} -E\left(\left(\frac{1}{T}\right) \frac{\partial^2 L^*}{\partial\alpha\partial\alpha'}\right) \tag{7.45}$$

Ἀπόδειξη: Βλ. Hausman (1974, 1975).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΜΗΤΡΩΝ

Τό Παράρτημα αὐτό ἀποτελεῖ ἕνα συμπλήρωμα τοῦ Κεφαλαίου 6 τῆς Γραμμικῆς Ἄλγεβρας. Τό συμπλήρωμα αὐτό εἶναι ἀναγκαῖο διότι, ὅπως εἴδαμε στό τελευταῖο τμῆμα αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, ἡ χρησιμοποίηση διαφορικῶν εἶναι ἕνας τρόπος μέ τόν ὁποῖο ἀντιμετωπίζεται τό πρόβλημα τῆς μεγιστοποίησης τῆς συγκεντρωμένης συνάρτησης πιθανότητας (7.20).

Γιά τούς σκοπούς τοῦ Παραρτήματος αὐτοῦ παίρνουμε τίς μήτρες A , B καί C μέ τίς κατάλληλες διαστάσεις.

Τό διαφορικό μιᾶς μήτρας, ἄς ποῦμε τῆς μήτρας A,ὁρίζεται ὡς ἑξῆς

$$dA = \{da_{ij}\} \tag{Π.1}$$

Μέ βάση τόν ὁρισμό (Π.1) ἔχουμε τούς παρακάτω κανόνες:

$$d(A + B) = dA + dB \tag{Π.2}$$

$$d(AC) = (dA)C + A(dC) \tag{Π.3}$$

Ἄν ἡ μήτρα C εἶναι σταθερή, τότε $dC = 0$

Ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα (Π.2) στήν περίπτωση τῆς μήτρας $AA^{-1} = I$, ἔχουμε

$$(dA)A^{-1} + A(dA^{-1}) = dI = 0 \tag{Π.4}$$

Κατά συνέπεια:

$$d(A^{-1}) = -A^{-1}(dA)A^{-1} \tag{Π.5}$$

Ἐφόσον:

$$trA = \Sigma a_{ii}$$

$$d(trA) = d(\Sigma a_{ii}) = \Sigma(da_{ii}) = tr(dA) \qquad (\Pi.6)$$

Ἄν C εἶναι μιά σταθερή μήτρα, τότε

$$dtr(CA) = C'dA \qquad (\Pi.7)$$

Ἐφόσον

$$\frac{\partial detA}{\partial A} = A^{+} \qquad (\Pi.8)$$

ὅπου A^{+} εἶναι ἡ προσαρτημένη μήτρα τῆς μήτρας A , ἔχουμε

$$d(detA) = tr(A^{+}dA) \qquad (\Pi.9)$$

Κατά συνέπεια:

$$dlog(detA) = tr(A^{-1}dA) \qquad (\Pi.10)$$

Ἐφόσον ὁ λογάριθμος ὁρίζεται μόνο γιά θετικούς ἀριθμούς, στήν περίπτωση πού

$$detA < 0$$

παίρνουμε τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ. Ὁρίζουμε τήν ἀπόλυτη αὐτή τιμή ὡς ἑξῆς:

$$detB = - detA = |detA| \qquad (\Pi.11)$$

καί κάνοντας τίς ἀντικαταστάσεις στή (Π.9) βρίσκουμε τό ἴδιο ἀποτέλεσμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Anderson, T.W. (1950) ''Estimation of the Parameters of a Single Equation by the Limited-Information Maximum Likelihood Method'', Ch.IX, in Statistical Inference in Dynamic Economic Models, Cowles Commission Monograph 10, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Anderson, T.W. (1951) ''The Asymptotic Distribution of Certain Characteristic Roots and Vectors'', in Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, J. Newman (Ed.), Berkeley, University of California Press.

Anderson, T.W. (1958) The Statistical Analysis of Time Series, London, John Wiley and Sons, Inc.

Anderson, T.W. and Rubin, H. (1949) ''Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations'', Annals of Mathematical Statistics, Vol. 20.

Anderson, T.W. and Rubin, H. (1950) ''The Asymptotic Properties of Estimates of the Parameters in a Complete System of Stochastic Equations'', Annals of Mathematical Statistics, Vol. 21.

Basmann, R.L. (1957) ''A Generalised Classical Method of Linear Estimation of Coefficients in a Structural Equation'', Econometrica, 25, pp. 77-83.

Basmann, R.L. (1960) ''On Finite Sample Distribution of Generalised Identifiability Test Statistics'', Journal of American Statistical Association, 55, pp. 650-659.

Box, M. Davies, D. and Swann, W. (1969) Non Linear Optimisation Techniques, I.C.I. Monograph No. 5, Edinburgh and London, Oliver and Boyd.

Chernoff, H. and Rubin, H. (1953) ''Asymptotic Properties of Limited-Information Estimates under Generalised Conditions'', Ch.VIII, in Studies in Econometric Method, Cowles Commission Monograph 14, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Chow, G.C. (1968) ''Two Methods of Computing Full-Information Maximum Likelihood Estimates in Simultaneous Stochastic Equations'', International Economic Review, 9.1.

Chow, G.C. and Ray-Chaudhuri, D.K. (1967) ''An Alternative Proof of Hannan's Theorem on Canonical Correlation and Multiple Equation Systems'', Econometrica, 35,1.

Cramér, H. (1946) Mathematical Methods of Statistics, Princeton, Princeton University Press.

Dhrymes, P.J. (1970) Econometrics, Statistical Foundations and Applications, New York, Harper and Row.

Dhrymes, P.J. (1973) ''Restricted and Unrestricted Reduced Forms: Asymptotic Distribution and Relative Efficiency'', Econometrica, 41,1.

Drettakis, E.G. (1971) ''Missing Data in Econometric Estimation'', Ph.D.Thesis, University of London, London School of Economics and Political Science.

Drettakis, E.G. (1973) ''An Expository Note on the Derivation of the Two-Stage and Three-Stage Least Squares Estimators'', Bulletin of Economic Research, Vol. 25, No.2, pp. 146-147.

Durbin, J. (1954) ''Joint Confidence Regions for Multiple Regression Coefficients'', Journal of American Statistical Association, 49, pp. 130-146.

Durbin, J. (1963) ''Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a System of Simultaneous Equations'', paper presented at the Copenhagen Meeting of the Econometric Society.

Feller, W. (1957) An Introduction to Probability Theory and its Applications, New York, John Wiley and Sons,Inc.

Fisher, F.M. (1966) The Identification Problem, New York, McGraw-Hill.

Fletcher, R.(Ed.) (1969) Optimisation, London, Academic Press.

Geary, R.C. (1949) ''Determination of Linear Relations between Systematic Parts of Variables with Errors of Observation the Variances of Which are Unknown'', Econometrica 17.

Goldberger, A.S. (1964) Econometric Theory, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Goldfeld, S.and Quandt, R. (1972) Non-Linear Methods in Econometrics, Amsterdam, North-Holland Publishing Co.

Hannan, E.J. (1967) ''Canonical Correlation and Multiple Equation Systems in Econometrics'', Econometrica,35,1.

Hardy, G.H. (1952) Pure Mathematics, Cambridge, Cambridge University Press.

Hatanaka, M. (1977) ''Hypothesis Testing in the Large Macro-economic Models'', International Economic Review, Vol.18, No.3.

Hausman, J.A. (1974) ''Full Information Instrumental Variables Estimation of Simultaneous Equation Systems'', Annals of Economic and Social Measurement, 3,4.

Hausman, J.A. (1975) ''An Instrumental Variable Approach to Full Information Estimators for Linear and Certain Non-Linear Econometric Models'', Ecnometrica, 43,4.

Hausman, J.A. (1978) ''Specification Tests in Econometrics'', Econometrica, 46,6.

Hendry, D.F. (1976) ''The Structure of Simultaneous Equation Estimators'', Journal of Econometrics, 4, pp. 51-88.

Hoel, P.G. (1962) Introduction to Mathematical Statistics, 3rd Edition, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Johnston, J. (1963) Econometric Methods, 1st Edition, New York, McGraw-Hill Book Co.

Johnston, J. (1972) Econometric Methods, 2nd Edition, New York-Tokyo, McGraw-Hill Book Co.-Kogakusha Co.Ltd.

Kadane, J.B. (1974) ''Testing a Subset of the Overidentifying Restrictions'', Econometrica, 42,5.

Khazzoom, J.D. (1976) ''An Indirect Least Squares Estimator for Overidentified Equations'', Econometrica, 44,4.

Klein, L.R. (1962) An Introduction to Econometrics, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, Inc.

Koopmans, T.C. (1953) ''Identification Problems in Economic Model Construction'', Ch.2, in Studies in Econometric Method, Cowles Commission Monograph 14, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Koopmans, T.C., Rubin, H. and Leipnic, R.B. (1950) ''Measuring the Equation Systems of Dynamic Economics'', in Statistical Inference in Dynamic Economic Models, Cowles Commission Monograph 10, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Koopmans, T.C. and Hood, W.C. (1953) ''The Estimation of Simultaneous Linear Economic Relationships'', Ch.VI in Studies in Econometric Method, Cowles Commission Monograph 14, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Loève, M. (1963) Probability Theory, New York, Von Nostrand Reinhold Company.

Madansky, A. (1976) Foundations of Econometrics, Amsterdam, North Holland Publishing Company.

Malinvaud, E. (1970) Statistical Methods of Econometrics, Amsterdam, North Holland Publishing Company.

Mann, H.B. and Wald, A. (1943) ''On Stochastic Limit and Order Relationships'', Annals of Mathematical Statistics, 14.

Mann, H.B. and Wald, A. (1943) ''On the Statistical Treatment of Stochastic Difference Equations'', Econometrica, 11.

Mood, M.M. and Graybill, F.A. (1965) — Introduction to the Theory of Statistics, New York, McGraw-Hill.

Morgan, A. and Vandaele, W. (1974) — ''On Testing Hypotheses in Simultaneous Equation Models'', Journal of Econometrics, 2,1.

Nagar, A.L. (1959) — ''The Bias and Moment Matrix of General k-Class Estimators of the Parameters in Simultaneous Equations'', Econometrica,17,pp.575-595.

Nagar, A.L. (1961) — ''A Note on the Residual Variance Estimation in Simultaneous Equation Estimators'', Econometrica, 28, pp.573-590.

Nagar, A.L. (1962) — ''Double k-Class Estimators of Parameters in Simultaneous Equations and their Small Sample Properties'', International Economic Review, 3, pp. 168-188.

Quandt, R.E. (1965) — ''On Certain Small Sample Properties of k-Class Estimators'', International Economic Review, 6, pp. 92-104.

Rao, C.R. (1973) — Linear Statistical Inference and its Applications, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Rao, C.R. and Mitra, K. (1971) — Generalised Inverse of Matrices and its Applications, New York, John Wiley and Sons, Inc.

Reiersøl, O. (1941) — ''Confluence Analysis by Means of Lag-Moments and other Methods of Confluence Analysis'', Econometrica, 9, pp. 1-24.

Reiersøl, O. (1945) ''Confluence Analysis by Means of Instrumental Sets of Variables'', Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fusik, 32A (4).

Rothenberg, T.J. and Leenders, C.T. (1964) ''Efficient Estimation of Simultaneous Equation Systems'', Econometrica 32, 1-2.

Sargan, J.D. (1958) ''The Estimation of Economic Relationships using Instrumental Variables'', Econometrica, 26, pp. 393-415.

Sargan, J.D. (1964) ''Wages and Prices in the U.K.: A Study in Econometric Methodology'', in Econometric Analysis for National Economic Planning, London, Butterworth and Co. Ltd.

Sargan, J.D. (1974) ''The Validity of Nagar's Expansion for the Moments of Econometric Estimators'', Econometrica, 42

Sargan, J.D. (1975) ''Gramm-Charlier Approximations appliedto t-Ratios of k-Class Estimators'', Econometrica, 43

Theil, H. (1953a) ''Repeated Least Squares applied to Complete EquationSystems'', The Hague: Central Planning Bureau.

Theil, H. (1953b) ''Estimation and Simultaneous Correlation in Complete Equation Systems'', The Hague: Central Planning Bureau.

Theil, H. Economic Forecasts and Policy, 2nd Edition, Amsterdam, North Holland Publishing Company.

Theil, H. (1971) Principles of Econometrics, New York, John Wiley and Sons,Inc.

Walker, A.M. (1963) ''A Note on the Asymptotic Efficiency of an Asymptotically Normal Estimator Sequence'', Journal of Royal Statistical Society, Series B, 25

Wallis, K.F. (1973) ''Introductory Econometrics'', London, Gray Mills Publishing Ltd.

Working, E.J. (1927) ''What do Statistical Demand Curves Show'', Quarterly Journal of Economics, Reprinted in Readings in Price Theory, pp. 97-115.

Wu, D.M. (1973) ''Alternative Tests of Independence Between Stochastic Regressors and Disturbances'', Econometrica, 41, 4.

Zacks, S. (1971) The Theory of Statistical Inference, New York, John Wiley and Sons, Inc.

ΑΓΓΛΟΕΛΛΗΝΙΚΟ

ΓΛΩΣΣΑΡΙΟ ΟΡΩΝ

A priori restrictions	ἐκ τῶν προτέρων περιορισμοί
Asymptotic	ἀσυμπτωτική
-distribution	-κατανομή
-theory	-θεωρία
-variance	-διακύμανση
Best linear transformation	ἄριστος γραμμικός μετασχηματισμός
Block diagonal matrix	διαγώνια μήτρα μέ στοιχεῖα ὑπομῆτρες
Central limit theorem	κεντρικό ὁριακό θεώρημα
Change of variables	ἀλλαγή μεταβλητῶν
Coefficient	συντελεστής
Complete system	πλῆρες σύστημα
Concentrated likelihood function	συγκεντρωμένη συνάρτηση πιθανότητας
Constrained parameters	παράμετροι μέ περιορισμούς
Continuity theorem	θεώρημα τῆς συνέχειας
Convergence	σύγκλιση
-in distribution	-κατά κατανομή
-in probability	-κατά πιθανότητα
-in quadratic mean	-κατά μέσο τετραγώνου
-with probability one	-μέ πιθανότητα τή μονάδα
Disturbances	διαταρακτικοί ὅροι
Double k-class estimators	ἐκτιμητές τάξης διπλοῦ k

Equation	ἐξίσωση
-just identified	-ἀκριβῶς ταυτοποιημένη
-overidentified	-ὑπερταυτοποιημένη
-underidentified	-ὑποταυτοποιημένη
Estimator	ἐκτιμητής
-asymptotically biased	-ἀσυμπτωτικά μεροληπτικός
-asymptotically efficient	-ἀσυμπτωτικά ἀποτελεσματικός
-asymptotically unbiased	-ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος
-best asymptotically normal	-ἄριστος ἀσυμπτωτικά κανονικός
-consistent	-συνεπής
Explanatory variables	ἑρμηνευτικές μεταβλητές
Full information maximum likelihood method	μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ ὅλες τίς πληροφορίες
Generalised least squares method	γενικευμένη μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων
h-class estimators	ἐκτιμητές τάξης h
Identification	ταυτοποίηση
Identity	ταυτότητα
Independent random variables	ἀνεξάρηττες τυχαῖες μεταβλητές
Indirect least squares method	ἔμμεση μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων
Inequality	ἀνισότητα
Instrumental Variables method	μέθοδος τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν
Iteration	ἐπανάληψη
Iterative optimisation method	ἐπαναληπτική μέθοδος ἀριστοποίησης
k-class estimators	ἐκτιμητές τάξης k

Laws of large numbers	νόμοι τῶν μεγάλων ἀριθμῶν
-Strong	-ἰσχυροί
-Weak	-ἀσθενεῖς
Likelihood ratio tests	ἔλεγχοι τοῦ λόγου πιθανότητας
Limited information maximum likelihood method	μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας μέ περιορισμένες πληροφορίες
Linearised maximum likelihood method	γραμμικοποιημένη μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας
Local maximum	τοπικό μέγιστο
Maximum likelihood estimator	ἐκτιμητής μέγιστης πιθανότητας
Maximum likelihood method	μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας
Necessary and sufficient condition	ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη
Necessary condition	ἀναγκαία συνθήκη
Non-stochastic	μή στοχαστικός
Normalisation rule	κανόνας τυποποίησης
Normalised equation	τυποποιημένη ἐξίσωση
Observation	παρατήρηση
Observationally equivalent	παρατηρησιακά ἰσοδύναμα
Order condition	συνθήκη τάξης
Ordinary least squares method	ἁπλή μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων
Overidentifying linear restrictions	ὑπερταυτοποιητικοί γραμμικοί περιορισμοί
Parameter	παράμετρος
Random variable	τυχαία μεταβλητή
-degenerate	-ἐκφυλισμένη
-standardised	-τυποποιημένη
Rank condition	συνθήκη βαθμοῦ

Reduced form	ἀνηγμένη μορφή
Regularity conditions	συνθῆκες κανονικότητας
Restrictions	περιορισμοί
-linear	-γραμμικοί
-non-linear	-μή γραμμικοί
-zero	-μηδενικοί
Sequence	ἀκολουθία
Specification	ἐξειδίκευση
-tests	-ἔλεγχοι
Starting values	ἀρχικές τιμές
Stochastic order of magnitude	στοχαστικές τάξεις μεγέθους
Structural form	διαρθρωτική μορφή
Structural parameters	διαρθρωτικές παράμετροι
Structure	δομή (διάρθρωση)
Three-stage least squares method	μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ τρία στάδια
Two-stage least squares method	μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια
Unconstrained parameters	παράμετροι χωρίς περιορισμούς
Uniformly integrable	ὁμοιόμορφα ὁλοκληρώσιμη
Variables	μεταβλητές
-endogenous	-ἐνδογενεῖς
-exogenous	-ἐξωγενεῖς
-explanatory	-ἑρμηνευτικές
-lagged endogenous	-ἐνδογενεῖς μέ χρονικές ὑστερήσεις
-predetermined	-προκαθορισμένες
Vector random variable	διανυσματική τυχαία μεταβλητή

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΥΛΗΣ

Ἀκολουθία	16
Ἀκριβῶς ταυτοποιημένη ἐξίσωση	69
Ἀλλαγή μεταβλητῶν	62
Ἀνεξάρτητες καί μέ τήν ἴδια κατανομή τυχαῖες μεταβλητές	29
Ἀνεξάρτητες τυχαῖες μεταβλητές	28
Ἀνηγμένη μορφή	45
Ἀνισότητα τοῦ Chebychev	19
Ἀνισότητα τοῦ Markov	19
Ἁπλή μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων	76
Ἄριστος γραμμικός μετασχηματισμός	97
Ἀρχικές τιμές	163
Ἀσυμπτωτική διακύμανση	33
Ἀσυμπτωτική κατανομή	33
Γενικευμένη μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων	88
Γραμμικοποιημένη μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας	157
Διανυσματική τυχαία μεταβλητή	25
Διαρθρωτική μορφή	45
Διαταρακτικοί ὅροι	41
Ἐκτιμητής	32
-ἀσυμπτωτικά ἀμερόληπτος	32
-ἀσυμπτωτικά ἀποτελεσματικός	33
-ἀσυμπτωτικά μεροληπτικός	40

'Εκτιμητής 32
-ἄριστος ἀσυμπτωτικά κανονικός 34
-μέγιστης πιθανότητας 126
-συνεπής 32
-τάξης διπλοῦ k 104
-τάξης h 105
-τάξης k 104
"Ελεγχοι ἐξειδίκευσης 150
"Ελεγχος τοῦ λόγου πιθανότητας 129
"Εμμεση μέθοδος τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων 76
'Εξειδίκευση τοῦ ὑποδείγματος 59
'Εξίσωση
-ἀκριβῶς ταυτοποιημένη 69
-ὑπερταυτοποιημένη 69
-ὑποταυτοποιημένη 69
'Επαναληπτική μέθοδος ἀριστοποίησης 163
'Επανάληψη 163

Θεώρημα τῆς συνέχειας 24
-τοῦ Chebychev 28
-τοῦ Colmogorov 28,29
-τοῦ Cramer 27
-τοῦ Khintchine 29
-τοῦ Slutsky 26
-τοῦ Liapounov 30
-τῶν Lindeberg-Feller 30
-τῶν Lindeberg-Levy 30

Κανόνας τυποποίησης 47
Κεντρικά ὁριακά θεωρήματα 28

Μέθοδοι ἄμεσης ἔρευνας 152
-κλίσης 152
Μέθοδος τῆς μέγιστης πιθανότητας
-μέ ὅλες τίς πληροφορίες 151
-μέ περιορισμένες πληροφορίες 134
-τῶν βοηθητικῶν μεταβλητῶν 93
-τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ δύο στάδια 84
-τῶν ἐλάχιστων τετραγώνων σέ τρία στάδια 113
Μεταβλητές
-ἐνδογενεῖς 41
-ἐνδογενεῖς μέ χρονικές ὑστερήσεις 41
-ἐξωγενεῖς 41
-προκαθορισμένες 41
-ἑρμηνευτικές 48

Νόμοι τῶν μεγάλων ἀριθμῶν 28
-ἀσθενεῖς 29
-ἰσχυροί 29

Ὁμοιόμορφα ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση 24

Παράμετροι 41
-ανηγμένης μορφῆς 81
-διαρθρωτικές 87
-μέ περιορισμούς 156
-χωρίς περιορισμούς 156
Παρατηρήσεις 43
Παρατηρησιακά ἰσοδύναμα ὑποδείγματα 63
Περιορισμοί 60
-γραμμικοί 60

Περιορισμοί
  -μή γραμμικοί 60
  -μηδενικοί 60
Πλῆρες σύστημα 49

Συγκεντρωμένη συνάρτηση πιθανότητας 129
Σύγκλιση 16
  -κατά κατανομή 22
  -κατά μέσο τετραγώνου 16
  -κατά πιθανότητα 16
  -μέ πιθανότητα τή μονάδα 16
Συνθήκη βαθμοῦ 69
  -τάξης 69
Συνθῆκες κανονικότητας 127
Συντελεστές 41
Στοχαστικές τάξεις μεγέθους 18

Ταυτοποίηση 55
Ταυτότητα 36
Τοπικό μέγιστο 127
Τυποποιημένη ἐξίσωση 47
Τυχαία μεταβλητή 16
  -διανυσματική 25
  -ἐκφυλισμένη 18
  -τυποποιημένη 29

Ὑπερταυτοποιημένη ἐξίσωση 69
Ὑπερταυτοποιητικοί γραμμικοί περιορισμοί 90
Ὑποταυτοποιημένη ἐξίσωση 69